Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 2

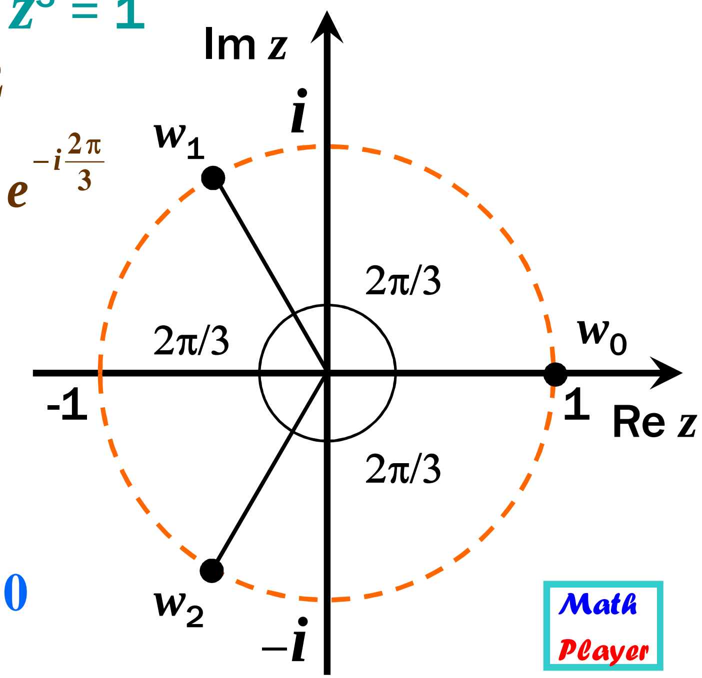
Pierwiastek z liczby zespolonej

Twierdzenie: Istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia z każdej liczby zespolonej różnej od zera, tzn. rozwiązań równania $w^n = z$ i wszystkie te pierwiastki dają się zapisać wzorem, w którym k = 0, 1, ..., n−1:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}\exp\left(i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

Przykład: Znajdź wszystkie rozwiązania równania $z^3 = 1$

$$w_k = \sqrt[3]{1}\exp\left(i\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) = \begin{cases} k = 0 & k = 1 & k = 2 \\ w_0 = 1 & w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} & w_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$



Własności pierwiastka n-tego stopnia z l.z. 1:

- $\omega_k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)$ gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$
- $\omega_k \omega_l = \omega_{k+l}$ $\quad \omega_k = (\omega_1)^k$ $\quad (\omega_1)^n = 1$
- $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1)^k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k = \frac{e^{i2\pi} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0$

Zespolony logarytm i zespolona potęga

Definicja: Logarytmem naturalnym z liczby zespolonej z (ozn. Ln(z)) nazywamy liczbę zespoloną w taką, że $z = e^w$.

- $$z_1 z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1+w_2} \quad \Rightarrow \quad \ln(z_1 z_2) = w_1 + w_2 = \ln(z_1) + \ln(z_2)$$

Zapiszemy liczbę z w postaci wykładniczej i znajdziemy jej logarytm:

Math Player

$$z = |z| \exp\left[i\left(\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \ln(z) = \ln|z| + i\left(\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\right)$$

Przykład: $\ln(-i) = \ln\left(\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -i\frac{\pi}{2}, \quad i\frac{3\pi}{2}, \quad i\frac{7\pi}{2}, \ldots$

Definicja: Niech z i $w \in \mathbb{C}$. Potęgą liczby $z = |z|e^{i\varphi}$ (gdzie faza $\varphi = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$) o wykładniku w nazywamy wielkość $z^w = \exp(w \ln(z)) = |z|^w \exp(i\varphi w)$ gdzie

$$|z|^w = |z|^{\mathrm{Re}\,w} |z|^{i\,\mathrm{Im}\,w} = |z|^{\mathrm{Re}\,w} e^{i\,\mathrm{Im}\,w \ln|z|} \quad \text{oraz} \quad e^{i\varphi w} = e^{-\varphi\,\mathrm{Im}\,w} e^{i\varphi\,\mathrm{Re}\,w}$$

A więc: $\left|z^w\right| = |z|^{\mathrm{Re}\,w} e^{-\varphi\,\mathrm{Im}\,w}$ oraz $\arg\left(z^w\right) = \ln|z|\,\mathrm{Im}\,w + \varphi\,\mathrm{Re}\,w$

Przykład: Oblicz $z = i^{-2i}$

$$z = e^{\ln z} = e^{-2i\ln i} = \exp\left[-2i \ln e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right] = \exp\left[-2i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = e^{\pi + 4k\pi}$$

F. trygonometryczne zmiennej zespolonej

Definicja: Korzystając z postaci biegunowej i trygonometrycznej liczby zespolonej możemy zdefiniować funkcje sinus i cosinus w następujący sposób:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

Uwaga: Definicje te spełniają wszystkie tożsamości trygonometryczne.

Definicja: W analogiczny sposób definiujemy sinus i cosinus liczby zespolonej:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

Uwaga: Także te definicje spełniają wszystkie standardowe wzory trygonometryczne, np.:

$$\sin(-z) = -\sin z \qquad \cos(-z) = \cos z \qquad \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \sin 2z = 2\sin z\cos z$$

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(e^{i2z} + e^{-i2z}\right) = \cos 2z$$

Interpretacja funkcji zespolonej sin$z$:

$$\sin z = \sin(x+iy) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x + i\sin x)\right] =$$

$$= \sin x\left[\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\right] + i\cos x\left[\frac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)\right] = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

Math Player

Funkcje hiperboliczne zmiennej zespolonej

Definicja: Funkcje hiperboliczne zdefiniowane są w następujący sposób:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

Własności funkcji hiperbolicznych:

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \cosh(-x) = \cosh x \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \qquad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Definicja: W analogiczny sposób definiujemy sinus i cosinus hiperboliczny liczby zespolonej:

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

Math Player

Uwaga: Istnieją następujące związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi zmiennej zespolonej:

$$\sin iz = i\sinh z \qquad \cos iz = \cosh z \qquad \sinh iz = i\sin z \qquad \cosh iz = \cos z$$

Przykład: Oblicz $\cos(\pi - i)$

$$\cos(\pi - i) = \cos\pi\cosh(-1) - i\sin\pi\sinh(-1) = -\cosh(-1) = -\cosh 1 \approx -1.543$$

Relacje równoważności i klasy

<u>Definicja:</u> Relacją określoną na zbiorze A nazywamy dowolny test porównawczy pomiędzy uporządkowanymi parami elementów tego zbioru. Jeśli para $(a,b) \in A\times A$ spełnia ten test, mówimy, że a pozostaje w relacji do b, $(a \triangleright b)$.

<u>Definicja:</u> Relacją równoważności określoną na zbiorze A nazywamy relację która jest:

- zwrotna: $\forall a \in A,\ a \triangleright a$
- symetryczna: $a,b \in A,\ a \triangleright b \Rightarrow b \triangleright a$
- przechodnia: $a,b,c \in A,\ (a \triangleright b) \wedge (b \triangleright c) \Rightarrow a \triangleright c$

O elementach $a,b \in A$ mówimy wówczas, że „a jest równoważne b"

<u>Definicja:</u> Klasą równoważności elementu $a \in A$ nazywamy zbiór wszystkich elementów A pozostających w relacji równoważności z a, $[\![a]\!] = \{b \in A : b \triangleright a\}$

<u>Twierdzenie:</u> Jeśli $\triangleright$ jest relacją równoważności na A oraz $a,b \in A$ wtedy albo

$$[\![a]\!] \cap [\![b]\!] = \varnothing \quad \text{albo} \quad [\![a]\!] = [\![b]\!]$$

a więc dowolny element klasy można wybrać jako reprezentanta tej klasy.

<u>Przykład:</u> A – zbiór ludzi: $a \triangleright b$ - „a jest starszy od b" – nie jest relacją równoważności.

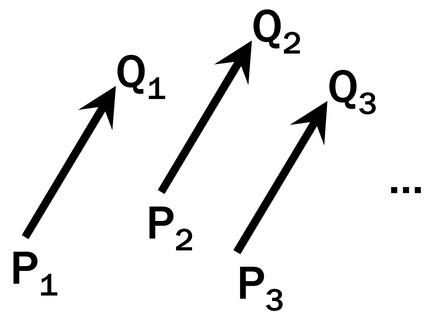
$a \triangleright b$ - „a i b mają tego samego dziadka ze strony ojca" – jest relacją równowaności.

Algebra wektorów

Definicja: **Skalar** to wielkość fizyczna, która posiada tylko wartość (liczba).

np. temperatura, czas, masa, ...

Definicja: **Wektor** to klasa równoważności par punktów, czyli zorientowanych odcinków, które przekształcają się w siebie przy przesunięciu równoległym.

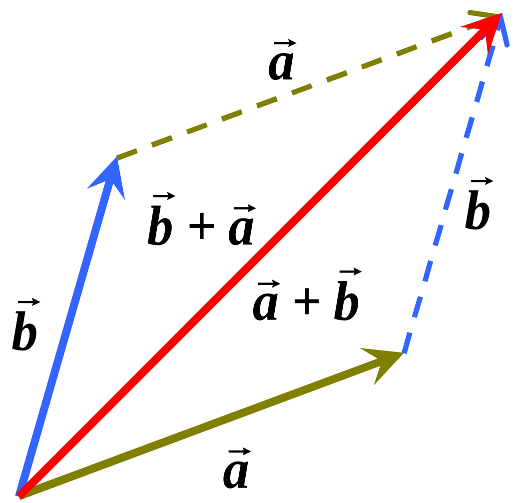


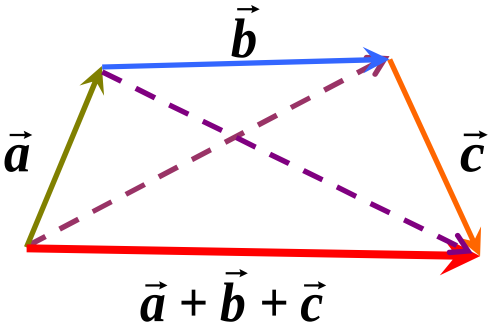
np. wektor położenia, siły, prędkości, ...

Symbole wektorów: $\overrightarrow{PQ}$ $\vec{a}$ $\boldsymbol{a}$ $\qquad P \xrightarrow{\vec{a}} Q$

Dodawanie wektorów (reguła równoległoboku):

- przemienność: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- łączność: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$





Odejmowanie wektorów: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

Algebra wektorów

W wyniku mnożenia wektora przez liczbę rzeczywistą otrzymujemy wektor o tym samym kierunku co wektor oryginalny i proporcjonalnej długości:

$$P \xrightarrow{\vec{a}} Q \qquad P \xleftarrow{-\vec{a}} Q \qquad P \xrightarrow{\lambda\vec{a}} Q' \qquad \left|\overrightarrow{PQ'}\right| = \lambda\left|\overrightarrow{PQ}\right|$$

Własności:

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$$

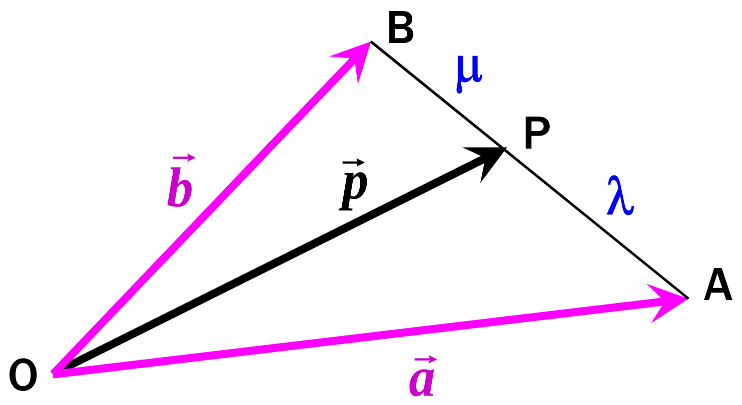
$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

Przykład: Niech punkt P dzieli odcinek AB w stosunku $\lambda : \mu$. Znajdź wektor położenia punktu P jeśli wektory położenia punktów A i B są znane i wynoszą odpowiednio $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\vec{b}-\vec{a}) =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\vec{b}$$



Kombinacja liniowa wektorów

Definicja: Wektor $\vec{b}$ nazywamy liniową kombinacją wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ jeśli istnieją stałe c_1, c_2, ..., c_n takie, że:

$$\vec{b} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + ... + c_n\vec{v}_n$$

Definicja: Mówimy, że wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ są liniowo zależne jeśli istnieją stałe c_1, c_2, ..., c_n , nie wszystkie równe zero, takie że:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + ... + c_n\vec{v}_n = 0$$

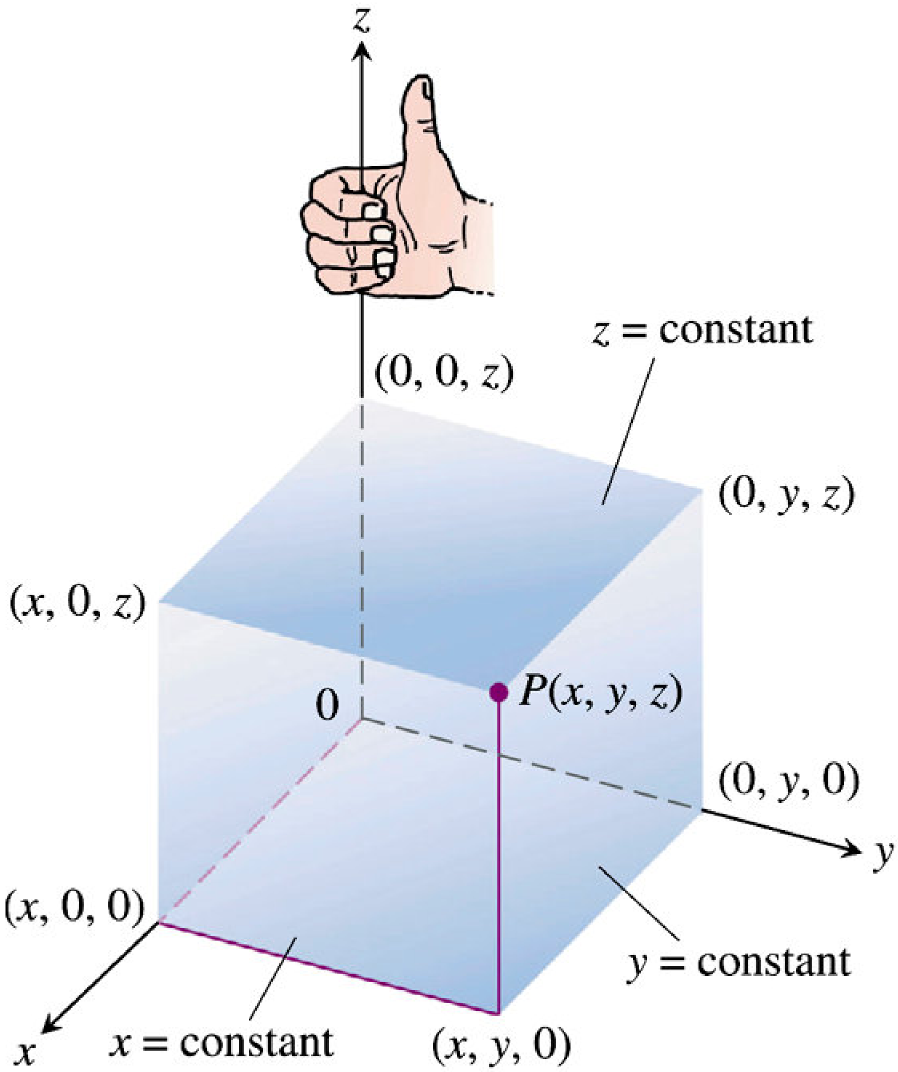
Jeśli powyższa równość zachodzi tylko wtedy gdy wszystkie stałe c_1, c_2, ..., c_n , są jednocześnie równe zero, to o wektorach $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ mówimy, że są liniowo niezależne.

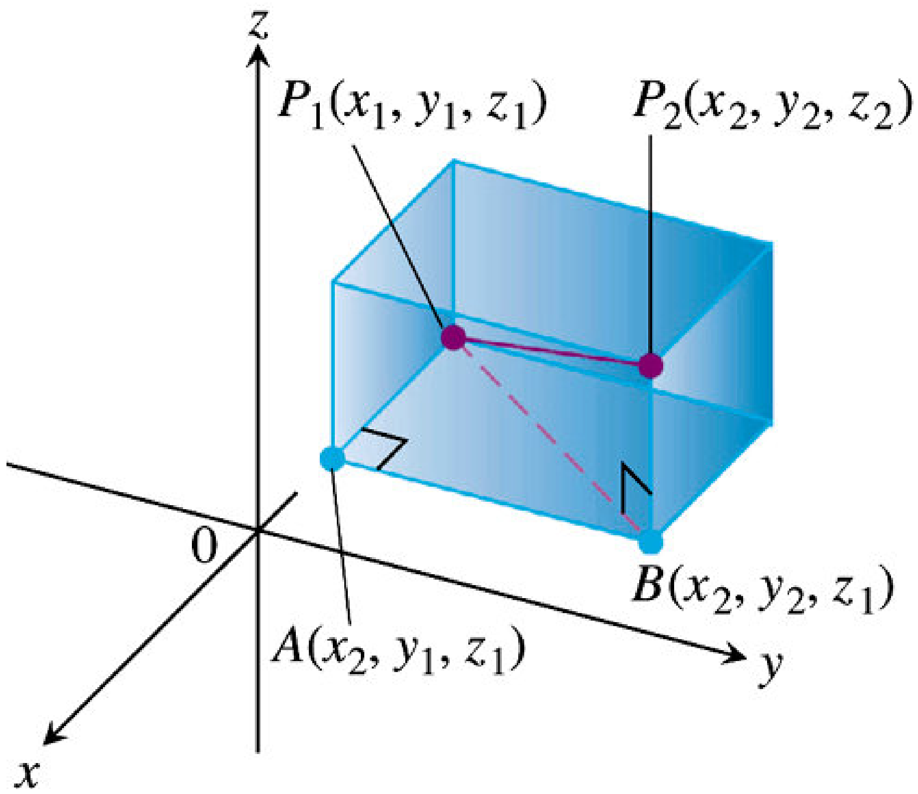
Uwaga: Powyższe operacje można określić dla wektorów w dowolnej liczbie wymiarów.

Własności:

- każdy zbiór m+1 lub więcej m-wymiarowych wektorów jest liniowo zależny.
- jeśli dany zbiór wektorów jest liniowo niezależny, to każdy podzbiór tych wektorów jest również liniowo niezależny.
- każdy zbiór wektorów o tym samym wymiarze, zawierający wektor zerowy, jest liniowo zależny.

Kartezjański układ współrzędnych

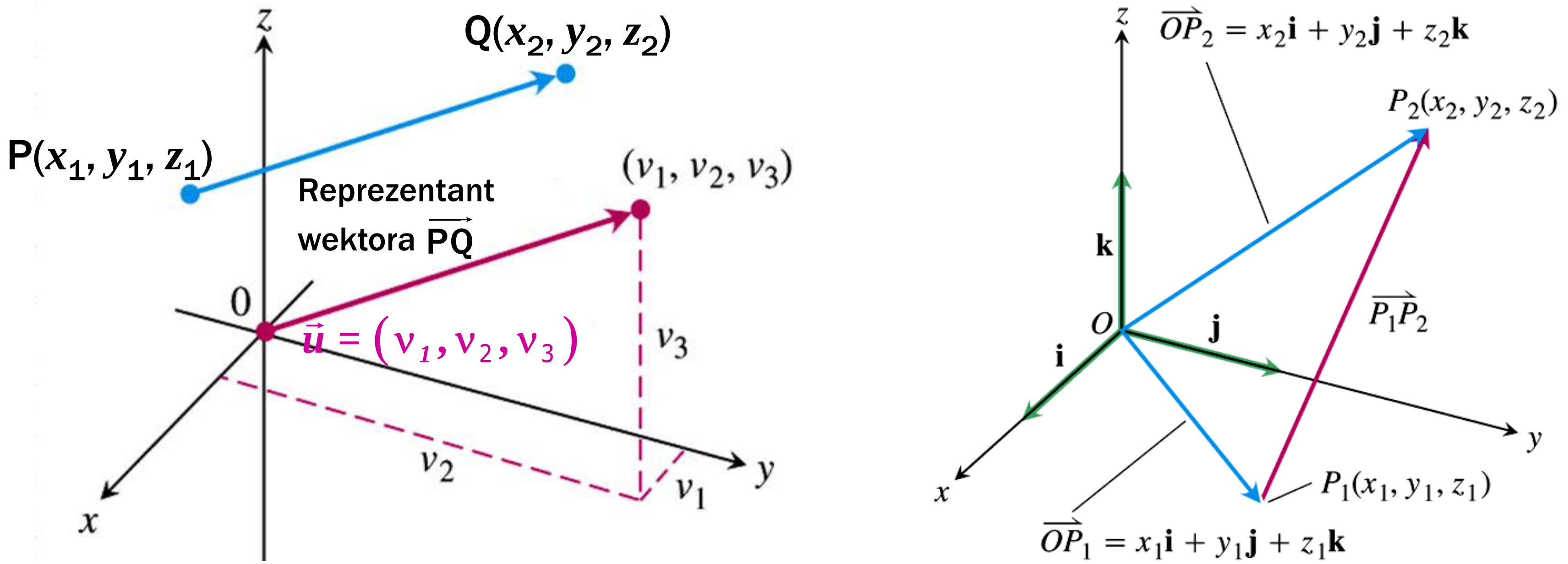




Odległość pomiędzy punktami P_1 i P_2 znajdujemy z twierdzenia Pitagorasa:

$$\left|P_1P_2\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

Współrzędne wektora i wektory bazowe



Dysponując trzema różnymi wektorami, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, nie leżącymi w jednej płaszczyźnie, można w trójwymiarowej przestrzeni dowolny wektor $\vec{a}$ zapisać jako kombinację tych wektorów:

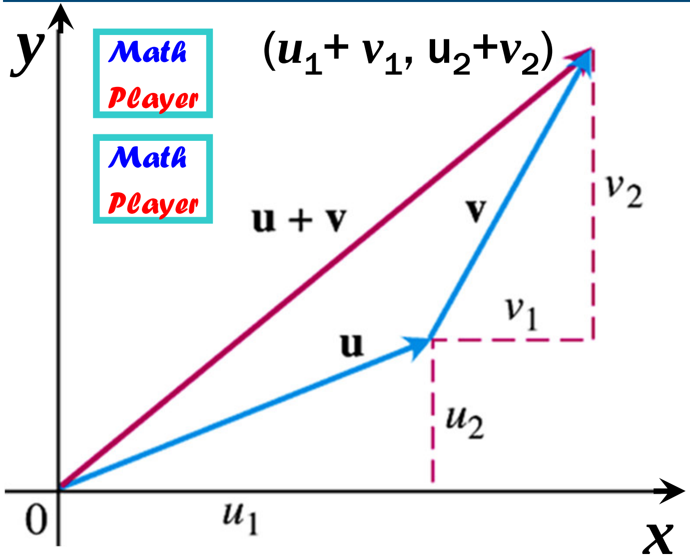
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$$

$$\boxed{\hat{\vec{e}}_i \equiv \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}}$$

Wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nazywamy bazą w przestrzeni $\mathcal{R}^3$, natomiast skalary a_1, a_2, a_3 to współrzędne wektora $\vec{a}$ w tej bazie. Mówimy, że wektor został rozłożony na składowe.

Dla współrzędnych kartezjańskich w $\mathcal{R}^3$ stosujemy oznaczenia: $\hat{\vec{e}}_1 \equiv \vec{i}$ $\quad \hat{\vec{e}}_2 \equiv \vec{j}$ $\quad \hat{\vec{e}}_3 \equiv \vec{k}$

Algebra wektorów na współrzędnych



Dodawanie i odejmowanie wektorów:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \pm \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= \left(a_x \pm b_x\right)\vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{j} + \left(a_z \pm b_z\right)\vec{k}$$

Wygodny sposób zapisu wektora:

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) \quad \text{lub} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Długość (moduł) wektora: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Mnożenie wektora przez liczbę: $\lambda\vec{a} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right)$ $\Rightarrow$ **wektor jednostkowy:** $\hat{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$

<u>Przykład:</u> Dane są wektory $\vec{v}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ oraz $\vec{v}_2 = -\vec{i} - 2\vec{k}$. Znajdź ich sumę, moduł sumy i wektor jednostkowy o tym samym kierunku i zwrocie co wektor $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \left(\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}\right) + \left(-\vec{i} - 2\vec{k}\right) = 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{czyli} \quad \hat{\vec{u}} = \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Iloczyn skalarny wektorów

Definicja: Iloczynem skalarnym dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy liczbę:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

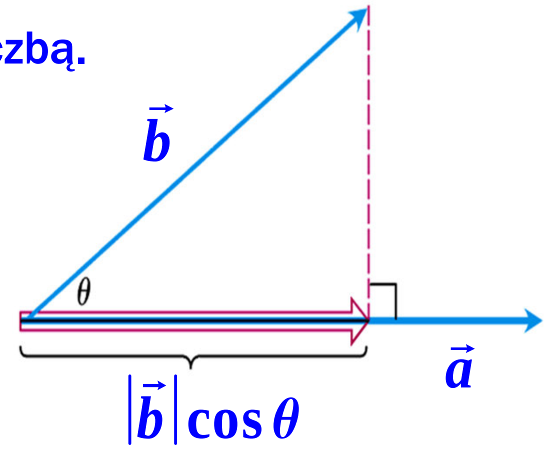
Uwaga: W dowolnej liczbie wymiarów iloczyn skalarny jest liczbą.

Własności:

- przemienny: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- liniowy w każdym z argumentów $(\alpha, \beta \in \mathcal{R})$:

$$\vec{a}\cdot\left(\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right) = \alpha\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta\vec{a}\cdot\vec{c}$$

- Dwa niezerowe wektory są ortogonalne (prostopadłe) jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$



Przykład: Wektory bazowe w układzie kartezjańskim spełniają relacje:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

Obliczanie iloczynu skalarnego:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)\cdot\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i$$

Długość wektora: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

Iloczyn skalarny wektorów

Przykład: Znajdź kąt pomiędzy wektorami $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ oraz $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 = 20 \\ &|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \\ &|\vec{b}| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{20}{\sqrt{14}\sqrt{19}} \approx 0.9926 \quad\Rightarrow\quad \theta = 0.12 \text{ rad}$$

Cosinusy kierunkowe wektorów:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}\frac{b_x}{|\vec{b}|} + \frac{a_y}{|\vec{a}|}\frac{b_y}{|\vec{b}|} + \frac{a_z}{|\vec{a}|}\frac{b_z}{|\vec{b}|}$$

wielkości $a_i/|\vec{a}|$ oraz $b_i/|\vec{b}|$ gdzie $i = x, y, z$ to cosinusy kierunkowe wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Delta Kroneckera ($i, j = 1, 2$):
$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j \equiv \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

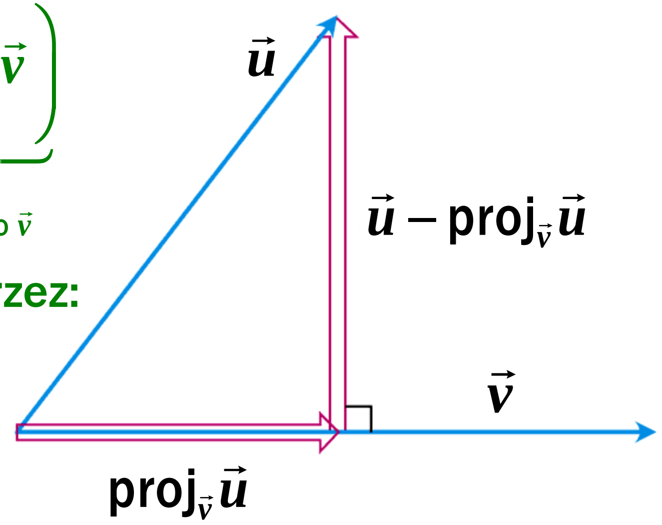
Składowe wektorów w bazie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{e}_j = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \vec{e}_k\right)\cdot\vec{e}_j = \sum_{k=1}^{n} u_k\left(\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} u_k \delta_{kj} = u_j$$

Rozkład wektora na dowolne składowe

<u>Przykład:</u> Rozłożyć wektor $\vec{u}$ na składowe: równoległą i prostopadłą do wektora $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} + \left(\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\right) = \underbrace{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}}_{\substack{\text{skladowa} \\ \text{rownolegla do } \vec{v}}} + \underbrace{\left(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}\right)}_{\substack{\text{skladowa} \\ \text{prostopadla do } \vec{v}}}$$



gdzie rzut (projekcja) wektora $\vec{u}$ na wektor $\vec{v}$ dany jest przez:

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta w 2-dim:

Rozważmy dowolną bazę $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ w 2-dim przestrzeni. Chcemy utworzyć takie kombinacje liniowe tych wektorów aby otrzymane wektory były ortonormalne.

Math Player

Jako pierwszy wektor poszukiwanej bazy wybieramy: $\hat{e}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}$

Drugi wektor otrzymujemy odejmując od $\vec{a}_2$ jego rzut na wektor $\hat{e}_1$:

$$\vec{e}\,'_2 = \vec{a}_2 - \left(\vec{a}_2\cdot\hat{e}_1\right)\hat{e}_1$$ i odpowiednio normalizując do $$\hat{e}_2 = \frac{\vec{e}\,'_2}{|\vec{e}\,'_2|}$$