Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 2

Relacje równoważności i klasy

Definicja: Relacją określoną na zbiorze A nazywamy dowolny test porównawczy pomiędzy uporządkowanymi parami elementów elementów zbioru A. Jeśli para $(a, b) \in A \times A$ spełnia ten test, mówimy, że a pozostaje w relacji do b, $(a \triangleright b)$.

Definicja: Relacją równoważności określoną na zbiorze A nazywamy relację która jest:

- zwrotna: $\forall a \in A,\ a \triangleright a$
- symetryczna: $a, b \in A,\ a \triangleright b \Rightarrow b \triangleright a$
- przechodnia: $a, b, c \in A,\ (a \triangleright b) \wedge (b \triangleright c) \Rightarrow a \triangleright c$

O elementach $a,b \in$ A mówimy wówczas, że „a jest równoważne b"

Definicja: Klasą równoważności elementu $a \in$ A nazywamy zbiór wszystkich elementów A pozostających w relacji równoważności z a, $[\![a]\!] = \{b \in A : b \triangleright a\}$

Twierdzenie: Jeśli $\triangleright$ jest relacją równoważności na A oraz $a,b \in$ A wtedy albo

$[\![a]\!] \cap [\![b]\!] = \varnothing$ albo $[\![a]\!] = [\![b]\!]$

a więc dowolny element klasy można wybrać jako reprezentanta tej klasy.

Przykład: A – zbiór ludzi: $a \triangleright b$ - „a jest starszy od b" – nie jest relacją równoważności.

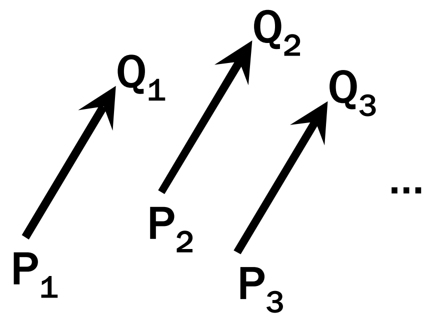
$a \triangleright b$ - „a i b mają tego samego dziadka ze strony ojca" – jest relacją równowaności.

Algebra wektorów

Definicja: **Skalar** to wielkość fizyczna, która posiada tylko wartość (liczba).

np. temperatura, czas, masa, ...

Definicja: **Wektor** to klasa równoważności par punktów, czyli zorientowanych odcinków, które przekształcają się w siebie przy przesunięciu równoległym.

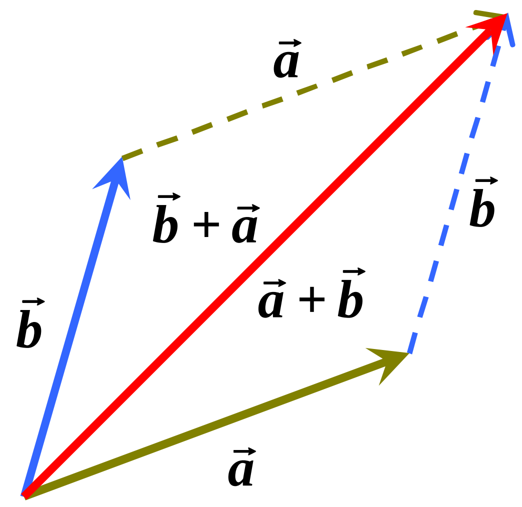


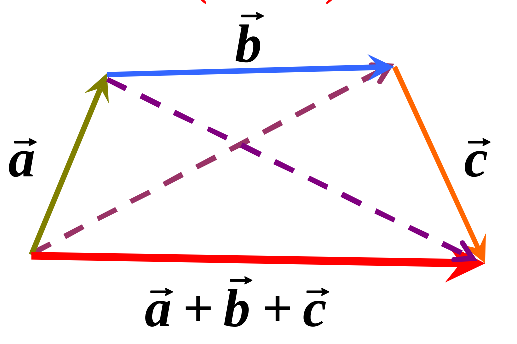
np. wektor położenia, siły, prędkości, ...

Symbole wektorów: $\overrightarrow{PQ}$ $\quad \vec{a}$ $\quad \boldsymbol{a}$ $\qquad P \xrightarrow{\vec{a}} Q$

Dodawanie wektorów (reguła równoległoboku):

- przemienność: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- łączność: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$





Odejmowanie wektorów: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

Algebra wektorów

W wyniku mnożenia wektora przez liczbę rzeczywistą otrzymujemy wektor o tym samym kierunku co wektor oryginalny i proporcjonalnej długości:

$$P \xrightarrow{\vec{a}} Q \qquad P \xleftarrow{-\vec{a}} Q \qquad P \xrightarrow{\lambda\vec{a}} Q' \qquad \left|\overrightarrow{PQ'}\right| = \lambda\left|\overrightarrow{PQ}\right|$$

Własności:

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$$

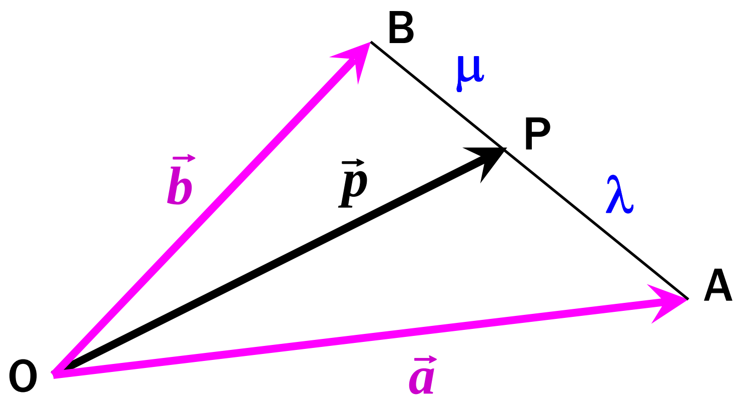
$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

Przykład: Niech punkt P dzieli odcinek AB w stosunku $\lambda : \mu$. Znajdź wektor położenia punktu P jeśli wektory położenia punktów A i B są znane i wynoszą odpowiednio $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\vec{b}-\vec{a}) =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\vec{b}$$



Kombinacja liniowa wektorów

Definicja: Wektor $\vec{b}$ nazywamy liniową kombinacją wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jeśli istnieją stałe $c_1, c_2, \dots, c_n$ takie, że:

$$\vec{b} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$$

Definicja: Mówimy, że wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ są liniowo zależne jeśli istnieją stałe $c_1, c_2, \dots, c_n$, nie wszystkie równe zero, takie że:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = 0$$

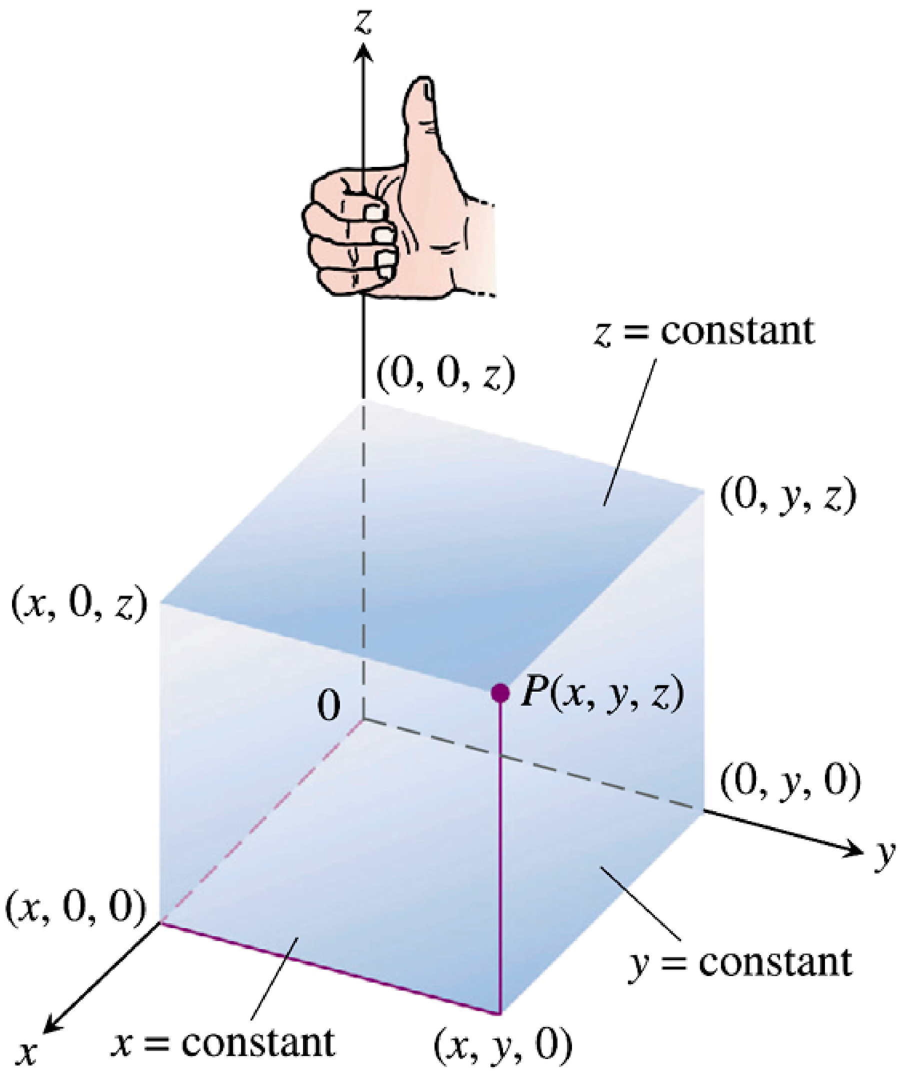
Jeśli powyższa równość zachodzi tylko wtedy gdy wszystkie stałe $c_1, c_2, \dots, c_n$, są jednocześnie równe zero, to o wektorach $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ mówimy, że są liniowo niezależne.

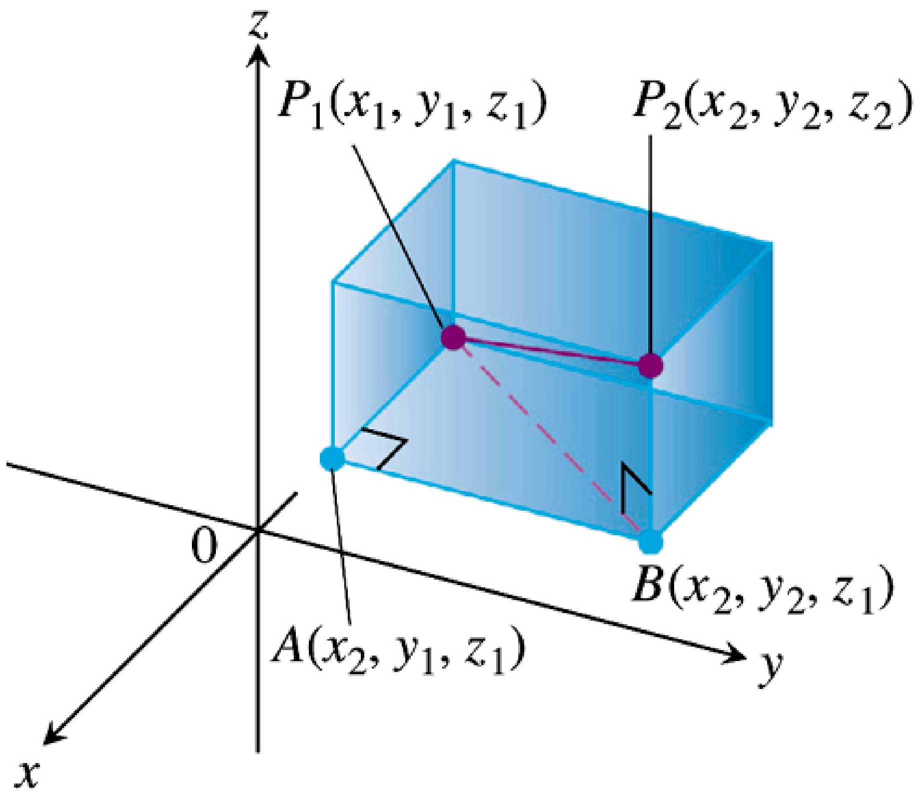
Uwaga: Powyższe operacje można określić dla wektorów w dowolnej liczbie wymiarów.

Własności:

- każdy zbiór m+1 lub więcej m-wymiarowych wektorów jest liniowo zależny.
- jeśli dany zbiór wektorów jest liniowo niezależny, to każdy podzbiór tych wektorów jest również liniowo niezależny.
- każdy zbiór wektorów o tym samym wymiarze, zawierający wektor zerowy, jest liniowo zależny.

Kartezjański układ współrzędnych

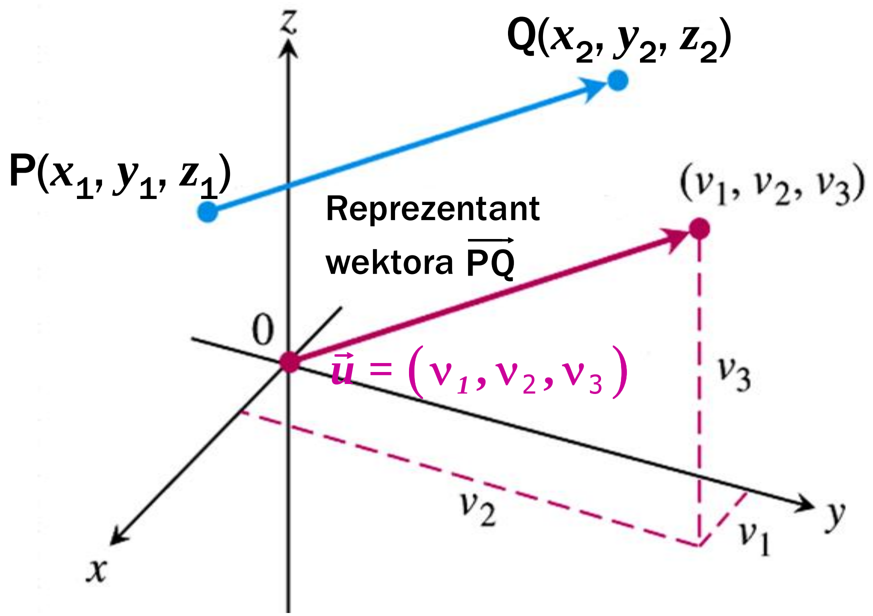


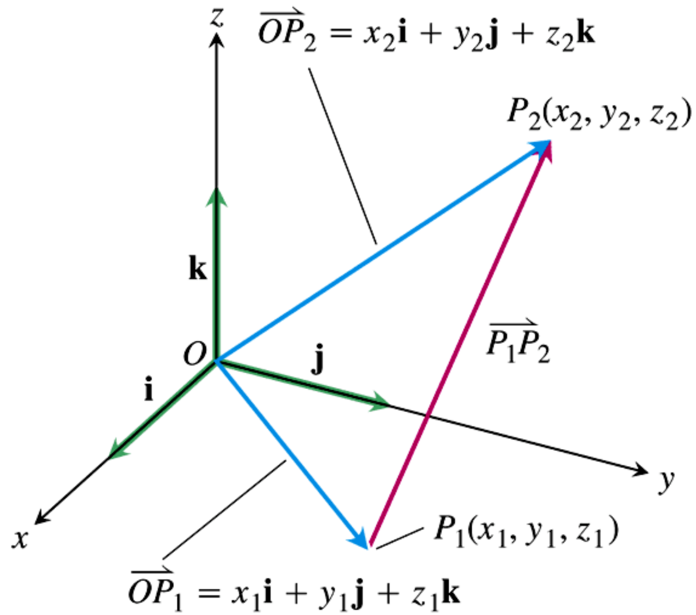


Odległość pomiędzy punktami P_1 i P_2 znajdujemy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Współrzędne wektora i wektory bazowe





Dysponując trzema różnymi wektorami, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, nie leżącymi w jednej płaszczyźnie, można w trójwymiarowej przestrzeni dowolny wektor $\vec{a}$ zapisać jako kombinację tych wektorów:

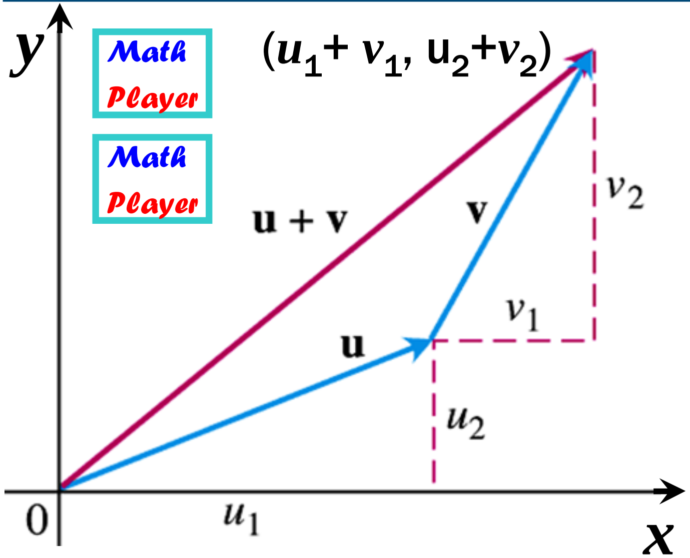
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$$

$$\boxed{\hat{\vec{e}}_i \equiv \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}}$$

Wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nazywamy bazą w przestrzeni $\mathcal{R}^3$, natomiast skalary a_1, a_2, a_3 to współrzędne wektora $\vec{a}$ w tej bazie. Mówimy, że wektor został rozłożony na składowe.

Dla współrzędnych kartezjańskich w $\mathcal{R}^3$ stosujemy oznaczenia: $\hat{\vec{e}}_1 \equiv \vec{i}$ $\quad \hat{\vec{e}}_2 \equiv \vec{j}$ $\quad \hat{\vec{e}}_3 \equiv \vec{k}$

Algebra wektorów na współrzędnych



Dodawanie i odejmowanie wektorów:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \pm \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$
$$= \left(a_x \pm b_x\right)\vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{j} + \left(a_z \pm b_z\right)\vec{k}$$

Wygodny sposób zapisu wektora:

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) \quad \text{lub} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Długość (moduł) wektora: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Mnożenie wektora przez liczbę: $\lambda\vec{a} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right)$

$\Rightarrow$ wektor jednostkowy: $\hat{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$

<u>Przykład:</u> Dane są wektory $\vec{v}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ oraz $\vec{v}_2 = -\vec{i} - 2\vec{k}$. Znajdź ich sumę, moduł sumy i wektor jednostkowy o tym samym kierunku i zwrocie co wektor $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \left(\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}\right) + \left(-\vec{i} - 2\vec{k}\right) = 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

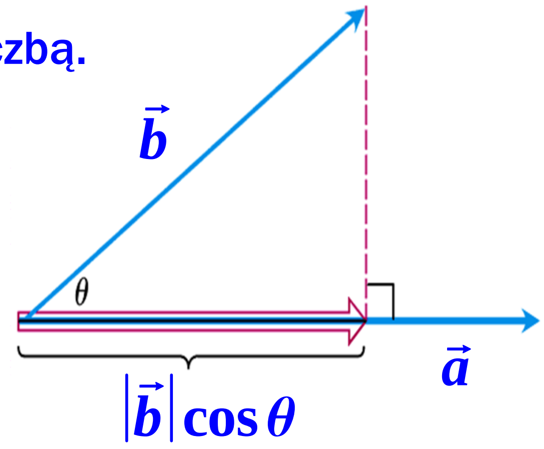
$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{czyli} \quad \hat{\vec{u}} = \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Iloczyn skalarny wektorów

Definicja: Iloczynem skalarnym dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy liczbę:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Uwaga: W dowolnej liczbie wymiarów iloczyn skalarny jest liczbą.

Własności:

- przemienny: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- liniowy w każdym z argumentów $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$:

$$\vec{a}\cdot\left(\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right) = \alpha\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta\vec{a}\cdot\vec{c}$$

- Dwa niezerowe wektory są ortogonalne (prostopadłe) jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Przykład: Wektory bazowe w układzie kartezjańskim spełniają relacje:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

Obliczanie iloczynu skalarnego:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)\cdot\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i$$

Długość wektora: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

Iloczyn skalarny wektorów

Przykład: Znajdź kąt pomiędzy wektorami $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ oraz $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20 \\ |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{20}{\sqrt{14}\sqrt{19}} \approx 0.9926 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0.12 \text{ rad}$$

Cosinusy kierunkowe wektorów:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}\frac{b_x}{|\vec{b}|} + \frac{a_y}{|\vec{a}|}\frac{b_y}{|\vec{b}|} + \frac{a_z}{|\vec{a}|}\frac{b_z}{|\vec{b}|}$$

wielkości $a_i / |\vec{a}|$ oraz $b_i / |\vec{b}|$ gdzie $i = x, y, z$ to cosinusy kierunkowe wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Delta Kroneckera ($i, j = 1, 2$):

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j \equiv \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

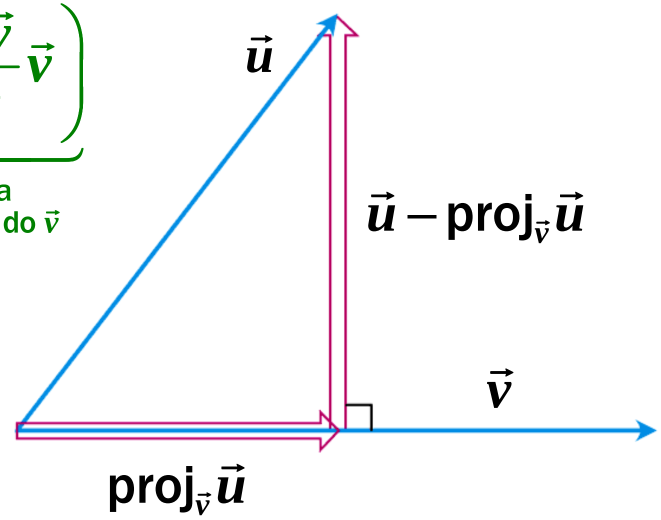
Składowe wektorów w bazie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_j = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \vec{e}_k \right) \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{n} u_k \left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j \right) = \sum_{k=1}^{n} u_k \delta_{kj} = u_j$$

Rozkład wektora na dowolne składowe

<u>Przykład:</u> Rozłożyć wektor $\vec{u}$ na składowe: równoległą i prostopadłą do wektora $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} + \left(\vec{u} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\right) = \underbrace{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}}_{\text{skladowa rownolegla do } \vec{v}} + \underbrace{\left(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}\right)}_{\text{skladowa prostopadla do } \vec{v}}$$



gdzie rzut wektora $\vec{u}$ na wektor $\vec{v}$ dany jest przez:

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta w 2-dim:

Rozważmy dowolną bazę $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ w 2-dim przestrzeni. Chcemy utworzyć takie kombinacje liniowe tych wektorów aby otrzymane wektory były ortonormalne.

Jako pierwszy wektor poszukiwanej bazy wybieramy: $\hat{e}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}$

Drugi wektor otrzymujemy odejmując od $\vec{a}_2$ jego rzut na wektor $\hat{e}_1$:

$$\hat{e}_2' = \vec{a}_2 - \left(\vec{a}_2\cdot\hat{e}_1\right)\hat{e}_1 \qquad \text{i odpowiednio normalizując do} \qquad \hat{e}_2 = \frac{\vec{e}_2'}{|\vec{e}_2'|}$$

Permutacje

Definicja: Permutacją zbioru liczb $\{1,2,\ldots,n\}$ nazywamy dowolną różnowartościową funkcję określoną na tym zbiorze i o wartościach w tym zbiorze.

Uwaga: Liczba wszystkich permutacji wynosi n!

Permutacje zapisujemy w formie tabeli: $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$

Permutacja identycznościowa: $I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

Iloczynem permutacji f i g jest złożenie tych funkcji: $f\circ g(i)\equiv f\left(g(i)\right)$

Przykład: Niech $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Wtedy $f\circ g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ oraz $g\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Definicja: Niech π będzie permutacją określoną na zbiorze $\{1,2,\ldots,n\}$ oraz niech r będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że $\pi^r(i)=i$. Wówczas zbiór r różnych elementów $\left\{\pi^k(i)\right\}_{k=0}^{r-1}$ nazywamy r-wyrazowym cyklem permutacji π.

Permutacje – rozkład na cykle

Math Player

Przykład: $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1374)(25)(68)$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (125)(36748)$$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 6 & 3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = (15387)(2)(46)$$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = (1374)(25)(68)(125)(36748) = (15387)(2)(46)$$

Dwa cykle $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ oraz $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ nazywamy rozłącznymi jeżeli zbiory liczb $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ oraz $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ nie mają elementów wspólnych.

Twierdzenie: Każdą permutację można rozłożyć na iloczyn rozłącznych cykli.

Definicja: Permutację π w której jeden cykl ma długość r, a pozostałe mają tylko po jednym elemencie, nazywamy **permutacją cykliczną** o długości r.

Definicja: Permutację cykliczną o długości 2 nazywamy **transpozycją**.

Przykład: $\pi_1 = (143)(24)(356) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (142356)$

Parzystość permutacji

Twierdzenie: Dowolny cykl o długości r można rozłożyć na $r-1$ transpozycji:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_r) = (i_1, i_r)(i_1, i_{r-1}) \ldots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$$

Uwaga: Chociaż rozkład na transpozycje nie jest jednoznaczny, to można pokazać, że parzystość rozkładu (tzn. czy liczba transpozycje jest parzysta czy nie) jest jednoznaczna.

$$(1234) = (14)(13)(12) = (14)\underbrace{(34)(34)}_{1}\overbrace{(23)\underbrace{(12)(12)}_{1}(23)}^{1}(13)(12)$$

Twierdzenie: Dowolna permutacja może być rozłożona na iloczyn transpozycji. Parzystość rozkładu jest jednoznacznie określona.

Definicja: Permutację nazywamy parzystą (nieparzystą) jeśli może być rozłożona na iloczyn parzystej (nieparzystej) liczby transpozycji.

Określenie: Nieporządkiem w permutacji π nazywamy każdą parę liczb i, j taką że $i < j$ oraz $\pi(i) > \pi(j)$. A więc parzystość permutacji można określić zliczając nieporządki:

$$\prod_{i<j} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} = \begin{cases} +1 & \text{parzysta} \\ -1 & \text{nieparzysta} \end{cases}$$

Symbol całkowicie antysymetryczny

Definicja: Symbolem całkowicie antysymetrycznym w n wymiarach nazywamy:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{jeżeli permutacja } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{ jest permutacją parzystą} \\ -1 & \text{jeżeli jest permutacją nieparzystą} \\ 0 & \text{jeżeli nie wszystkie liczby są różne} \end{cases}$$

Wybrane własności (dowody przez pokazanie, że $L_{ijk\ldots} = P_{ijk\ldots}$ dla wszystkich $i,j,k, \ldots$):

- 2-dim: $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ $\quad \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = \delta_{ij}$ $\quad \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 2$
- 3-dim:

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad \sum_{j,k=1}^{2} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \qquad \sum_{i,j,k=1}^{2} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3!$$

- 4-dim:

$$\sum_{k,s=1}^{4} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{lmks} = 2\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \qquad \sum_{j,k,s=1}^{2} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{ljks} = 3!\delta_{il} \qquad \sum_{i,j,k,s=1}^{2} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{ijks} = 4!$$

- n-dim: Math Player

Iloczyn zewnętrzny w $\mathcal{R}^2$

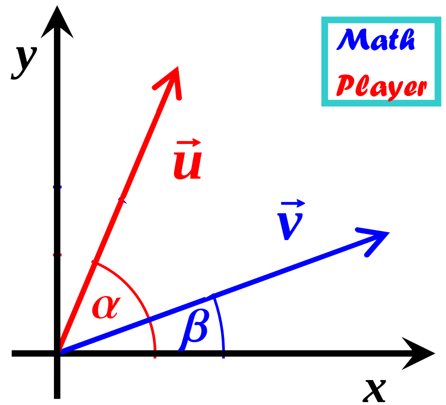
Iloczyn zewnętrzny dwóch wektorów jest obiektem, którego rodzaj zależy od liczby wymiarów. Na płaszczyźnie iloczyn zewnętrzny jest liczbą.

<u>Definicja:</u> Iloczyn zewnętrzny wektorów w 2D przestrzeni Euklidesa to liczba:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{j,k=1}^{2} \varepsilon_{jk} u_j v_k = u_1 v_2 - u_2 v_1 =$$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|(\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta) =$$

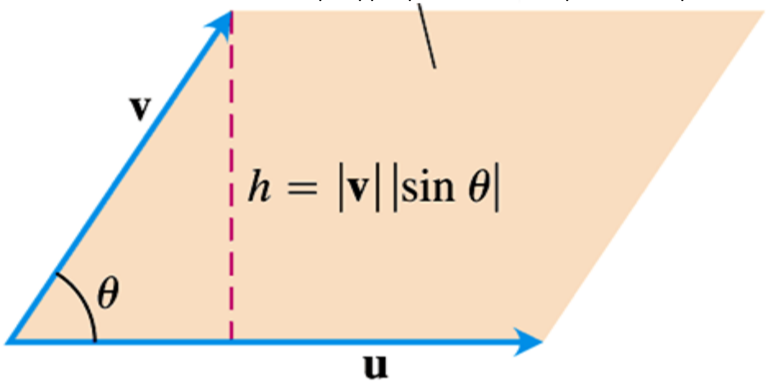
$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\alpha - \beta) = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\gamma$$



<u>Interpretacja geometryczna:</u>

Powierzchnia

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$



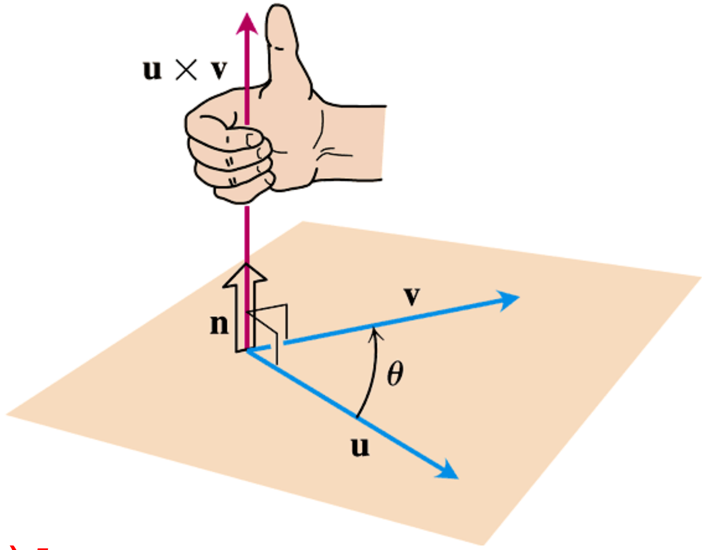
<u>Własności iloczynu zewnętrznego w 2D:</u>

- antysymetryczny: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- liniowy (α, $\beta \in \mathbb{R}$): $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$
- określa skrętność układu: $\hat{\vec{e}}_1 \wedge \hat{\vec{e}}_2 = 1$

Iloczyn zewnętrzny (wektorowy) w $\mathcal{R}^3$

Definicja: Iloczynem wektorowym dwóch wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor o składowych:

$$(\vec{u}\times\vec{v})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$



Iloczyn wektorowy jest wektorem prostopadłym do obu wektorów składowych i ma wartość:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

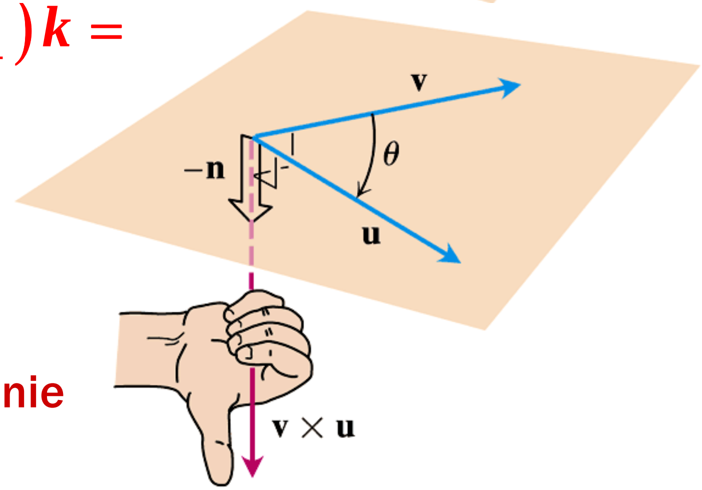
Math Player

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k =$$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\gamma\ \vec{n}$$

γ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$\vec{n}$ – wektor jednostkowy, prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



Uwaga: Dowód powyższej równości przez przedstawienie składowych za pomocą cosinusów kierunkowych.

Iloczyn wektorowy w $\mathcal{R}^3$

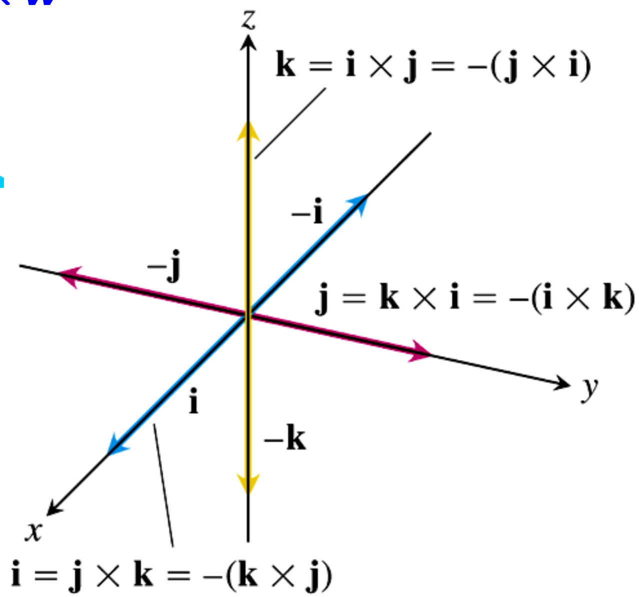
Iloczyn wektorowy jest wektorem ortogonalnym do każdego z wektorów składowych:

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \sum_{i=1}^{3} u_i \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_i u_j v_k = 0$$

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$$

<u>Własności:</u>

- antysymetryczny: $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{u}\times\vec{u} = 0$
- liniowy ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$): $\vec{u}\times\left(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}\right) = \alpha\vec{u}\times\vec{v}+\beta\vec{u}\times\vec{w}$
- określa skrętność układu:
- $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$



<u>Przykład:</u> Pokaż, że jeśli $\vec{a} = \vec{b} + \lambda\vec{c}$ dla pewnej $\lambda \in \mathbb{R}$, wtedy $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c}$

$$\vec{a}\times\vec{c} = \left(\vec{b}+\lambda\vec{c}\right)\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c}+\lambda\vec{c}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c}$$

<u>Uwaga:</u> Z powyższego <u>nie wynika</u> że $\vec{a} = \vec{b}$

Iloczyn mieszany wektorów

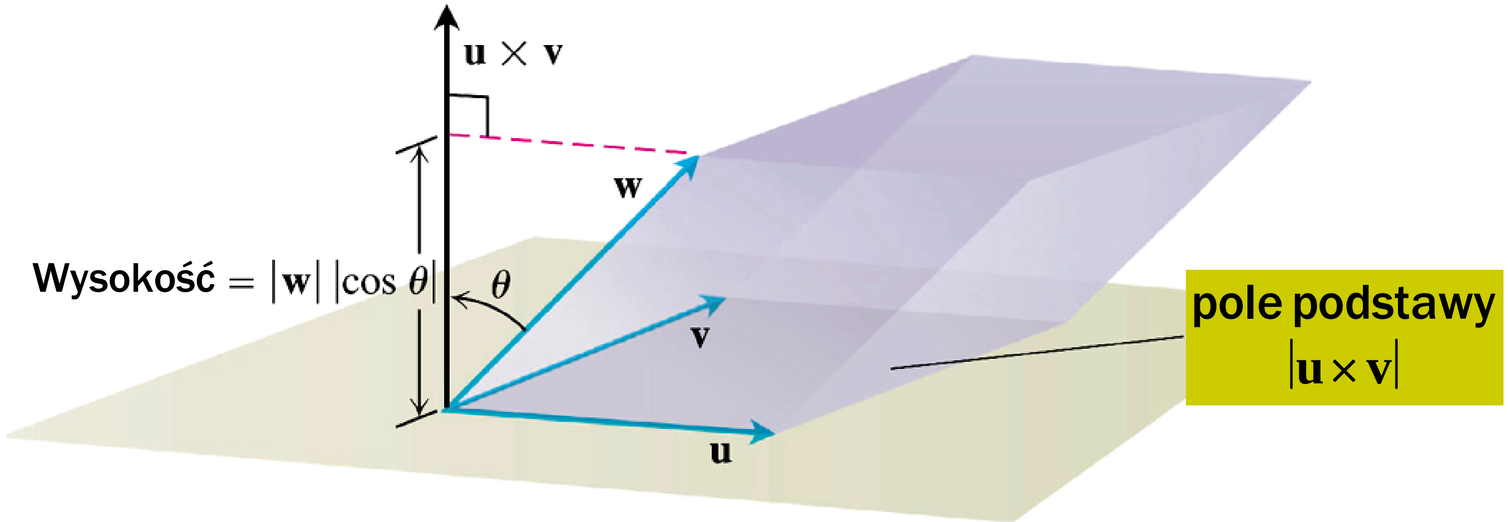
Iloczyn mieszany: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$

$$= u_1\left(v_2 w_3 - v_3 w_2\right) + u_2\left(v_3 w_1 - v_1 w_3\right) + u_3\left(v_1 w_2 - v_2 w_1\right)$$

Własności:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = -\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v}) = -\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = -\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})$$

Interpretacja geometryczna: $\left|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\right|$ jest objętością równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$ oraz $\vec{w}$.



Podwójny iloczyn wektorowy

Podwójny iloczyn wektorowy: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

Własności:

(a) jest ortogonalny do $(\vec{v}\times\vec{w})$ tzn. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ przy czym α, β nie zależą od $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

(b) jest liniowy w składowych $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

(c) jest ortogonalny do $\vec{u}$

(a)+(c) $\Rightarrow$ $\alpha(\vec{v}\cdot\vec{u})+\beta(\vec{w}\cdot\vec{u})=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = c(\vec{w}\cdot\vec{u}), \quad \beta = -c(\vec{v}\cdot\vec{u})$

gdzie c nie zależy od $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{e}_1\times(\hat{e}_1\times\hat{e}_2) = \hat{e}_1\times\hat{e}_3 = -\hat{e}_2 \\ (\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2)\hat{e}_1 - (\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1)\hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c = +1$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$$

Wprost z definicji iloczynów skalarnego i wektorowego:

$$\left(\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}u_j\sum_{l,m=1}^{3}\varepsilon_{klm}v_l w_m = \sum_{j,l,m=1}^{3}u_j v_l w_m\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} =$$

$$= \sum_{j,l,m=1}^{3}u_j v_l w_m\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) = \left(\sum_{j=1}^{3}u_j w_j\right)v_i - \left(\sum_{j=1}^{3}u_j v_j\right)w_i$$

czyli $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$ oraz $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

Prawdziwa jest więc tożsamość: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) + \vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}) + \vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$