

Matematyczne Metody FIZYKI I

Wykład 2

Pierwiastek z liczby zespolonej

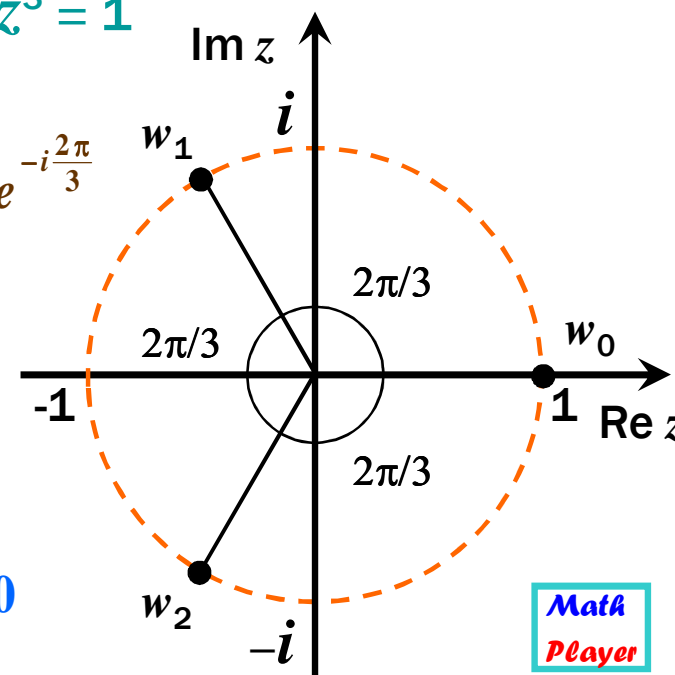
Twierdzenie: Istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n -tego stopnia z każdej liczby zespolonej różnej od zera, tzn. rozwiązań równania $w^n = z$ i wszystkie te pierwiastki dają się zapisać wzorem, w którym $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{|z|} \exp \left(i \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

Math
Player

Przykład: Znajdź wszystkie rozwiązania równania $z^3 = 1$

$$w_k = \sqrt[3]{1} \exp \left(i \frac{0 + 2k\pi}{3} \right) = \begin{cases} k=0 & k=1 & k=2 \\ w_0 = 1 & w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} & w_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$



Math
Player

Własności pierwiastka n -tego stopnia z l.z. 1:

- $\omega_k = \exp \left(i \frac{2k\pi}{n} \right)$ gdzie $k = 0, 1, \dots, n-1$
- $\omega_k \omega_l = \omega_{k+l}$ $\omega_k = (\omega_1)^k$ $(\omega_1)^n = 1$
- $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp \left(i \frac{2\pi}{n} \right) \right)^k = \frac{e^{i2\pi} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0$

Zespólny logarytm i zespólna potęga

Definicja: Logarytmem naturalnym z liczby zespolonej z (ozn. $\text{Ln}(z)$) nazywamy liczbę zespoloną w taką, że $z = e^w$.

$$\blacksquare \quad z_1 z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2} \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}(z_1 z_2) = w_1 + w_2 = \text{Ln}(z_1) + \text{Ln}(z_2)$$

Zapiszemy liczbę z w postaci wykładniczej i znajdziemy jej logarytm:

Math
Player

$$z = |z| \exp \left[i \left(\text{Arg}(z) + 2k\pi \right) \right] \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}(z) = \text{Ln}|z| + i \left(\text{Arg}(z) + 2k\pi \right)$$

Przykład: $\text{Ln}(-i) = \text{Ln} \left(\exp \left(i \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right) \right) = i \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = -i\frac{\pi}{2}, \quad i\frac{3\pi}{2}, \quad i\frac{7\pi}{2}, \dots$

Definicja: Niech z i $w \in \mathbb{C}$. Potęgą liczby $z = |z|e^{i\varphi}$ (gdzie faza $\varphi = \text{Arg}(z) + 2k\pi$)

o wykładniku w nazywamy wielkość $z^w = \exp(w \text{Ln}(z)) = |z|^w \exp(i\varphi w)$ gdzie

$$|z|^w = |z|^{\text{Re } w} |z|^{i \text{Im } w} = |z|^{\text{Re } w} e^{i \text{Im } w \text{Ln}|z|} \quad \text{oraz} \quad e^{i\varphi w} = e^{-\varphi \text{Im } w} e^{i\varphi \text{Re } w}$$

A więc: $|z^w| = |z|^{\text{Re } w} e^{-\varphi \text{Im } w}$ oraz $\arg(z^w) = \text{Ln}|z| \text{Im } w + \varphi \text{Re } w$

Przykład: Oblicz $z = i^{-2i}$

$$z = e^{\text{Ln } z} = e^{-2i \text{Ln } i} = \exp \left[-2i \text{Ln} e^{i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)} \right] = \exp \left[-2i \cdot i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] = e^{\pi + 4k\pi}$$

F. trygonometryczne zmiennej zespolonej

Definicja: Korzystając z postaci biegunowej i trygonometrycznej liczby zespolonej możemy zdefiniować funkcje sinus i cosinus w następujący sposób:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

Uwaga: Definicje te spełniają wszystkie tożsamości trygonometryczne.

Definicja: W analogiczny sposób **definiujemy** sinus i cosinus liczby zespolonej:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

Uwaga: Także te definicje spełniają wszystkie standardowe wzory trygonometryczne, np.:

$$\sin(-z) = -\sin z \quad \cos(-z) = \cos z \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})^2 = \frac{1}{2}(e^{i2z} + e^{-i2z}) = \cos 2z$$

Interpretacja funkcji zespolonej $\sin z$:

$$\begin{aligned} \sin z = \sin(x + iy) &= \frac{1}{2i}(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = \frac{1}{2i}[e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x + i \sin x)] = \\ &= \sin x \left[\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \right] + i \cos x \left[\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \right] = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

Math
Player

Funkcje hiperboliczne zmiennej zespolonej

Definicja: Funkcje hiperboliczne zdefiniowane są w następujący sposób:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Własności funkcji hiperbolicznych:

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh x & \cosh(-x) &= \cosh x & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x & \cosh^2 x + \sinh^2 x &= \cosh 2x & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned}$$

Definicja: W analogiczny sposób definiujemy sinus i cosinus hiperboliczny liczby zespolonej:

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$



Uwaga: Istnieją następujące związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi zmiennej zespolonej:

$$\sin iz = i \sinh z \quad \cos iz = \cosh z \quad \sinh iz = i \sin z \quad \cosh iz = \cos z$$

Przykład: Oblicz $\cos(\pi - i)$

$$\cos(\pi - i) = \cos \pi \cosh(-1) - i \sin \pi \sinh(-1) = -\cosh(-1) = -\cosh 1 \approx -1.543$$

Relacje równoważności i klasy

Definicja: Relacją określoną na zbiorze A nazywamy dowolny test porównawczy pomiędzy uporządkowanymi parami elementów elementó w zbioru A . Jeśli para $(a, b) \in A \times A$ spełnia ten test, mówimy, że a pozostaje w relacji do b , ($a \triangleright b$).

Definicja: Relacją równoważności określoną na zbiorze A nazywamy relację która jest:

- zwrotna: $\forall a \in A, a \triangleright a$
- symetryczna: $a, b \in A, a \triangleright b \Rightarrow b \triangleright a$
- przechodnia: $a, b, c \in A, (a \triangleright b) \wedge (b \triangleright c) \Rightarrow a \triangleright c$

O elementach $a, b \in A$ mówimy wówczas, że „ a jest równoważne b ”

Definicja: Klasą równoważności elementu $a \in A$ nazywamy zbiór wszystkich elementów A pozostających w relacji równoważności z a , $[[a]] = \{b \in A : b \triangleright a\}$

Twierdzenie: Jeśli \triangleright jest relacją równoważności na A oraz $a, b \in A$ wtedy albo

$$[[a]] \cap [[b]] = \emptyset \quad \text{albo} \quad [[a]] = [[b]]$$

a więc dowolny element klasy można wybrać jako reprezentanta tej klasy.

Przykład: A – zbiór ludzi: $a \triangleright b$ - „ a jest starszy od b ” – nie jest relacją równoważności.

$a \triangleright b$ - „ a i b mają tego samego dziadka ze strony ojca” – jest relacją równoważności.

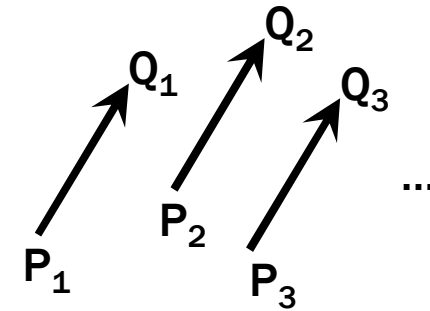
Algebra wektorów

Definicja: Skalar to wielkość fizyczna, która posiada tylko wartość (liczba).

np. temperatura, czas, masa, ...

Definicja: Wektor to klasa równoważności par punktów, czyli zorientowanych odcinków, które przekształcają się w siebie przy przesunięciu równoległym.

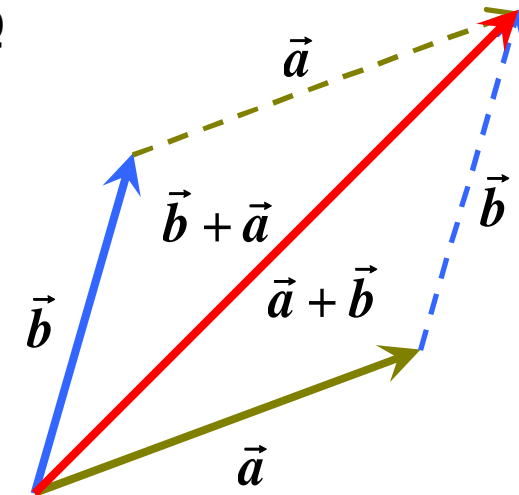
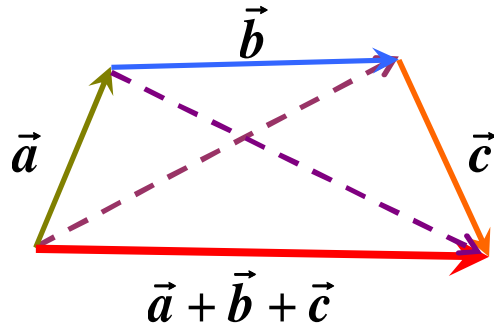
np. wektor położenia, siły, prędkości, ...



Symbole wektorów: \overrightarrow{PQ} \vec{a} a $P \xrightarrow{\vec{a}} Q$

Dodawanie wektorów (reguła równoległoboku):

- przemienność: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- łączność: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



Odejmowanie wektorów: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Algebra wektorów

W wyniku mnożenia wektora przez liczbę rzeczywistą otrzymujemy wektor o tym samym kierunku co wektor oryginalny i proporcjonalnej długości:

$$P \xrightarrow{\vec{a}} Q \quad P \xleftarrow{-\vec{a}} Q \quad P \xrightarrow{\lambda\vec{a}} Q' \quad |\overrightarrow{PQ'}| = \lambda |\overrightarrow{PQ}|$$

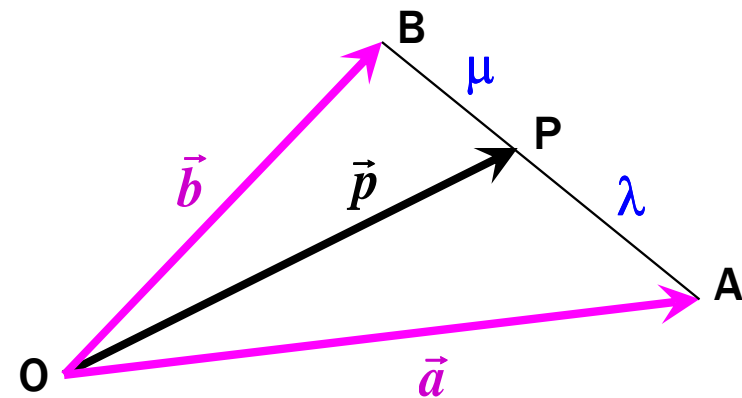
Własności: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

Przykład: Niech punkt P dzieli odcinek AB w stosunku $\lambda : \mu$. Znajdź wektor położenia punktu P jeśli wektory położenia punktów A i B są znane i wynoszą odpowiednio \vec{a} i \vec{b} .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = \vec{p} &= \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\vec{b} - \vec{a}) = \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \vec{b} \end{aligned}$$



Kombinacja liniowa wektorów

Definicja: Wektor \vec{b} nazywamy **liniową kombinacją wektorów** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jeśli istnieją stałe c_1, c_2, \dots, c_n takie, że:

$$\vec{b} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n$$

Definicja: Mówimy, że wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ są liniowo zależne jeśli istnieją stałe c_1, c_2, \dots, c_n , nie wszystkie równe zero, takie że:

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \mathbf{0}$$

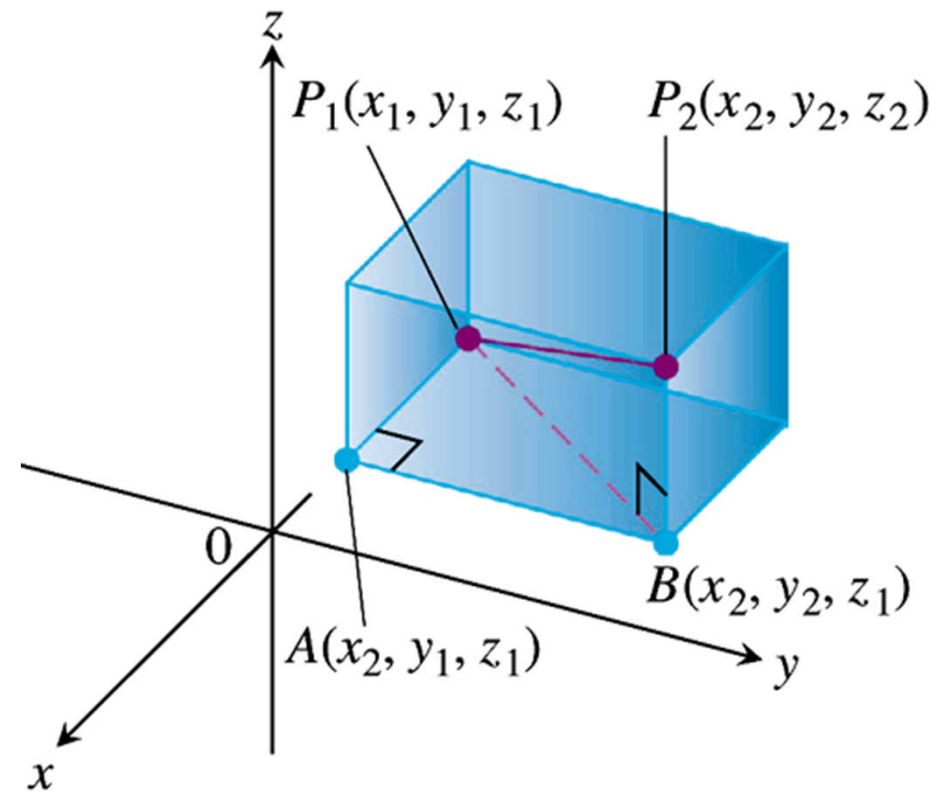
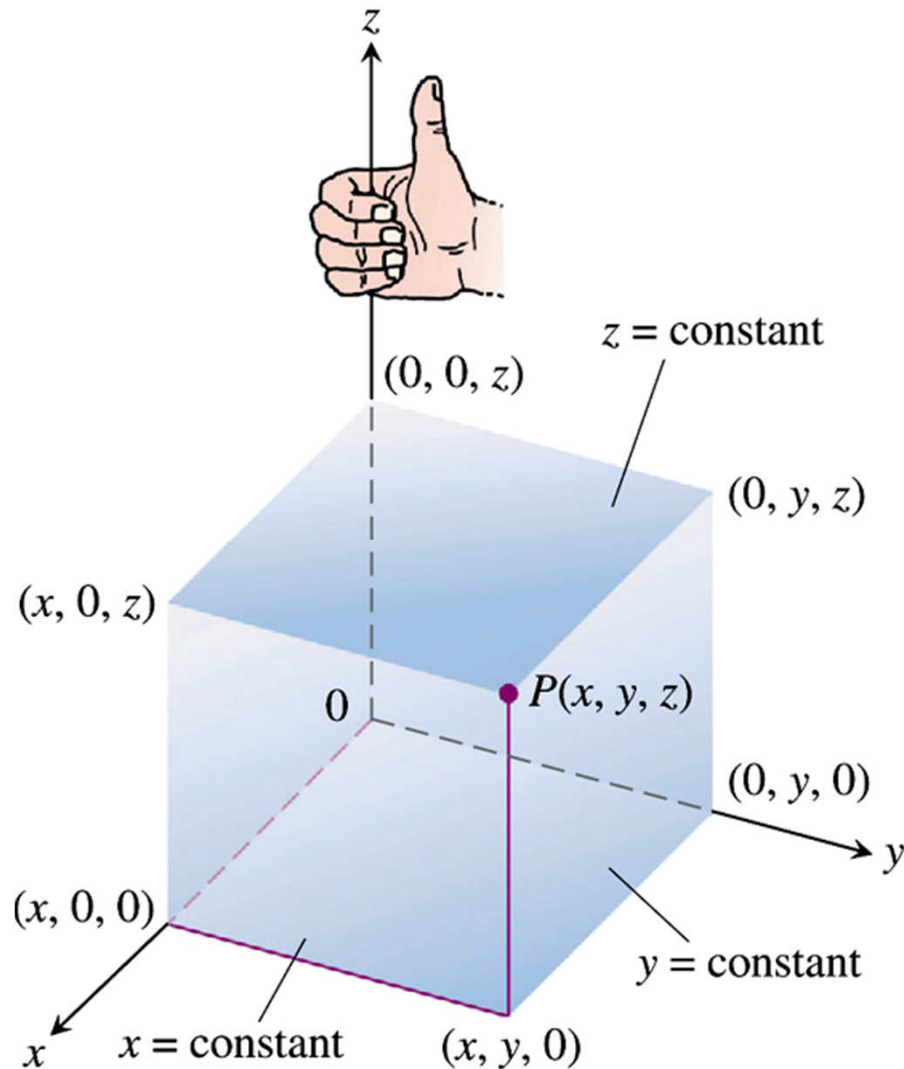
Jeśli powyższa równość zachodzi tylko wtedy gdy wszystkie stałe c_1, c_2, \dots, c_n , są jednocześnie równe zero, to o wektorach $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ mówimy, że są **liniowo niezależne**.

Uwaga: Powyższe operacje można określić dla wektorów w dowolnej liczbie wymiarów.

Własności:

- każdy zbiór $m+1$ lub więcej m -wymiarowych wektorów jest liniowo zależny.
- jeśli dany zbiór wektorów jest liniowo niezależny, to każdy podzbiór tych wektorów jest również liniowo niezależny.
- każdy zbiór wektorów o tym samym wymiarze, zawierający wektor zerowy, jest liniowo zależny.

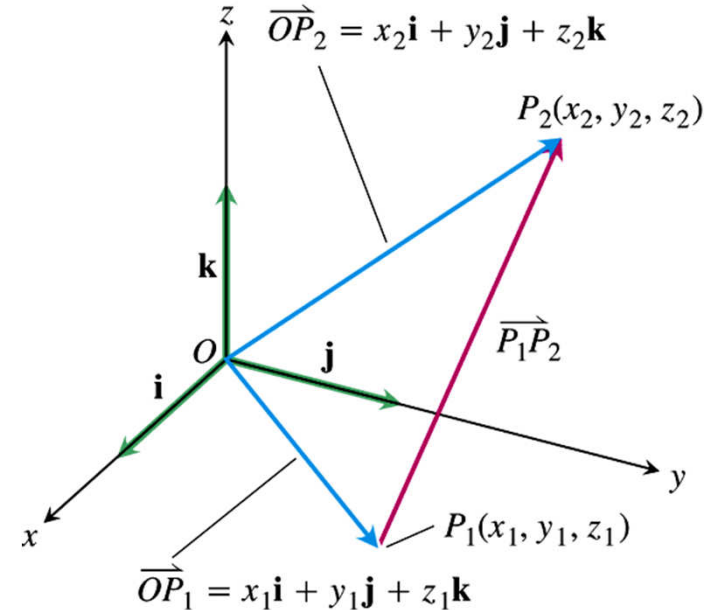
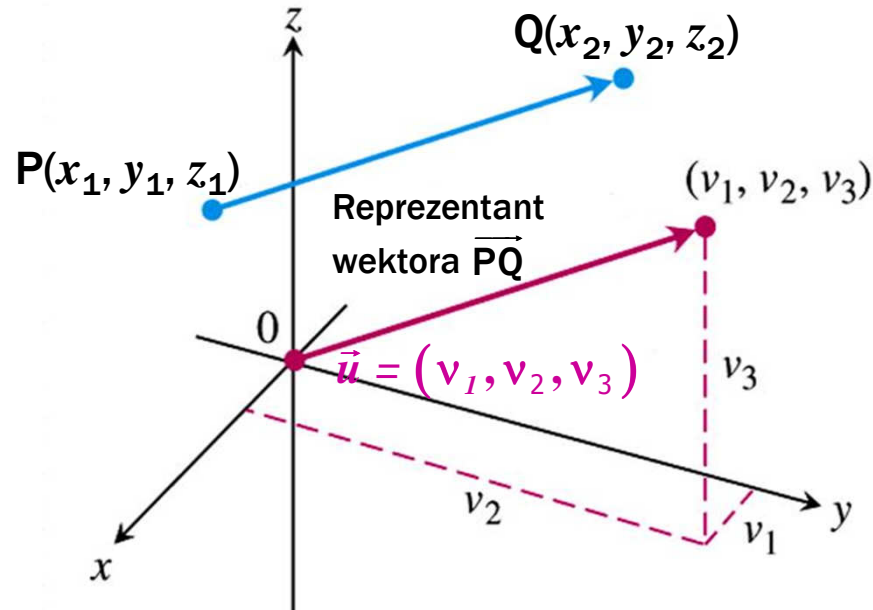
Kartezjański układ współrzędnych



Odległość pomiędzy punktami P_1 i P_2 znajdujemy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Współrzędne wektora i wektory bazowe



Dysponując trzema różnymi wektorami, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, nie leżącymi w jednej płaszczyźnie, można w trójwymiarowej przestrzeni dowolny wektor \vec{a} zapisać jako kombinację tych wektorów:

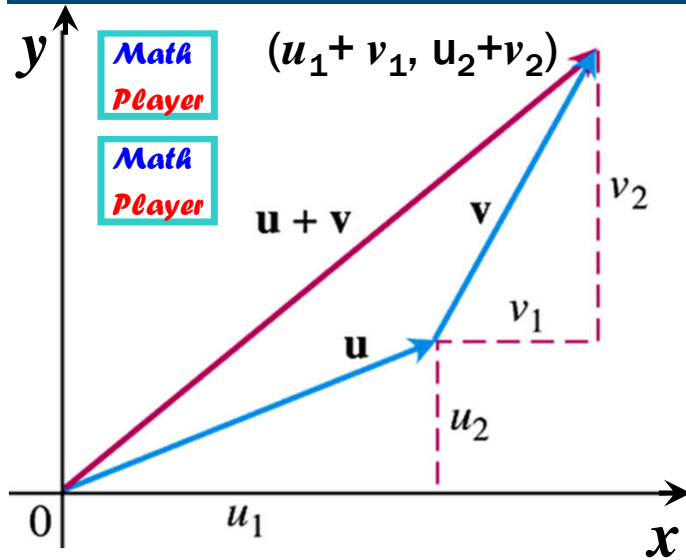
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\vec{e}_i$$

$$\hat{e}_i \equiv \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$$

Wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nazywamy bazą w przestrzeni \mathcal{R}^3 , natomiast skalary a_1, a_2, a_3 to współrzędne wektora \vec{a} w tej bazie. Mówimy, że wektor został rozłożony na składowe.

Dla współrzędnych kartezjańskich w \mathcal{R}^3 stosujemy oznaczenia: $\hat{e}_1 \equiv \vec{i}$ $\hat{e}_2 \equiv \vec{j}$ $\hat{e}_3 \equiv \vec{k}$

Algebra wektorów na współrzędnych



Dodawanie i odejmowanie wektorów:

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \pm (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k} \end{aligned}$$

Wygodny sposób zapisu wektora:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \text{lub} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Długość (moduł) wektora: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Mnożenie wektora przez

liczbę: $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \Rightarrow$ wektor jednostkowy: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right)$

Przykład: Dane są wektory $\vec{v}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ oraz $\vec{v}_2 = -\vec{i} - 2\vec{k}$. Znajdź ich sumę, moduł sumy i wektor jednostkowy o tym samym kierunku i zwrocie co wektor $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) + (-\vec{i} - 2\vec{k}) = 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{czyli} \quad \hat{u} = \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Iloczyn skalarny wektorów

Definicja: Iloczynem skalarnym dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywamy liczbę:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami \vec{a} i \vec{b} .

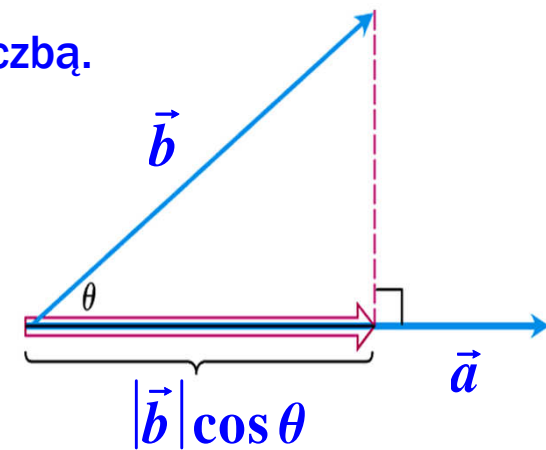
Uwaga: W dowolnej liczbie wymiarów iloczyn skalarny jest liczbą.

Własności:

- przemienny: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- liniowy w każdym z argumentów ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\vec{a} \cdot (\alpha \vec{b} + \beta \vec{c}) = \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} + \beta \vec{a} \cdot \vec{c}$$

- Dwa niezerowe wektory są ortogonalne (prostopadłe) jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



Przykład: Wektory bazowe w układzie kartezjańskim spełniają relacje:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Obliczanie iloczynu skalarnego:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

Długość wektora: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Iloczyn skalarny wektorów

Przykład: Znajdź kąt pomiędzy wektorami $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ oraz $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20 \\ |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \theta = \frac{20}{\sqrt{14} \sqrt{19}} \approx 0.9926 \Rightarrow \theta = 0.12 \text{ rad}$$

Cosinusy kierunkowe wektorów:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{a_y b_y}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{a_z b_z}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

wielkości $a_i / |\vec{a}|$ oraz $b_i / |\vec{b}|$ gdzie $i = x, y, z$ to **cosinusy kierunkowe** wektorów \vec{a} i \vec{b} .

Delta Kroneckera ($i, j = 1, 2$): $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j \equiv \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$

Składowe wektorów w bazie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_j = \left(\sum_{k=1}^n u_k \vec{e}_k \right) \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^n u_k (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j) = \sum_{k=1}^n u_k \delta_{kj} = u_j$$

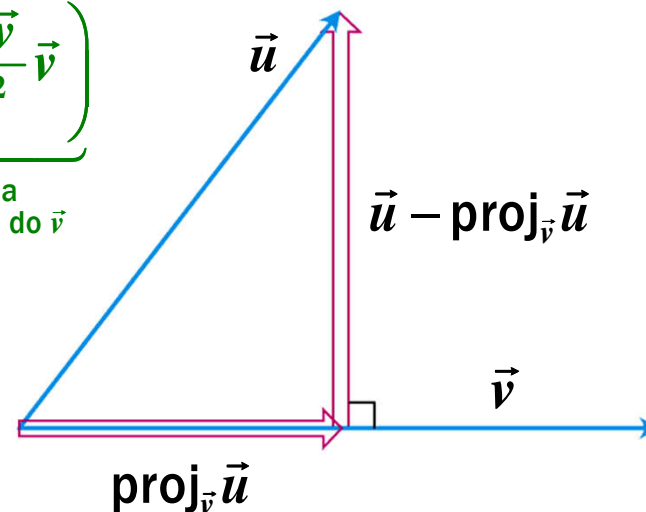
Rozkład wektora na dowolne składowe

Przykład: Rozłożyć wektor \vec{u} na składowe: równoległą i prostopadłą do wektora \vec{v} .

$$\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + (\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}) = \underbrace{\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}}_{\text{składowa równoległa do } \vec{v}} + \underbrace{\left(\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \right)}_{\text{składowa prostopadła do } \vec{v}}$$

gdzie rzut wektora \vec{u} na wektor \vec{v} dany jest przez:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = |\vec{u}| \cos \theta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$



Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta w 2-dim:

Rozważmy dowolną bazę $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ w 2-dim przestrzeni. Chcemy utworzyć takie kombinacje liniowe tych wektorów aby otrzymane wektory były ortonormalne.

Jako pierwszy wektor poszukiwanej bazy wybieramy: $\hat{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}$

Math
Player

Drugi wektor otrzymujemy odejmując od \vec{a}_2 jego rzut na wektor \hat{e}_1 :

$$\vec{e}'_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 \quad \text{i odpowiednio normalizując do} \quad \hat{e}_2 = \frac{\vec{e}'_2}{|\vec{e}'_2|}$$