Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 3

Pojęcie przestrzeni wektorowej

Definicja: Zbiór V nazywamy **przestrzenią wektorową (liniową)** nad ciałem liczbowym Q = $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, jeśli zdefiniowane są dwa wzajemnie uzgodnione działania na jego elementach (wektorach): dodawanie oraz mnożenie przez liczby z Q.

Dodawanie przyporządkowuje każdej parze $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in V$ pewien element V oznaczany jako $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}$, przy czym są spełnione następujące aksjomaty:

- $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}}$
- $(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{w}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}})$
- istnieje wektor zerowy $\vec{0} \in V$ taki, że $\vec{0} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla dowolnego $\vec{\mathbf{v}} \in V$
- dla każdego $\vec{\mathbf{v}} \in V$ istnieje wektor przeciwny $-\vec{\mathbf{v}} \in V$ taki, że $\vec{\mathbf{v}} + (-\vec{\mathbf{v}}) = \vec{0}$

Mnożenie przez liczbę $c \in$ Q przyporządkowuje każdemu elementowi $\vec{\mathbf{v}} \in V$ pewien element $c\vec{\mathbf{v}} \in V$ przy czym są spełnione następujące aksjomaty:

- $(c_1 c_2)\vec{\mathbf{v}} = c_1(c_2\vec{\mathbf{v}})$
- istnieje liczba 1 ∈ Q taka, że $1\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla dowolnego $\vec{\mathbf{v}} \in V$
- $0\vec{\mathbf{v}} = \vec{0}$ oraz $c\vec{0} = \vec{0}$

Działania te są uzgodnione, tzn. $c(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = c\vec{\mathbf{v}} + c\vec{\mathbf{w}}$ oraz $(c_1 + c_2)\vec{\mathbf{v}} = c_1\vec{\mathbf{v}} + c_2\vec{\mathbf{v}}$

Baza w przestrzeni wektorowej V

Definicja: Zbiór liniowo niezależnych wektorów $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ należących do przestrzeni wektorowej V nazywamy bazą, jeśli dowolny wektor $\vec{\mathbf{v}} \in V$ może być zapisany w postaci:

$$\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{\mathbf{e}}_i$$

Liczbę n nazywamy wymiarem przestrzeni V i oznaczamy $dimV$.

Twierdzenie: Rozkład wektora na składowe w ustalonej bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ jest jednoznaczny.

Dowód: Niech wektor $\vec{\mathbf{x}}$ ma w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ dwa zestawy współrzędnych x_i oraz y_i:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \\ \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\mathbf{e}}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \left(x_i - y_i\right) \vec{\mathbf{e}}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad x_i = y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, ..., n$$

Uwaga: dowolny zbiór n liniowo niezależnych wektorów tworzy bazę w n wymiarowej przestrzeni wektorowej. W nowej bazie zmieniają się współrzędne wektorów, np. w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_i'\}$ mamy:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{\mathbf{e}}_i'$$

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Oznaczenie: $\vec{\mathbf{v}} \equiv |\vec{\mathbf{v}}\rangle \qquad \langle\vec{\mathbf{v}}| \equiv |\vec{\mathbf{v}}\rangle^*$

Definicja: Iloczynem wewnętrznym (skalarnym) wektorów z przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{C}$ nazywamy przyporządkowanie uporządkowanej parze $(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}})$ dowolnych wektorów $\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}} \in V$ liczby zespolonej, oznaczanej przez $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{w}}\rangle$, jeśli spełnione są następujące warunki:

- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}_1\rangle^*$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1|c\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = c\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$ dla każdego $c \in \mathbb{C}$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}\rangle + \langle\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}\rangle$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}\rangle > 0$ jesli $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{0}$

Wnioski:

- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}\rangle$ jest zawsze liczbą rzeczywistą
- $\langle c\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = c^*\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_1\rangle + \langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$

Uwaga: W przypadku przestrzeni wektorowej na ciałem $\mathbb{R}$ iloczyn skalarny dowolnych dwóch wektorów ma z definicje wartość rzeczywistą.

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Definicja: Mówimy, że wektory $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$ są wzajemnie ortogonalne jeśli $\langle \vec{\mathbf{v}}_1 | \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle = 0$

Wniosek: Jedynym wektorem, który jest ortogonalny sam do siebie jest wektor zerowy $\langle \vec{0} | \vec{0} \rangle = 0$.

Definicja: Długością (modułem) wektora $\vec{\mathbf{v}}$ nazywamy liczbę $|\vec{\mathbf{v}}| \equiv \sqrt{\langle \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{v}} \rangle} \geq 0$

Niech $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\}$ będzie ortonormalną bazą w n wymiarowej przestrzeni wektorowej:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \vec{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\mathbf{e}}_i \qquad \vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} b_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

W takiej ortonormalnej bazie współrzędne wektora $\vec{\mathbf{a}}$ są równe:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_j | \vec{\mathbf{a}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{\mathbf{e}}_j | a_i \hat{\mathbf{e}}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \hat{\mathbf{e}}_j | \hat{\mathbf{e}}_i \rangle = a_j$$

Natomiast iloczyn skalarny wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ dany jest przez:

$$\langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\mathbf{e}}_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i \hat{\mathbf{e}}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i \langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i^* b_j \langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Uogólnienie na przypadek kiedy baza $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ nie jest ortogonalna:

Definicja: Metryką w przestrzeni wektorowej V nazywamy macierz (n^2 liczb):

$$g_{ij} = \langle \vec{\mathbf{e}}_i | \vec{\mathbf{e}}_j \rangle$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ dany jest wówczas przez:

$$\langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{\mathbf{e}}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* b_j \langle \vec{\mathbf{e}}_i | \vec{\mathbf{e}}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* g_{ij} b_j$$

Długość wektora jest zawsze rzeczywista:

$$g_{ij} = g_{ji}^* \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{a}} \rangle^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_i g_{ij}^* a_j^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_j^* g_{ji}^* a_i = \langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{a}} \rangle$$

W przestrzeniach $\mathbb{C}^n$ oraz $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy bazę naturalną $\mathbf{e}_i^k = \delta_i^k$ w której *i*-ty wektor ma wszystkie składowe równe zero z wyjątkiem *k*-tej równej 1.

W przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ często wprowadzamy definicję iloczynu skalarnego odpowiednio w postaci:

$$\langle \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{w}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_{\mathrm{i}} \quad \text{oraz} \quad \langle \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{w}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_{\mathrm{i}}$$

Metoda Grama-Schmidta

Mając dowolną bazę $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\}$ można z niej otrzymać bazę ortonormalną $\{\vec{\mathbf{e}}'_1, \vec{\mathbf{e}}'_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}'_n\}$ stosując metodę Grama-Schmidta. Nową bazę konstruujemy rekurencyjnie:

$$\vec{\mathbf{e}}'_1 = \frac{\vec{\mathbf{e}}_1}{|\vec{\mathbf{e}}_1|}$$

Żądamy aby kolejny wektor był prostopadły do $\vec{\mathbf{e}}'_1$ i miał długość równą 1:

$$\vec{\mathbf{e}}'_2 = \frac{\vec{\mathbf{e}}_2 - \langle \vec{\mathbf{e}}'_1 | \vec{\mathbf{e}}_2 \rangle \vec{\mathbf{e}}'_1}{\left| \vec{\mathbf{e}}_2 - \langle \vec{\mathbf{e}}'_1 | \vec{\mathbf{e}}_2 \rangle \vec{\mathbf{e}}'_1 \right|} \qquad \langle \vec{\mathbf{e}}'_2 | \vec{\mathbf{e}}'_1 \rangle = 0 \qquad \langle \vec{\mathbf{e}}'_2 | \vec{\mathbf{e}}'_2 \rangle = 1$$

W stosunku do kolejnych wektorów żądamy, aby były ortogonalne do wszystkich znalezionych poprzednio i miały jednostkową długość:

$$\vec{\mathbf{e}}'_3 = \frac{\vec{\mathbf{e}}_3 - \langle \vec{\mathbf{e}}'_1 | \vec{\mathbf{e}}_3 \rangle \vec{\mathbf{e}}'_1 - \langle \vec{\mathbf{e}}'_2 | \vec{\mathbf{e}}_3 \rangle \vec{\mathbf{e}}'_2}{\left| \vec{\mathbf{e}}_3 - \langle \vec{\mathbf{e}}'_1 | \vec{\mathbf{e}}_3 \rangle \vec{\mathbf{e}}'_1 - \langle \vec{\mathbf{e}}'_2 | \vec{\mathbf{e}}_3 \rangle \vec{\mathbf{e}}'_2 \right|} \qquad \begin{array}{l} \langle \vec{\mathbf{e}}'_3 | \vec{\mathbf{e}}'_1 \rangle = 0 \\ \langle \vec{\mathbf{e}}'_3 | \vec{\mathbf{e}}'_2 \rangle = 0 \end{array} \qquad \langle \vec{\mathbf{e}}'_3 | \vec{\mathbf{e}}'_3 \rangle = 1$$

Ogólnie stosujemy wzór rekurencyjny:

$$\vec{\mathbf{e}}'_k = \frac{\vec{\mathbf{f}}_k}{|\vec{\mathbf{f}}_k|} \quad \text{gdzie} \quad \vec{\mathbf{f}}_k = \vec{\mathbf{e}}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{\mathbf{e}}'_i | \vec{\mathbf{e}}_k \rangle \vec{\mathbf{e}}'_i$$

Operatory liniowe

Definicja: Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem Q = $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Odwzorowanie $V \ni \vec{\mathbf{v}} \to \hat{\mathbf{A}}\,\vec{\mathbf{v}} \in W$ przestrzeni V w W określone na całej przestrzeni V, nazywamy odwzorowaniem liniowym, jeśli:

$$\hat{\mathbf{A}}\left(c_1\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\vec{\mathbf{v}}_2\right) = c_1\hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{v}}_2$$

dla dowolnych $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in V$ oraz dowolnych $c_1, c_2 \in$ Q.

Uwaga: Odwzorowanie liniowe przeprowadza wektor zerowy w V w wektor zerowy w W.

Definicja: Jądrem odwzorowania liniowego nazywamy przeciwobraz wektora zerowego z przestrzeni W: $\mathrm{Ker}\,\hat{\mathbf{A}} = \left\{\vec{\mathbf{v}} \in V : \hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}_W \in W\right\}$

Definicja: W przypadku gdy $W = V$, odwzorowanie liniowe nazywamy operatorem liniowym w V.

Własności operatorów liniowych:

- $\left(\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\right)\vec{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{v}}$
- $\left(c\hat{\mathbf{A}}\right)\vec{\mathbf{v}} = c\left(\hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{v}}\right)$
- $\left(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\right)\vec{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{v}}\right)$ ale w ogólnosci $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{v}} \neq \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{v}}$

Komutator: $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right] \equiv \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$

Operatory liniowe

- Operatory zerowy i identycznościowy definiujemy jako: $\hat{\mathbf{O}}\vec{\mathbf{v}} \equiv \vec{0}$ $\quad \hat{\mathbf{I}}\vec{\mathbf{v}} \equiv \vec{\mathbf{v}}$
- Dwa operatory $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$ są równe, jeśli dla każdego $\vec{\mathbf{v}} \in V$ zachodzi: $\hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{v}}$
- Jeśli istnieje operator $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ taki, że $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{I}}$ to $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ nazywamy odwrotnością (operatorem odwrotnym) operatora $\hat{\mathbf{A}}$.

  Uwaga: Operator który nie posiada operatora odwrotnego nazywamy osobliwym. natomiast ten który posiada operator odwrotny nazywamy nieosobliwym.

Wprowadźmy bazy, $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ w V oraz $\{\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2, ..., \vec{\mathbf{f}}_m\}$ w W. Wówczas odwzorowanie liniowe $\hat{\mathbf{A}}$ działając na wektory bazy $\{\vec{\mathbf{e}}_j\}$ produkuje liniową kombinację wektorów bazy $\{\vec{\mathbf{f}}_i\}$:

$$\hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\vec{\mathbf{f}}_i$$

Liczba A_{ij} jest i-tą składową wektora $\hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{e}}_j$ w bazie $\{\vec{\mathbf{f}}_i\}$.

Tablicę liczb $[A_{ij}]$ czyli macierz o $dim V$ wierszach i $dim W$ kolumnach nazywamy reprezentacją macierzową odwzorowania $\hat{\mathbf{A}}$ w bazach $\{\vec{\mathbf{e}}_j\}$ i $\{\vec{\mathbf{f}}_i\}$.

W przypadku operatorów liniowych w przestrzeni V mamy: $$\hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\vec{\mathbf{e}}_i$$

Operatory liniowe

Zapiszemy relację $\vec{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{x}}$ za pomocą współrzędnych w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$:

$$\vec{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{A}}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\vec{\mathbf{e}}_i \quad \Rightarrow \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

W innej bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_i'\}$ w której współrzędne wektorów $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ oraz $\hat{\mathbf{A}}$ są x_i', y_i' oraz A_{ij} ta sama relacja geometryczna $\vec{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{x}}$ ma postać:

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}' x_j'$$

Macierze

Definicja: Macierzą o wymiarze $m \times n$ i elementach a_{ij}, gdzie $1 \le i \le m$ oraz $1 \le j \le n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$:

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uwaga: i numeruje wiersze,
j numeruje kolumny.

Oznaczenia: $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$ $\qquad a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$

W przypadku gdy $m = n$ macierz nazywamy macierzą kwadratową stopnia n.

Macierz jednowierszową lub jednokolumnową nazywamy wektorem.

Przykłady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2-i & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 2.4 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Definicja: Dwie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są sobie równe wtedy i tylko wtedy kiedy wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}$ są równe odpowiadającym i elementom macierzy $\mathbf{B}$.

Uwaga: Tylko macierze o tym samym wymiarze mogą być sobie równe.

Działania na macierzach

- Mnożenie macierzy A przez liczbę λ (ℝ lub ℂ): $(\lambda \mathbf{A})_{ij} = \lambda a_{ij}$
- Dodawanie i odejmowanie macierzy: $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left[a_{ij}\right] \pm \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]$

Uwaga: Dodawanie i odejmowanie macierzy ma sens tylko wtedy gdy macierze mają ten sam wymiar.

Uwaga: Dodawanie macierzy jest przemienne i łączne: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Przykład: Znajdź macierz D = A+2B−C jeśli dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B} - \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

- Macierz transponowana to macierz której kolejne wiersze zostały zamienione miejscami z kolumnami: $\mathbf{A}_{m\times n} = \left[a_{ij}\right] \Rightarrow \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)_{n\times m} = \left[a_{ji}\right]$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Działania na macierzach

Uwaga: Macierz nazywamy symetryczną jeśli: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ czyli $a_{ij} = a_{ji}$

Macierz nazywamy antysymetryczną jeśli: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ czyli $a_{ij} = -a_{ji}$

Dowolną macierz kwadratową można zapisać jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A}_s = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}_a = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\mathbf{A}_s^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{A}_s$$

$$\mathbf{A}_a^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}\right) = -\mathbf{A}_a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a \end{cases}$$

- Macierz sprzężona w sposób zespolony: $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \Rightarrow \mathbf{A}^{*} = \left[a_{ij}^{*}\right]$
- Macierz sprzężona po hermitowsku to macierz transponowana i taka której wszystkie elementy zostały sprzęgnięte w sposób zespolony:

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \left(\mathbf{A}^{*}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{*}$$

Uwaga: Macierz nazywamy hermitowską jeśli: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$ czyli $a_{ij} = a_{ji}^{*}$

Działania na macierzach

- **Mnożenie macierzy:**

  Iloczynem macierzy $\mathbf{A}_{m\times p} = [a_{ik}]$ i $\mathbf{B}_{p\times n} = [b_{kj}]$ nazywamy macierz $\mathbf{C}_{m\times n} = [c_{ij}]$ której elementy określone są przez:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Przykład: Math Player

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 25 & 26 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = ?$$

Definicja mnożenia macierzy

Definicja mnożenia macierzy ma uzasadnienie w *transformacjach liniowych*:

Niech
$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{aligned}$$
oraz
$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{aligned}$$

Szukamy związków pomiędzy z i x:

$$z_1 = b_{11}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) + b_{12}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) =$$
$$= \left(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}\right)x_1 + \left(b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}\right)x_2 + \left(b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}\right)x_3$$
$$z_2 = b_{21}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) + b_{22}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) =$$
$$= \left(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}\right)x_1 + \left(b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}\right)x_2 + \left(b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23}\right)x_3$$

W notacji macierzowej mamy:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Własności operacji na macierzach

Własności iloczynu macierzy:

- $\mathbf{A}_{m\times n} \quad \mathbf{B}_{n\times m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{m\times m} = \mathbf{AB} \quad \mathbf{Q}_{n\times n} = \mathbf{BA} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ oraz $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
- $(\mathbf{ABC})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\mathbf{C}^*$ oraz $(\mathbf{ABC})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ oraz $(\mathbf{ABC})^\dagger = \mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$

Dowód: $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_k a_{jk}b_{ki} = \sum_k (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{kj}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})_{ik} = \sum_k (\mathbf{B}^{\mathrm{T}})_{ik}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{kj} = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{ij}$$

Macierz zerowa to macierz, której każdy element jest równy zero:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{0}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$
- $\mathbf{0}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{0}_{m\times p}$ oraz $\mathbf{C}_{r\times m}\mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{r\times n}$

Iloczyn skalarny wektorów:

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \vec{\mathbf{a}}^\dagger \vec{\mathbf{b}} = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$$

Macierze kwadratowe

Macierz kwadratową o wymiarze $n \times n$ nazywamy macierzą stopnia n.

Definicja: Macierz kwadratową stopnia n nazywamy diagonalną jeśli wszystkie jej elementy poza diagonalnymi są równe zero:

$$\mathbf{D} = \left[d_{ij} \right] \qquad d_{ij} = 0 \text{ gdy } i \neq j$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Definicja: Macierz diagonalną której wszystkie elementy na diagonali są równe jedności nazywamy macierzą identycznościową.

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{I}_n = \left[\delta_{ij} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ zachodzi: $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$

Definicja: Śladem macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywamy sumę wszystkich jej elementów diagonalnych:

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Własności:

- $\mathrm{Tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} \pm \mathrm{Tr}\,\mathbf{B}$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}^{\dagger} = (\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})^{*}$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{BA})_{jj} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BA}$

Uwaga: Ogólnie zachodzi $\mathrm{Tr}\,\mathbf{ABC} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{CAB} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BCA}$