Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 3

Symbol całkowicie antysymetryczny

Definicja: Symbolem całkowicie antysymetrycznym w n wymiarach nazywamy:

$$\varepsilon_{i_1\, i_2\, \cdots\, i_n} = \begin{cases} +1 & \text{jeżeli permutacja } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{ jest permutacją parzystą} \\ -1 & \text{jeżeli jest permutacją nieparzystą} \\ 0 & \text{jeżeli nie wszystkie liczby są różne} \end{cases}$$

Wybrane własności (dowody przez pokazanie, że $L_{ijk\ldots} = P_{ijk\ldots}$ dla wszystkich i,j,k, ...):

- 2-dim: $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ $\quad \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = \delta_{ij}$ $\quad \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 2$
- 3-dim:

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad \sum_{j,k=1}^{2} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \qquad \sum_{i,j,k=1}^{2} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3!$$

- 4-dim:

$$\sum_{k,s=1}^{4} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{lmks} = 2\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \qquad \sum_{j,k,s=1}^{2} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{ljks} = 3!\delta_{il} \qquad \sum_{i,j,k,s=1}^{2} \varepsilon_{ijks}\varepsilon_{ijks} = 4!$$

- n-dim: Math Player

Iloczyn zewnętrzny w $\mathcal{R}^2$

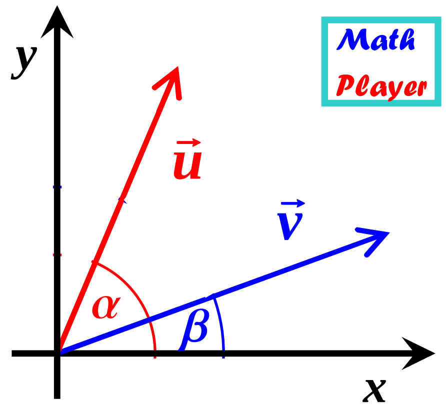
Iloczyn zewnętrzny dwóch wektorów jest obiektem, którego rodzaj zależy od liczby wymiarów. Na płaszczyźnie iloczyn zewnętrzny jest liczbą.

Definicja: Iloczyn zewnętrzny wektorów w 2D przestrzeni Euklidesa to liczba:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{j,k=1}^{2} \varepsilon_{jk} u_j v_k = u_1 v_2 - u_2 v_1 =$$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\left(\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\right) =$$

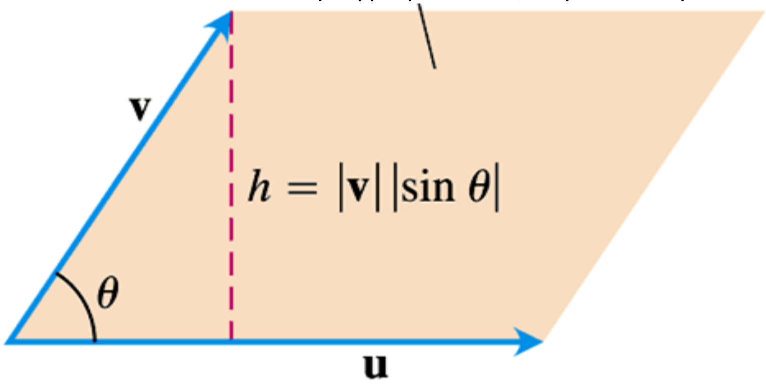
$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\left(\alpha - \beta\right) = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\gamma$$



Interpretacja geometryczna:

Powierzchnia

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$



Własności iloczynu zewnętrznego w 2D:

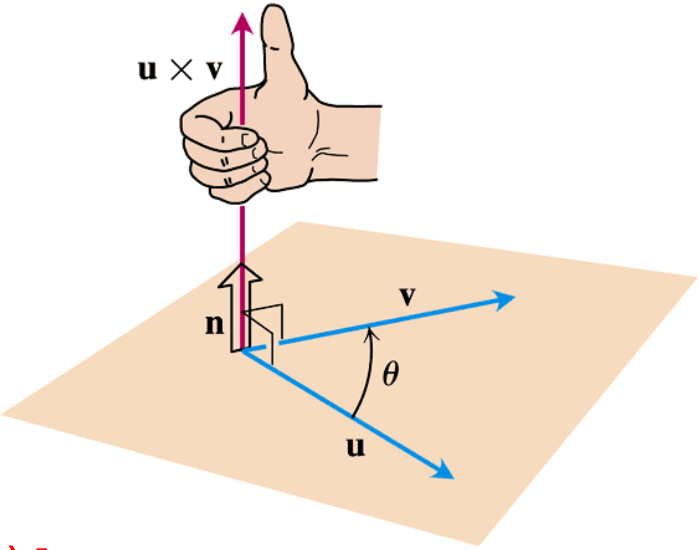
- antysymetryczny: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- liniowy ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

  $$\vec{u} \wedge \left(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}\right) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$
- określa skrętność układu: $\hat{\vec{e}}_1 \wedge \hat{\vec{e}}_2 = 1$

Iloczyn zewnętrzny (wektorowy) w $\mathcal{R}^3$

Definicja: Iloczynem wektorowym dwóch wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor o składowych:

$$(\vec{u}\times\vec{v})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$



Iloczyn wektorowy jest wektorem prostopadłym do obu wektorów składowych i ma wartość:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

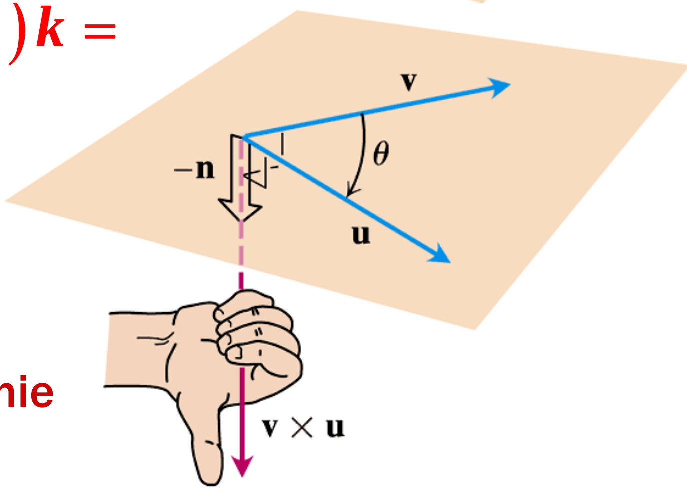
Math Player

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)k =$$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\gamma\ \vec{n}$$

γ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$\vec{n}$ – wektor jednostkowy, prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



Uwaga: Dowód powyższej równości przez przedstawienie składowych za pomocą cosinusów kierunkowych.

Iloczyn wektorowy w $\mathcal{R}^3$

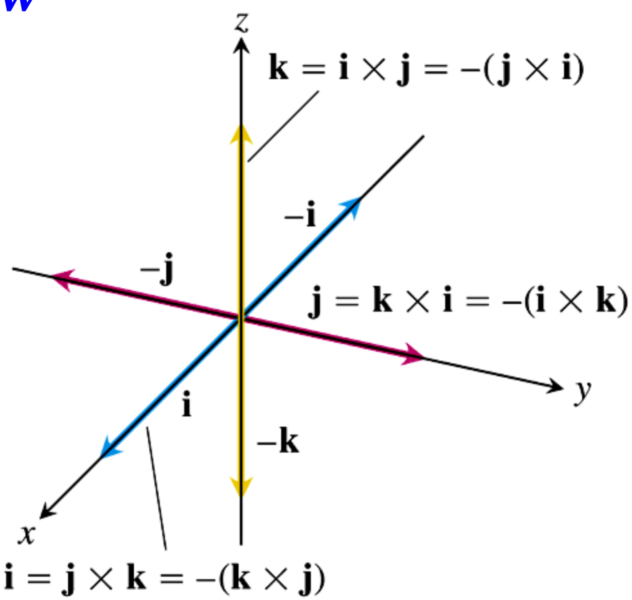
Iloczyn wektorowy jest wektorem ortogonalnym do każdego z wektorów składowych:

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\sum_{i=1}^{3}u_i\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}u_j v_k=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}u_i u_j v_k=0$$

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=0$$

Własności:

- antysymetryczny: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}\;\Rightarrow\;\vec{u}\times\vec{u}=0$
- liniowy (α, $\beta\in\mathbb{R}$): $\vec{u}\times\left(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}\right)=\alpha\vec{u}\times\vec{v}+\beta\vec{u}\times\vec{w}$
- określa skrętność układu:
- $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\neq\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$



Przykład: Pokaż, że jeśli $\vec{a}=\vec{b}+\lambda\vec{c}$ dla pewnej $\lambda\in\mathbb{R}$, wtedy $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$

$$\vec{a}\times\vec{c}=\left(\vec{b}+\lambda\vec{c}\right)\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}+\lambda\vec{c}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$$

Uwaga: Z powyższego nie wynika że $\vec{a}=\vec{b}$

Iloczyn mieszany wektorów

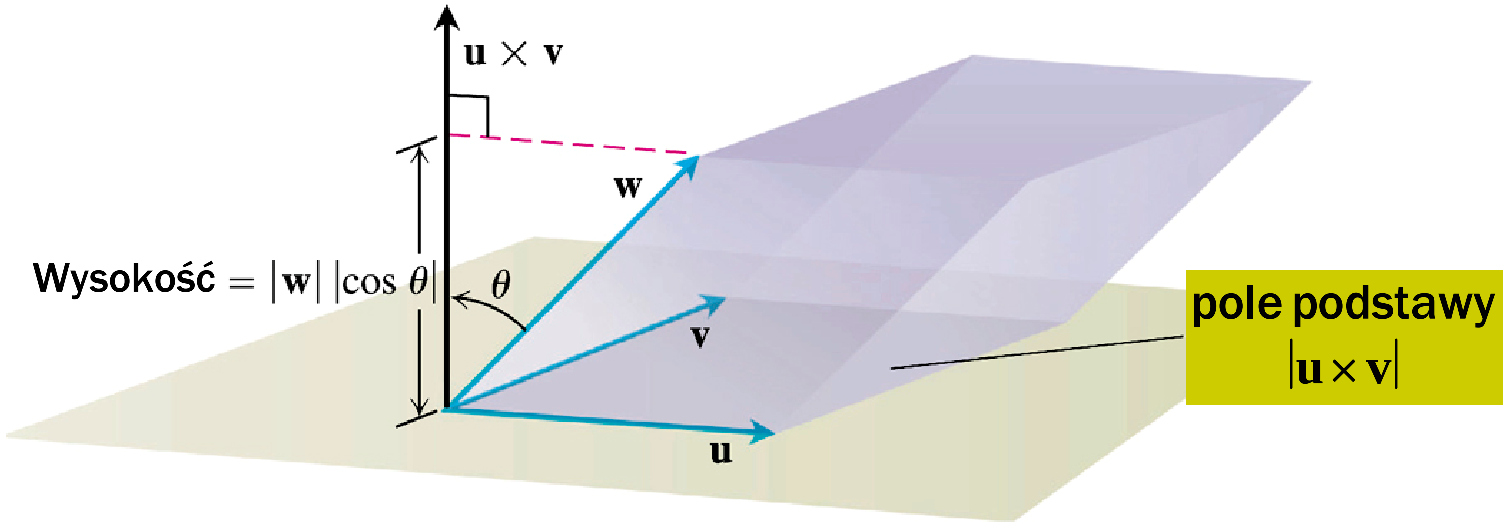
Iloczyn mieszany: $$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

Własności:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = -\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v}) = -\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = -\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})$$

Interpretacja geometryczna: $|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|$ jest objętością równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$ oraz $\vec{w}$.



Podwójny iloczyn wektorowy

Podwójny iloczyn wektorowy: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

Własności:

(a) jest ortogonalny do $(\vec{v}\times\vec{w})$ tzn. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ przy czym α, β nie zależą od $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

(b) jest liniowy w składowych $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

(c) jest ortogonalny do $\vec{u}$

(a)+(c) $\Rightarrow$ $\quad \alpha(\vec{v}\cdot\vec{u})+\beta(\vec{w}\cdot\vec{u})=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = c(\vec{w}\cdot\vec{u}), \quad \beta = -c(\vec{v}\cdot\vec{u})$

gdzie c nie zależy od $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{e}_1\times(\hat{e}_1\times\hat{e}_2)=\hat{e}_1\times\hat{e}_3=-\hat{e}_2\\(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2)\hat{e}_1-(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1)\hat{e}_2=-\hat{e}_2\end{array}\right\}\Rightarrow\quad c=+1$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$$

Wprost z definicji iloczynów skalarnego i wektorowego:

$$(\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}))_i = \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}u_j\sum_{l,m=1}^{3}\varepsilon_{klm}v_l w_m = \sum_{j,l,m=1}^{3}u_j v_l w_m\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} =$$

$$= \sum_{j,l,m=1}^{3}u_j v_l w_m\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)=\left(\sum_{j=1}^{3}u_j w_j\right)v_i-\left(\sum_{j=1}^{3}u_j v_j\right)w_i$$

czyli $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$ oraz $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

Prawdziwa jest więc tożsamość: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})+\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u})+\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})=0$

Linia prosta w przestrzeni 3D

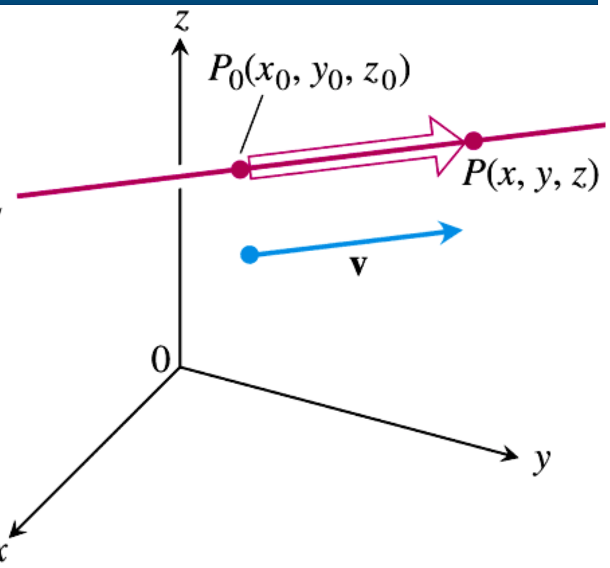
Równanie prostej w przestrzeni:

$\vec{\mathbf{v}}$ to wektor równoległy do prostej,

$\vec{\mathbf{r}}_0$ to wektor wodzący dowolnego punktu P_0 prostej.

$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}t$ – równanie parametryczne $(-\infty < t < \infty)$

$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}}_0 \times \vec{\mathbf{v}} \equiv \vec{\mathbf{b}}$ – równanie w postaci normalnej



Przykład: Odległość d pomiędzy dwiema nierównoległymi i nie przecinającymi się prostymi:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1\, t$$
$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 + \vec{\mathbf{v}}_2\, t$$

Niech a i b będą końcami odcinka prostopadłego do obu linii, odpowiednio na linii 1 i 2:

$$\vec{\mathbf{r}}_a = \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1\, t_1 \qquad \vec{\mathbf{r}}_b - \vec{\mathbf{r}}_a = \frac{\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2}{\left|\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right|} d$$
$$\vec{\mathbf{r}}_b = \vec{\mathbf{r}}_2 + \vec{\mathbf{v}}_2\, t_2$$

Z powyższych związków otrzymujemy:

$$\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2\, t_2 - \vec{\mathbf{v}}_1\, t_1 = \frac{\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2}{\left|\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right|} d \qquad /\cdot\left(\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right) \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\left(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right)}{\left|\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right|}$$

Wniosek: Dwie linie przecinają się gdy jest spełniony warunek $\left(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2\right) = 0$

Płaszczyzna w przestrzeni 3D

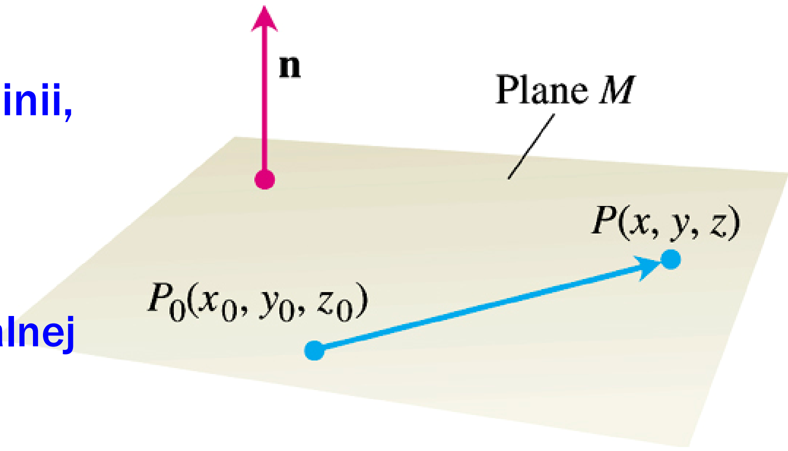
Równanie płaszczyzny w przestrzeni:

$\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ to dwa wektory nie leżące na tej samej linii,

$\vec{\mathbf{n}}$ to wektor prostopadły do płaszczyzny.

$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ – równanie parametryczne

$\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{r}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} \equiv d$ – równanie w postaci normalnej

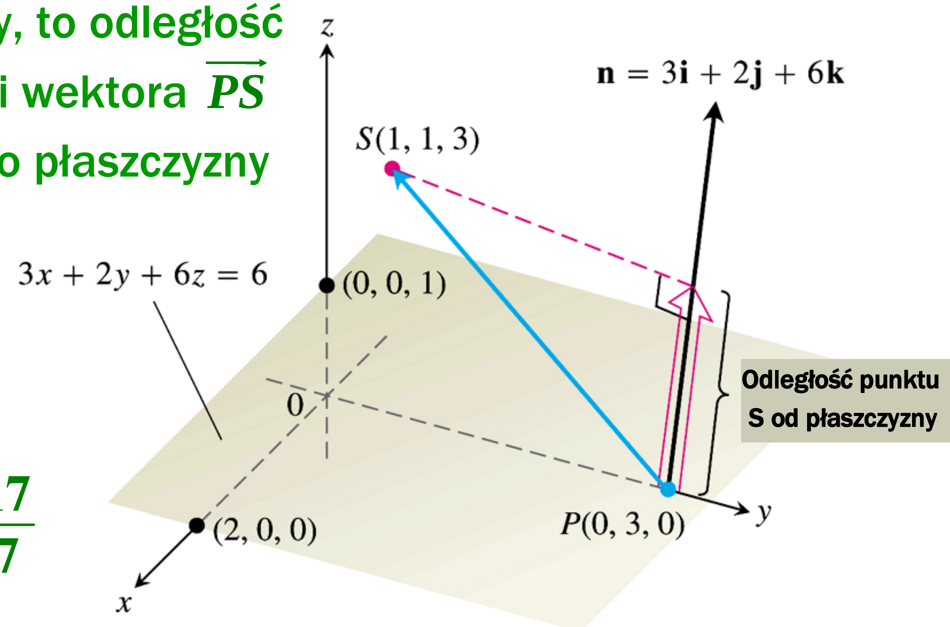


Przykład: Odległość punktu od płaszczyzny:

Jeśli P jest dowolnym punktem płaszczyzny, to odległość punktu S od płaszczyzny jest równa rzutowi wektora $\overrightarrow{PS}$ na kierunek wyznaczony przez normalną do płaszczyzny przechodzącą przez punkt P, czyli:

$$d = \left| \overrightarrow{PS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| =$$

$$= \left| \left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \frac{\left(3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}\right)}{7} \right| = \frac{17}{7}$$



Pojęcie przestrzeni wektorowej

Definicja: Zbiór $\mathcal{V}$ nazywamy przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem liczbowym $\mathcal{Q} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, jeśli zdefiniowane są dwa wzajemnie uzgodnione działania na jego elementach (wektorach), dodawanie oraz mnożenie przez liczby z $\mathcal{Q}$, posiadające następujące własności (muszą być spełnione dla każdego $c, c_1, c_2 \in \mathcal{Q}$ i każdego $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$):

(A1) $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$

(A2) $(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} + (\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{u}})$

(A3) $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}}$

(A4) istnieje wektor zerowy $\vec{0} \in \mathcal{V}$ taki, że $\vec{0} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla dowolnego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

(A5) dla każdego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ istnieje wektor przeciwny $-\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ taki, że $\vec{\mathbf{v}} + (-\vec{\mathbf{v}}) = \vec{0}$

(M1) $c\,\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ dla wszystkich $c \in \mathcal{Q}$ i $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

(M2) $(c_1 c_2)\vec{\mathbf{v}} = c_1(c_2\vec{\mathbf{v}})$

(M3) $c(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = c\vec{\mathbf{v}} + c\vec{\mathbf{w}}$

(M4) $(c_1 + c_2)\vec{\mathbf{v}} = c_1\vec{\mathbf{v}} + c_2\vec{\mathbf{v}}$

(M5) istnieje liczba $1 \in \mathcal{Q}$ taka, że $1\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla dowolnego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

Przestrzenie wektorowe - przykłady

- zbiór $\mathcal{R}^{m \times n}$ rzeczywistych macierzy $m \times n$ tworzy przestrzeń wektorową nad $\mathcal{R}$.
- zbiór $\mathcal{C}^{m \times n}$ zespolonych macierzy $m \times n$ tworzy przestrzeń wektorową nad $\mathcal{C}$.

w szczególności mamy:

$$\mathcal{R}^{n\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ x_i \in \mathcal{R} \right\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{C}^{n\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix};\ z_i \in \mathcal{C} \right\}$$

- zbiór liczb rzeczywistych nad $\mathcal{R}$,
- zbiór liczb zespolonych nad $\mathcal{R}$ oraz nad $\mathcal{C}$,

Definiujemy operacje dodawania i mnożenia przez skalar funkcji jako

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{oraz} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

- następujące zbiory tworzą przestrzenie wektorowe nad $\mathcal{R}$:
  - zbiór wszystkich funkcji odwzorowujących przedział $[0,1]$ w $\mathcal{R}$,
  - zbiór wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na $[0,1]$
  - zbiór wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych różniczkowalnych na $[0,1]$
- zbiór $\mathcal{P}^{\mathcal{C}}(t)$ wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych nad $\mathcal{C}$.
- zbiór $\mathcal{P}_n^{\mathcal{R}}(t)$ wszystkich wielomianów stopnia mniejszego bądź równego n o współczynnikach rzeczywistych nad $\mathcal{R}$ (ale nie nad $\mathcal{C}$).

Podprzestrzeń

Definicja: Niepusty podzbiór $\mathcal{S}$ przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$) nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni $\mathcal{V}$ jeśli $\mathcal{S}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathcal{Q}$ z tak samo zdefiniowanymi operacjami dodawania i mnożenia przez skalar jak w $\mathcal{V}$.

Twierdzenie: Niepusty podzbiór $\mathcal{S}$ przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathcal{V}$ wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są jednocześnie warunki:

(A1) $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{S}$

(M1) $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$ dla wszystkich $\alpha \in \mathcal{Q}$

Dowód: $\mathcal{S}$ jako podzbiór $\mathcal{V}$ dziedziczy wszystkie własności przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ z wyjątkiem (A1) (A4) (A5) i M(1). Ale (A1) i (M1) implikują (A4) i (A5):

$(\text{M1}): \ \vec{\mathbf{x}} \in S \ \Rightarrow \ -\vec{\mathbf{x}} = (-1)\vec{\mathbf{x}} \in S \qquad \Rightarrow$ (A5)

$(\text{A1}): \ \vec{\mathbf{x}}, (-\vec{\mathbf{x}}) \in S \ \Rightarrow \ \vec{\mathbf{x}} + (-\vec{\mathbf{x}}) \in S$ a więc $\vec{\mathbf{0}} \in S \qquad \Rightarrow$ (A4)

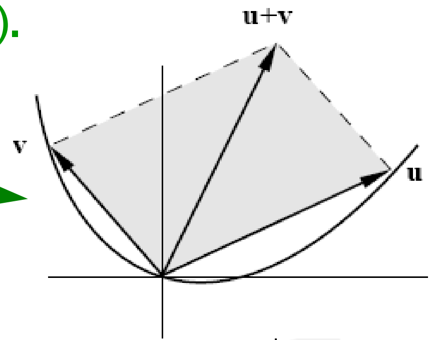
Definicja: Podzbiór $\mathcal{Z}=\{\mathbf{0}\}$ przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathcal{V}$ i nosi nazwę **podprzestrzeni trywialnej**.

Przykład:

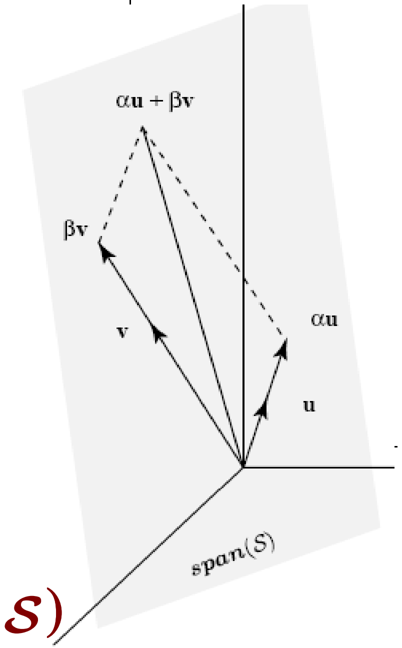
- zbiór liczb rzeczywistych tworzy podprzestrzeń przestrzeni liczb zespolonych nad $\mathcal{R}$,
- zbiór $\mathcal{P}_n^c(t)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{P}^c(t)$,

Podprzestrzenie - przykłady

- zbiór macierzy (rzeczywistych lub zespolonych) $\mathcal{M}^{r\times s}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{M}^{m\times n}$ dla $r \leqslant m$ oraz $s \leqslant$ n (macierz $r \times s$ utożsamiamy z macierzami $m \times n$ w których wszystkie elementy ostatnich $m-r$ wierszy i $n-s$ kolumn to zera).
- zbiór $\mathcal{L} = \{(x, y) : y = ax\}$ jest podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{R}^2$ (żadna inna linia nie jest podprzestrzenią $\mathcal{R}^2$)



- w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ nietrywialnymi podprzestrzeniami są linie proste i płaszczyzny przechodzące przez początek układu,
- przestrzeń $\mathcal{R}^m$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{R}^n$ dla $m<n$



Twierdzenie: Niech $\mathcal{S}$ będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$. Zbiór $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}$ wszystkich liniowych kombinacji wektorów z $\mathcal{S}$ tworzy podprzestrzeń $\mathcal{V}$. Mówimy, że zbiór $\mathcal{S}$ napina przestrzeń $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}$. Stosujemy oznaczenie span($\mathcal{S}$).

$$\mathcal{S} = \{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_r\} \quad \Rightarrow \quad span(\mathcal{S}) = \{\alpha_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2\vec{\mathbf{v}}_2 + ... + \alpha_r\vec{\mathbf{v}}_r \mid \alpha_i \in \mathcal{Q}\}$$

Dowód:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_i \xi_i \vec{\mathbf{v}}_i \quad \vec{\mathbf{y}} = \sum_i \eta_i \vec{\mathbf{v}}_i \quad \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in span(\mathcal{S})$$

$$\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} = \sum_i (\xi_i + \eta_i)\vec{\mathbf{v}}_i \in span(\mathcal{S}) \quad \text{oraz} \quad \beta\vec{\mathbf{x}} = \sum_i (\beta\xi_i)\vec{\mathbf{v}}_i \in span(\mathcal{S})$$