

Matematyczne Metody FIZYKI I

Wykład 3

Permutacje

Definicja: Permutacją zbioru liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ nazywamy dowolną różnowartościową funkcję określoną na tym zbiorze i o wartościach w tym zbiorze.

Uwaga: Liczba wszystkich permutacji wynosi $n!$

Permutacje zapisujemy w formie tabeli: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$

Permutacja identycznościowa: $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

Iloczynem permutacji f i g jest złożenie tych funkcji: $f \circ g(i) \equiv f(g(i))$

Przykład: Niech $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Wtedy $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ oraz $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Definicja: Niech π będzie permutacją określoną na zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$ oraz niech r będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że $\pi^r(i) = i$. Wówczas zbiór r różnych elementów $\{\pi^k(i)\}_{k=0}^{r-1}$ nazywamy **r -wyrazowym cyklem** permutacji π .

Permutacje - rozkład na cykle

Math
Player

Przykład: $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1374)(25)(68)$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (125)(36748)$$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 6 & 3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = (15387)(2)(46)$$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = (1374)(25)(68)(125)(36748) = (15387)(2)(46)$$

Dwa cykle (i_1, i_2, \dots, i_k) oraz (j_1, j_2, \dots, j_l) nazywamy rozłącznymi jeżeli zbiory liczb $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ oraz $\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ nie mają elementów wspólnych.

Twierdzenie: Każdą permutację można rozłożyć na iloczyn rozłącznych cykli.

Definicja: Permutację π w której jeden cykl ma długość r , a pozostałe mają tylko po jednym elemencie, nazywamy **permutacją cykliczną** o długości r .

Definicja: Permutację cykliczną o długości 2 nazywamy **transpozycją**.

Przykład: $\pi_1 = (143)(24)(356) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (142356)$

Parzystość permutacji

Twierdzenie: Dowolny cykl o długości r można rozłożyć na $r-1$ transpozycji:

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) = (i_1, i_r)(i_1, i_{r-1}) \dots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$$

Uwaga: Chociaż rozkład na transpozycje nie jest jednoznaczny, to można pokazać, że parzystość rozkładu (tzn. czy liczba transpozycji jest parzysta czy nie) jest jednoznaczna.

$$(1234) = (14)(13)(12) = (14)\underbrace{(34)(34)}_1 \underbrace{(23)(12)(12)(23)}_1 (13)(12)$$

Twierdzenie: Dowolna permutacja może być rozłożona na iloczyn transpozycji. Parzystość rozkładu jest jednoznacznie określona.

Definicja: Permutację nazywamy **parzystą** (**nieparzystą**) jeśli może być rozłożona na iloczyn parzystej (nieparzystej) liczby transpozycji.

Określenie: Nieporządkiem w permutacji π nazywamy każdą parę liczb i, j taką że $i < j$ oraz $\pi(i) > \pi(j)$. A więc parzystość permutacji można określić zliczając nieporządki:

$$\prod_{i < j} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} = \begin{cases} +1 & \text{parzysta} \\ -1 & \text{nieparzysta} \end{cases}$$

Parzystość permutacji

Dowód: Ponieważ π jest permutacją więc istnieją takie k i l , że:

$$\pi(k) = i \quad \text{oraz} \quad \pi(l) = j$$

Jeśli $l > k$ wówczas w liczniku wystąpi $\pi(l) - \pi(k) = j - i$

Jeśli $k > l$ wówczas w liczniku wystąpi $\pi(k) - \pi(l) = -(j - i)$

Przykład: Zbadaj parzystość permutacji

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1374)(25)(68) = (14)(17)(13)(25)(68)$$

Liczba nieporządków:

$$\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 7 \ 1 \ 2 \ 8 \ 4 \ 6 = 2 \\ 5 \ 7 \ 1 \ 2 \ 8 \ 4 \ 6 = 3 \\ 7 \ 1 \ 2 \ 8 \ 4 \ 6 = 4 \\ 1 \ 2 \ 8 \ 4 \ 6 = 0 \\ 2 \ 8 \ 4 \ 6 = 0 \\ 8 \ 4 \ 6 = 2 \\ 4 \ 6 = 0 \end{array}$$

$$\text{Całkowita liczba nieporządków:} \quad \underline{\underline{11}}$$

permutacja
nieparzysta

Symbol całkowie antysymetryczny

Definicja: Symbolem całkowie antysymetrycznym w n wymiarach nazywamy:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{jeżeli permutacja } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ jest permutacją parzystą} \\ -1 & \text{jeżeli jest permutacją nieparzystą} \\ 0 & \text{jeżeli nie wszystkie liczby są różne} \end{cases}$$

Wybrane własności (dowody przez pokazanie, że $L_{ijk\dots} = P_{ijk\dots}$ dla wszystkich i, j, k, \dots):

■ **2-dim:** $\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$ $\sum_{k=1}^2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} = \delta_{ij}$ $\sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = 2$

■ **3-dim:**

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$\sum_{j,k=1}^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 3!$$

■ **4-dim:**

$$\sum_{k,s=1}^4 \varepsilon_{ijks} \varepsilon_{lmks} = 2(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl})$$

$$\sum_{j,k,s=1}^2 \varepsilon_{ijks} \varepsilon_{ljks} = 3! \delta_{il}$$

$$\sum_{i,j,k,s=1}^2 \varepsilon_{ijks} \varepsilon_{ijks} = 4!$$

■ **n-dim:** Math
Player

Iloczyn zewnętrzny w \mathcal{R}^2

Iloczyn zewnętrzny dwóch wektorów jest obiektem, którego rodzaj zależy od liczby wymiarów. Na płaszczyźnie iloczyn zewnętrzny jest liczbą.

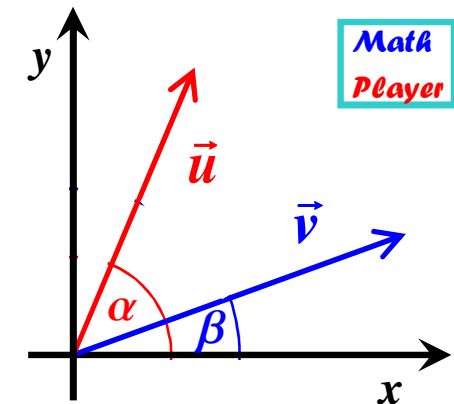
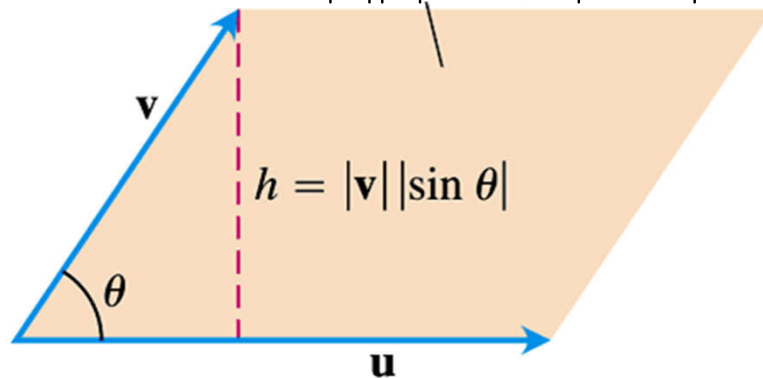
Definicja: Iloczyn zewnętrzny wektorów w 2D przestrzeni Euklidesa to liczba:

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \sum_{j,k=1}^2 \varepsilon_{jk} u_j v_k = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \\ &= |\vec{u}| |\vec{v}| (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = \\ &= |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha - \beta) = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \gamma\end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna:

Powierzchnia

$$= |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$



Własności iloczynu zewnętrznego w 2D:

- antysymetryczny: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- liniowy ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):
 $\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \vec{u} \wedge \vec{v} + \beta \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$
- określa skrętność układu: $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = 1$

Iloczyn zewnętrzny (wektorowy) w \mathcal{R}^3

Definicja: Iloczynem wektorowym dwóch wektorów \vec{u} i \vec{v} nazywamy wektor

o składowych:

$$(\vec{u} \times \vec{v})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$

Iloczyn wektorowy jest wektorem prostopadłym do obu wektorów składowych i ma wartość:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

Math
Player

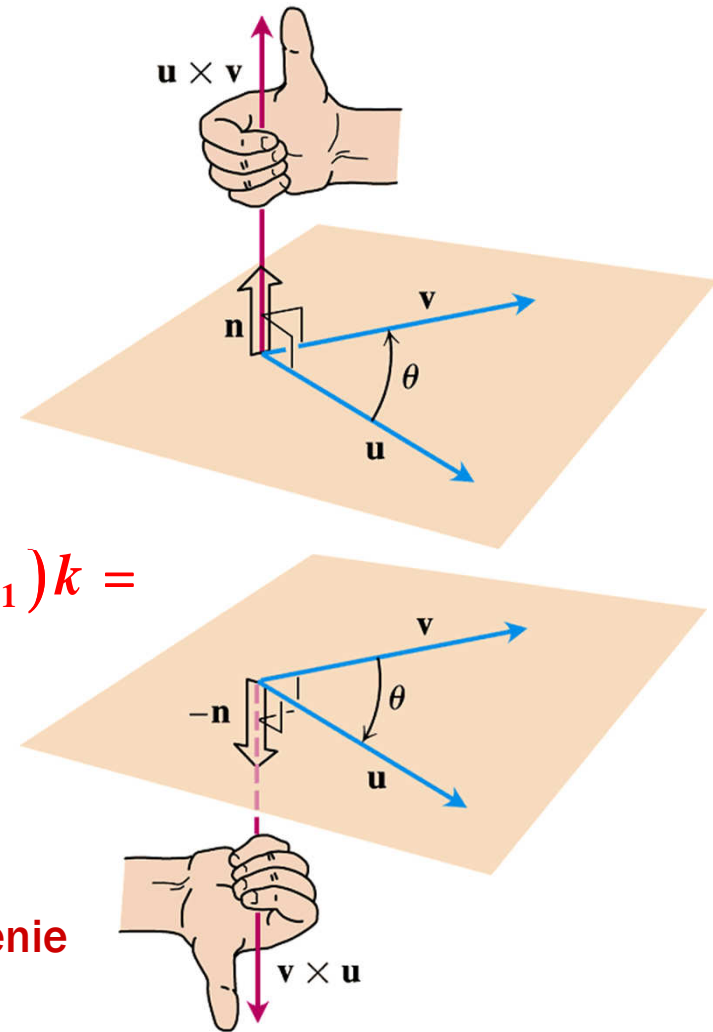
$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k} =$$

$$= |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \gamma \vec{n}$$

γ – kąt pomiędzy wektorami \vec{u} i \vec{v}

\vec{n} – wektor jednostkowy, prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory \vec{u} i \vec{v} .

Uwaga: Dowód powyższej równości przez przedstawienie składowych za pomocą cosinusów kierunkowych.



Iloczyn wektorowy w \mathbb{R}^3

Iloczyn wektorowy jest wektorem ortogonalnym do każdego z wektorów składowych:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_j v_k = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_i u_j v_k = 0$$
$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

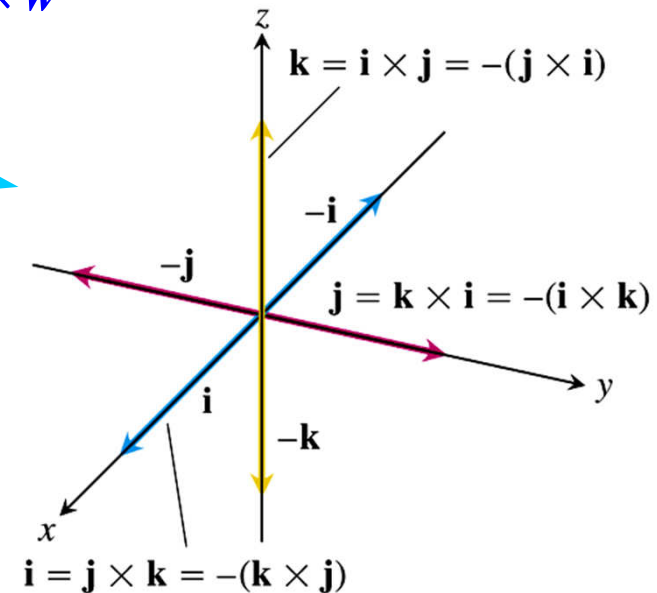
Własności:

- antysymetryczny: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{u} = 0$
- liniowy ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$): $\vec{u} \times (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \vec{u} \times \vec{v} + \beta \vec{u} \times \vec{w}$
- określa skrętność układu:
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Przykład: Pokaż, że jeśli $\vec{a} = \vec{b} + \lambda \vec{c}$ dla pewnej $\lambda \in \mathbb{R}$, wtedy $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$

$$\vec{a} \times \vec{c} = (\vec{b} + \lambda \vec{c}) \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} + \lambda \vec{c} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$$

Uwaga: Z powyższego nie wynika że $\vec{a} = \vec{b}$



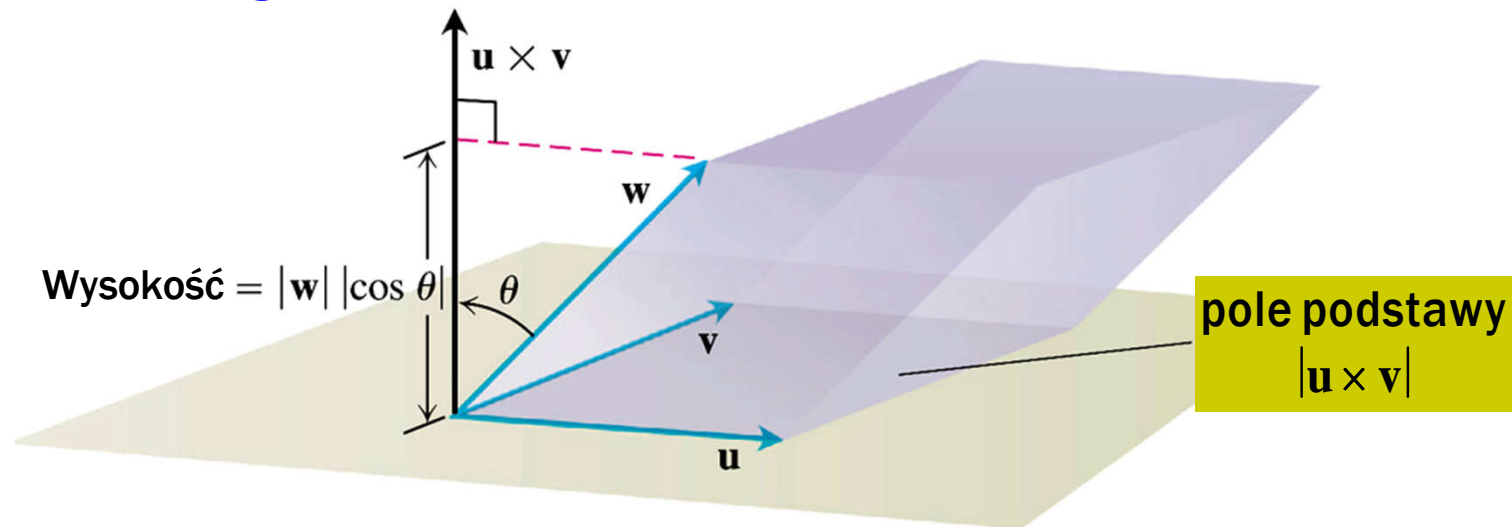
Iloczyn mieszany wektorów

Iloczyn mieszany:
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$
$$= u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

Własności:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = -\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = -\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = -\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$$

Interpretacja geometryczna: $|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$ jest objętością równoległościanu zbudowanego na wektorach \vec{u} , \vec{v} oraz \vec{w} .



Podwójny iloczyn wektorowy

Podwójny iloczyn wektorowy: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Własności:

(a) jest ortogonalny do $(\vec{v} \times \vec{w})$ tzn. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$ przy czym α, β nie zależą od \vec{u} i \vec{v} .

(b) jest liniowy w składowych \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} .

(c) jest ortogonalny do \vec{u}

(a)+(c) $\Rightarrow \alpha (\vec{v} \cdot \vec{u}) + \beta (\vec{w} \cdot \vec{u}) = 0 \Rightarrow \alpha = c (\vec{w} \cdot \vec{u}), \beta = -c (\vec{v} \cdot \vec{u})$

$\left. \begin{aligned} \hat{e}_1 \times (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) &= \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_2 \\ (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_1 - (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_2 &= -\hat{e}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = +1$ gdzie c nie zależy od \vec{u}, \vec{v} i \vec{w} .

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

Wprost z definicji iloczynów skalarnego i wektorowego:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}))_i &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} u_j \sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{klm} v_l w_m = \sum_{j,l,m=1}^3 u_j v_l w_m \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} = \\ &= \sum_{j,l,m=1}^3 u_j v_l w_m (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) = \left(\sum_{j=1}^3 u_j w_j \right) v_i - \left(\sum_{j=1}^3 u_j v_j \right) w_i \end{aligned}$$

czyli $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ oraz $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$

Prawdziwa jest więc tożsamość: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

Linia prosta w przestrzeni 3D

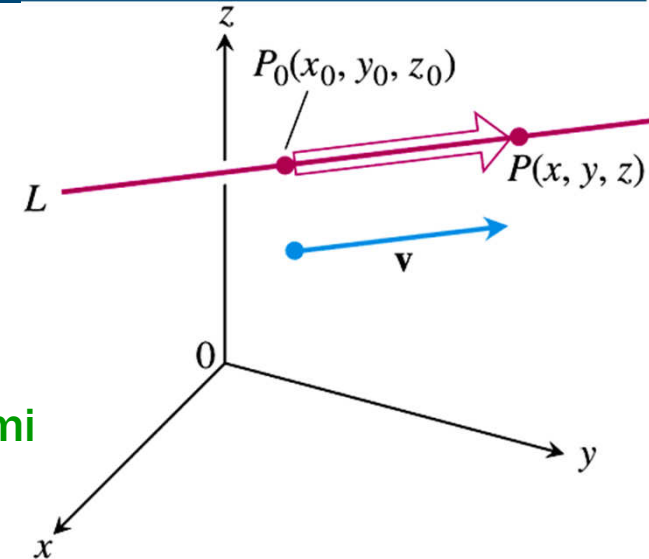
Równanie prostej w przestrzeni:

\vec{v} to wektor równoległy do prostej,

\vec{r}_0 to wektor wodzący dowolnego punktu P_0 prostej.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ – równanie parametryczne ($-\infty < t < \infty$)

$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r}_0 \times \vec{v} \equiv \vec{b}$ – równanie w postaci normalnej



Przykład: Odległość d pomiędzy dwiema nierównoległymi

i nie przecinającymi się prostymi: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t$

$\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{v}_2 t$

Niech a i b będą końcami odcinka prostopadłego do obu linii, odpowiednio na linii 1 i 2:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t_1$$

$$\vec{r}_b = \vec{r}_2 + \vec{v}_2 t_2$$

$$\vec{r}_b - \vec{r}_a = \frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} d$$

Z powyższych związków otrzymujemy:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{v}_2 t_2 - \vec{v}_1 t_1 = \frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} d \quad / \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

Wniosek: Dwie linie przecinają się gdy jest spełniony warunek $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0$

Płaszczyzna w przestrzeni 3D

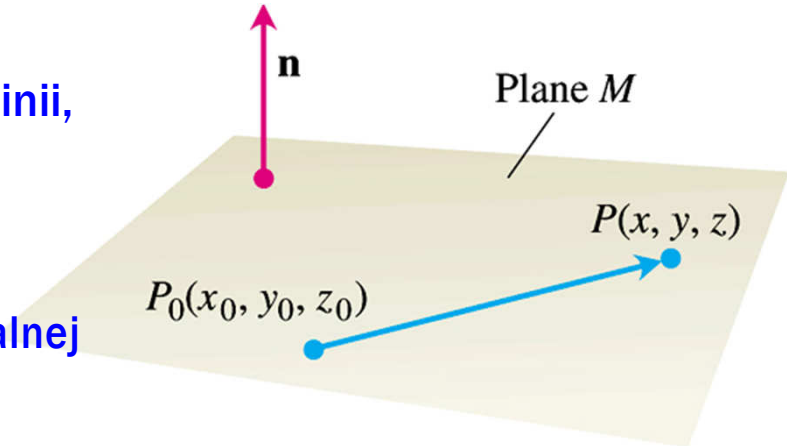
Równanie płaszczyzny w przestrzeni:

\vec{u}, \vec{v} to dwa wektory nie leżące na tej samej linii,

\vec{n} to wektor prostopadły do płaszczyzny.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ – równanie parametryczne

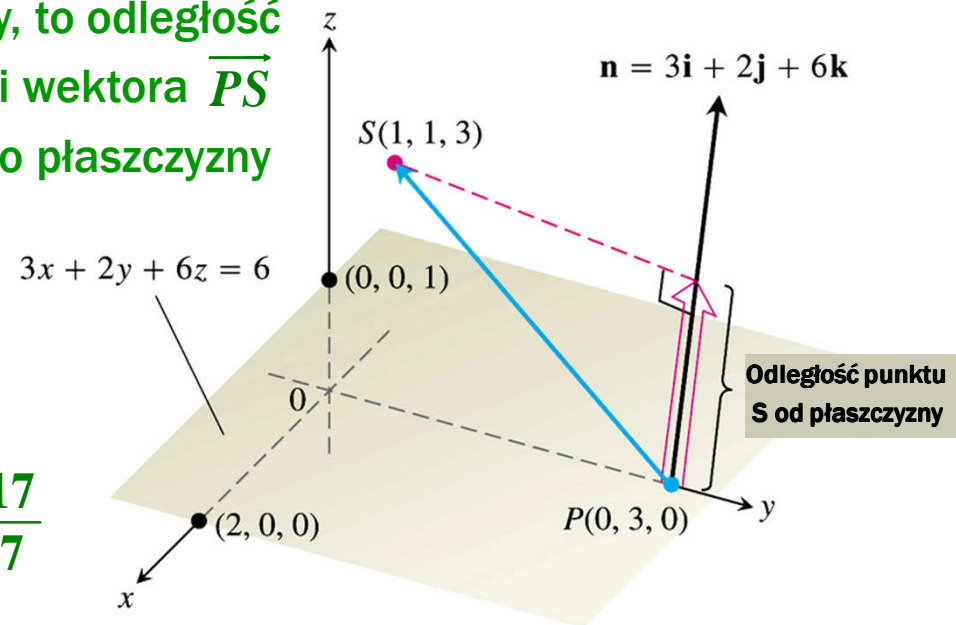
$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n} \equiv d$ – równanie w postaci normalnej



Przykład: Odległość punktu od płaszczyzny:

Jeśli P jest dowolnym punktem płaszczyzny, to odległość punktu S od płaszczyzny jest równa rzutowi wektora \overrightarrow{PS} na kierunek wyznaczony przez normalną do płaszczyzny przechodzącą przez punkt P, czyli:

$$d = \left| \overrightarrow{PS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot \frac{(3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k})}{7} \right| = \frac{17}{7}$$



Pojęcie przestrzeni wektorowej

Definicja: Zbiór \mathcal{V} nazywamy **przestrzenią wektorową (liniową)** nad ciałem liczbowym $Q = \mathbb{R}$ lub \mathbb{C} , jeśli zdefiniowane są dwa wzajemnie uzgodnione działania na jego elementach (wektorach), dodawanie oraz mnożenie przez liczby z Q , posiadające następujące własności (muszą być spełnione dla każdego $c, c_1, c_2 \in Q$ i każdego $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$):

$$(A1) \quad \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V} \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{V}$$

$$(A2) \quad (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$$

$$(A3) \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

$$(A4) \quad \text{istnieje wektor zerowy } \vec{0} \in \mathcal{V} \text{ taki, że } \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} \text{ dla dowolnego } \vec{v} \in \mathcal{V}$$

$$(A5) \quad \text{dla każdego } \vec{v} \in \mathcal{V} \text{ istnieje wektor przeciwny } -\vec{v} \in \mathcal{V} \text{ taki, że } \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

$$(M1) \quad c \vec{v} \in \mathcal{V} \text{ dla wszystkich } c \in Q \text{ i } \vec{v} \in \mathcal{V}$$

$$(M2) \quad (c_1 c_2) \vec{v} = c_1 (c_2 \vec{v})$$

$$(M3) \quad c (\vec{v} + \vec{w}) = c \vec{v} + c \vec{w}$$

$$(M4) \quad (c_1 + c_2) \vec{v} = c_1 \vec{v} + c_2 \vec{v}$$

$$(M5) \quad \text{istnieje liczba } 1 \in Q \text{ taka, że } 1 \vec{v} = \vec{v} \text{ dla dowolnego } \vec{v} \in \mathcal{V}$$

Baza w przestrzeni wektorowej V

Definicja: Zbiór liniowo niezależnych wektorów $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ należących do przestrzeni wektorowej \mathcal{V} nazywamy bazą, jeśli dowolny wektor $\vec{v} \in \mathcal{V}$ może być zapisany w postaci:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$$

Liczbę n nazywamy **wymiarem przestrzeni \mathcal{V}** i oznaczamy $\dim \mathcal{V}$.

Twierdzenie: Rozkład wektora na składowe w ustalonej bazie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ jest jednoznaczny.

Dowód: Niech wektor \vec{x} ma w bazie $\{\vec{e}_i\}$ dwa zestawy współrzędnych x_i oraz y_i :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \\ \vec{x} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \vec{e}_i = \vec{0} \Rightarrow x_i = y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Uwaga: dowolny zbiór n liniowo niezależnych wektorów tworzy bazę w n wymiarowej przestrzeni wektorowej. W nowej bazie zmieniają się współrzędne wektorów, np. w bazie $\{\vec{e}'_i\}$ mamy:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{e}'_i$$

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Oznaczenie: $\vec{v} \equiv |\vec{v}\rangle$ $\langle \vec{v} | \equiv |\vec{v}\rangle^*$

Definicja: Iloczynem wewnętrznym (skalarnym) wektorów z przestrzeni wektorowej \mathcal{V} nad ciałem \mathbb{C} nazywamy przyporządkowanie uporządkowanej parze (\vec{v}, \vec{w}) dowolnych wektorów $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ liczby zespolonej, oznaczanej przez $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$ jeśli spełnione są następujące warunki:

- $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle^*$
- $\langle \vec{v}_1 | c\vec{v}_2 \rangle = c \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle$ dla każdego $c \in \mathbb{C}$
- $\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2 | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_1 | \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}_2 | \vec{v} \rangle$
- $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle > 0$ jeśli $\vec{v} \neq \vec{0}$

Wnioski:

- $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ jest zawsze liczbą rzeczywistą
- $\langle c\vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = c^* \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle$
- $\langle \vec{v} | \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v} | \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{v} | \vec{v}_2 \rangle$

Uwaga: W przypadku przestrzeni wektorowej na ciałem \mathbb{R} iloczyn skalarny dowolnych dwóch wektorów ma z definicje wartość rzeczywistą.