

Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 4

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Oznaczenie: $\vec{v} \equiv |\vec{v}\rangle$ $\langle \vec{v} | \equiv |\vec{v}\rangle^*$

Definicja: Iloczynem wewnętrznym (skalarnym) wektorów z przestrzeni wektorowej \mathcal{V} nad ciałem \mathcal{C} nazywamy przyporządkowanie uporządkowanej parze (\vec{v}, \vec{w}) dowolnych wektorów $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ liczby zespolonej, oznaczanej przez $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$ jeśli spełnione są następujące warunki:

- $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle^*$
- $\langle \vec{v}_1 | c\vec{v}_2 \rangle = c \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle$ dla każdego $c \in \mathcal{C}$
- $\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2 | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_1 | \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}_2 | \vec{v} \rangle$
- $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle > 0$ jeśli $\vec{v} \neq \vec{0}$

Wnioski:

- $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ jest zawsze liczbą rzeczywistą
- $\langle c\vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = c^* \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle$
- $\langle \vec{v} | \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v} | \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{v} | \vec{v}_2 \rangle$

Uwaga: W przypadku przestrzeni wektorowej na ciałem \mathcal{R} iloczyn skalarny dowolnych dwóch wektorów ma z definicje wartość rzeczywistą.

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Definicja: Mówimy, że wektory \vec{v}_1 i \vec{v}_2 są wzajemnie **ortogonalne** jeśli $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = 0$

Wniosek: Jedynym wektorem, który jest ortogonalny sam do siebie jest wektor zerowy $\langle \vec{0} | \vec{0} \rangle = 0$.

Definicja: Długością (modułem) wektora \vec{v} nazywamy liczbę $|\vec{v}| \equiv \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \geq 0$

Niech $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ będzie ortonormalną bazą w n wymiarowej przestrzeni wektorowej:

$$\langle \hat{e}_i | \hat{e}_j \rangle = \delta_{ij} \quad \vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i \hat{e}_i \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^n b_i \hat{e}_i$$

W takiej ortonormalnej bazie współrzędne wektora \vec{a} są równe:

$$\langle \hat{e}_j | \vec{a} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \hat{e}_j | a_i \hat{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \hat{e}_j | \hat{e}_i \rangle = a_j$$

Natomiast iloczyn skalarny wektorów \vec{a} i \vec{b} dany jest przez:

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \hat{e}_i \left| \sum_{i=1}^n b_i \hat{e}_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i \langle \hat{e}_i | \hat{e}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i^* b_j \langle \hat{e}_i | \hat{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$$

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Uogólnienie na przypadek kiedy baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ nie jest ortogonalna:

Definicja: Metryką w przestrzeni wektorowej \mathcal{V} nazywamy macierz (n^2 liczb):

$$g_{ij} = \langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle$$

Iloczyn skalarny wektorów \vec{a} i \vec{b} dany jest wówczas przez:

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i \left| \sum_{i=1}^n b_i \vec{e}_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* b_j \langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* g_{ij} b_j$$

Długość wektora jest zawsze rzeczywista:

$$g_{ij} = g_{ji}^* \Rightarrow \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle^* = \sum_{i,j=1}^n a_i g_{ij}^* a_j^* = \sum_{i,j=1}^n a_j^* g_{ji} a_i = \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle$$

W przestrzeniach C^n oraz R^n wprowadzamy **bazę naturalną** $e_i^k = \delta_i^k$ w której i -ty wektor ma wszystkie składowe równe zero z wyjątkiem i -tej równej 1.

W przestrzeniach R^n i C^n często wprowadzamy definicję iloczynu skalarnego odpowiednio w postaci:

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad \text{oraz} \quad \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i$$

Metoda Grama-Schmidta

Mając dowolną bazę $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ można z niej otrzymać bazę ortonormalną $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ stosując metodę Grama-Schmidta. Nową bazę konstruujemy rekurencyjnie:

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}$$

Żądamy aby kolejny wektor był prostopadły do \vec{e}'_1 i miał długość równą 1:

$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{e}_2 - \langle \vec{e}'_1 | \vec{e}_2 \rangle \vec{e}'_1}{|\vec{e}_2 - \langle \vec{e}'_1 | \vec{e}_2 \rangle \vec{e}'_1|} \quad \langle \vec{e}'_2 | \vec{e}'_1 \rangle = 0 \quad \langle \vec{e}'_2 | \vec{e}'_2 \rangle = 1$$

W stosunku do kolejnych wektorów żądamy, aby były ortogonalne do wszystkich znalezionych poprzednio i miały jednostkową długość:

$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{e}_3 - \langle \vec{e}'_1 | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}'_1 - \langle \vec{e}'_2 | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}'_2}{|\vec{e}_3 - \langle \vec{e}'_1 | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}'_1 - \langle \vec{e}'_2 | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}'_2|} \quad \begin{aligned} \langle \vec{e}'_3 | \vec{e}'_1 \rangle &= 0 \\ \langle \vec{e}'_3 | \vec{e}'_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad \langle \vec{e}'_3 | \vec{e}'_3 \rangle = 1$$

Ogólnie stosujemy wzór rekurencyjny:

$$\vec{e}'_k = \frac{\vec{f}_k}{|\vec{f}_k|} \quad \text{gdzie} \quad \vec{f}_k = \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{e}'_i | \vec{e}_k \rangle \vec{e}'_i$$



Macierze

Definicja: **Macierzą** o wymiarze $m \times n$ i elementach a_{ij} , gdzie $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb \mathcal{R} lub \mathcal{C} :

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uwaga: i numeruje wiersze,
 j numeruje kolumny.

Oznaczenia: $\mathbf{A}_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ $a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$

W przypadku gdy $m = n$ macierz nazywamy macierzą **kwadratową** stopnia n .

Macierz jednowierszową lub jednokolumnową nazywamy **wektorem**.

Przykłady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2-i & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 2.4 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \ 0 \ 3 \ 2) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Definicja: Dwie macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są sobie równe wtedy i tylko wtedy kiedy wszystkie elementy macierzy \mathbf{A} są równe odpowiadającym i elementom macierzy \mathbf{B} .

Uwaga: Tylko macierze o tym samym wymiarze mogą być sobie równe.

Działania na macierzach

- Mnożenie macierzy A przez liczbę λ (\mathcal{R} lub \mathcal{C}): $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$
- Dodawanie i odejmowanie macierzy: $A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$

Uwaga: Dodawanie i odejmowanie macierzy ma sens tylko wtedy gdy macierze mają ten sam wymiar.

Uwaga: Dodawanie macierzy jest przemienne i łączne: $A + B = B + A$
 $A + (B + C) = (A + B) + C$

Przykład: Znajdź macierz $D = A + 2B - C$ jeśli dane są macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D = A + 2B - C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

- Macierz **transponowana** to macierz której kolejne wiersze zostały zamienione miejscami z kolumnami:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}] \quad \Rightarrow \quad (A^T)_{n \times m} = [a_{ji}]$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} \equiv A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Działania na macierzach

Uwaga: Macierz nazywamy **symetryczną** jeśli: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ czyli $a_{ij} = a_{ji}$

Macierz nazywamy **antysymetryczną** jeśli: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ czyli $a_{ij} = -a_{ji}$

Dowolną macierz kwadratową można zapisać jako sumę macierzy symetrycznej i antisymetrycznej:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$
$$\mathbf{A}_s^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^T)^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \mathbf{A}_s$$
$$\mathbf{A}_a^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T - (\mathbf{A}^T)^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T - \mathbf{A}) = -\mathbf{A}_a$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \\ \mathbf{A}^T = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a \end{cases}$$

- **Macierz sprzężona w sposób zespolony:** $\mathbf{A} = [a_{ij}] \Rightarrow \mathbf{A}^* = [a_{ij}^*]$
- **Macierz sprzężona po hermitowsku to macierz transponowana i taka której wszystkie elementy zostały sprzęgnięte w sposób zespolony:**

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$$

Uwaga: Macierz nazywamy **hermitowską** jeśli: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ czyli $a_{ij} = a_{ji}^*$

Działania na macierzach

- Mnożenie macierzy:

Iloczynem macierzy $A_{m \times p} = [a_{ik}]$ i $B_{p \times n} = [b_{kj}]$ nazywamy macierz $C_{m \times n} = [c_{ij}]$ której elementy określone są przez:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Przykład:

Math
Player

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 25 & 26 & 27 \end{pmatrix}$$

~~$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = ?$$~~

Definicja mnożenia macierzy

Definicja mnożenia macierzy ma uzasadnienie w *transformacjach liniowych*:

$$\text{Niech } \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{aligned} \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{aligned}$$

Szukamy związków pomiędzy z i x :

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2 + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23})x_3 \\ z_2 &= b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = \\ &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2 + (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23})x_3 \end{aligned}$$

W notacji macierzowej mamy:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ & & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Własności operacji na macierzach

Własności iloczynu macierzy:

- $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times m} \Rightarrow \mathbf{P}_{m \times m} = \mathbf{AB} \quad \mathbf{Q}_{n \times n} = \mathbf{BA} \Rightarrow \mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ oraz $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- $(\mathbf{ABC})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\mathbf{C}^*$ oraz $(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ oraz $(\mathbf{ABC})^\dagger = \mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$

Dowód: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

$$(\mathbf{AB})_{ij}^T = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k (\mathbf{A}^T)_{kj} (\mathbf{B}^T)_{ik} = \sum_k (\mathbf{B}^T)_{ik} (\mathbf{A}^T)_{kj} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)_{ij}$$

Macierz zerowa to macierz, której każdy element jest równy zero:

- $\mathbf{0}_{m \times n} + \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$
- $\mathbf{0}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{0}_{m \times p}$ oraz $\mathbf{C}_{r \times m} \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{0}_{r \times n}$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Iloczyn skalarny wektorów:

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \vec{\mathbf{a}}^\dagger \vec{\mathbf{b}} = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$$

Macierze kwadratowe

Macierz kwadratową o wymiarze $n \times n$ nazywamy macierzą stopnia n .

Definicja: Macierz kwadratową stopnia n nazywamy **diagonalną** jeśli wszystkie jej elementy poza diagonalnymi są równe zero:

$$\mathbf{D} = [d_{ij}] \quad d_{ij} = 0 \text{ gdy } i \neq j$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Definicja: Macierz diagonalną której wszystkie elementy na diagonalu są równe jedności nazywamy macierzą **identycznościową**.

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{I}_n = [\delta_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy \mathbf{A} zachodzi: $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$

Definicja: Śladem macierzy kwadratowej \mathbf{A} nazywamy sumę wszystkich jej elementów diagonalnych:

$$\text{Tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Własności:

- $\text{Tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{Tr } \mathbf{A} \pm \text{Tr } \mathbf{B}$
- $\text{Tr } \mathbf{A}^T = \text{Tr } \mathbf{A}$
- $\text{Tr } \mathbf{A}^\dagger = (\text{Tr } \mathbf{A})^*$
- $\text{Tr } \mathbf{AB} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{BA})_{jj} = \text{Tr } \mathbf{BA}$

Uwaga: Ogólnie zachodzi $\text{Tr } \mathbf{ABC} = \text{Tr } \mathbf{CAB} = \text{Tr } \mathbf{BCA}$

Macierze blokowe

Daną macierz A można podzielić za pomocą $p-1$ linii pionowych oraz $q-1$ linii poziomych na pq podmacierzy (bloków) A_{ij} o wymiarach $m_i \times n_j$ (gdzie $i=1, \dots, q \leq m, j=1, \dots, p \leq n$):

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^q m_i = m \\ \sum_{i=1}^p n_i = n \end{array}$$

Uwaga: Działania na macierzach blokowych wykonujemy tak samo jak na macierzach skalarnych. Przy odpowiednim podziale można znacznie uprościć rachunki.

Przykład:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} C & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & C \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} C & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C & C \\ I & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Transformacje za pomocą macierzy

Macierze można wykorzystać do transformacji liniowych obiektów geometrycznych. Odwzorowanie liniowe z \mathcal{R}^n do \mathcal{R}^m określone jest za pomocą macierzy $A_{m \times n}$:

$$\mathbf{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Własności: $\mathbf{T}(\vec{0}) = \vec{0}$ $\mathbf{T}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{T}(\vec{x}) + \mathbf{T}(\vec{y})$ $\mathbf{T}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathbf{T}(\vec{x})$

Przykład:

- $\mathbf{T}(x, y) = (3x + 4y, x + 5y) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{T}(x) = -3x \Rightarrow A = (-3)$
- $\mathbf{T}(\vec{x}) = \vec{y} \cdot \vec{x} \Rightarrow A = \vec{y}^T = (y_1 \ y_2 \ y_3)$
- $\mathbf{T}(x) = x\vec{y} \Rightarrow A = \vec{y} = (y_1 \ y_2 \ y_3)^T$
- $\mathbf{T}(x, y, z) = (x, y) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{T}(x, y) = (x + y, x - y, 2x - 3y) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
- transformacja identycznościowa: $\mathbf{T}(\vec{x}) = \vec{x}$

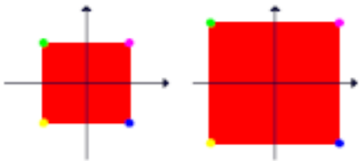
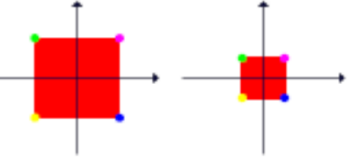
Transformacje za pomocą macierzy

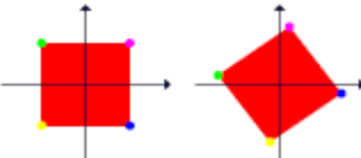
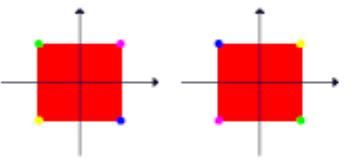
Transformacja liniowa $\mathbf{T}(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$ określona za pomocą macierzy której kolumnami są wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ma własność, że odwzorowuje wektory bazy naturalnej \vec{e}_i w wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$

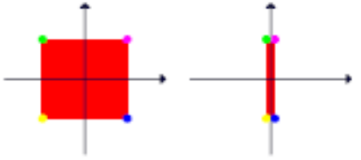
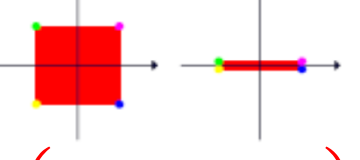
Wniosek: Aby znaleźć macierz transformacji \mathbf{A} należy znaleźć obrazy wektorów bazy naturalnej, a następnie zbudować z nich macierz \mathbf{A} .

Math
Player

Przykład:

■ skalowanie: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ 

■ obrót: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 

■ rzut: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

Rzut na linię w której leży wektor \vec{u} dany jest przez $\mathbf{T}(\vec{x}) = (\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1u_1 & u_2u_1 \\ u_1u_2 & u_2u_2 \end{pmatrix} \vec{x}$