Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 4

Baza w przestrzeni wektorowej V

Definicja: Zbiór liniowo niezależnych wektorów $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ należących do przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nazywamy bazą, jeśli dowolny wektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ może być zapisany w postaci:

$$\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{\mathbf{e}}_i$$

Liczbę n nazywamy wymiarem przestrzeni $\mathcal{V}$ i oznaczamy $dim\mathcal{V}$.

Twierdzenie: Rozkład wektora na składowe w ustalonej bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ jest jednoznaczny.

Dowód: Niech wektor $\vec{\mathbf{x}}$ ma w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ dwa zestawy współrzędnych x_i oraz y_i:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \\ \vec{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\mathbf{e}}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \vec{\mathbf{e}}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad x_i = y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, ..., n$$

Uwaga: dowolny zbiór n liniowo niezależnych wektorów tworzy bazę w n wymiarowej przestrzeni wektorowej. W nowej bazie zmieniają się współrzędne wektorów, np. w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ mamy:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{\mathbf{e}}'_i$$

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Oznaczenie: $\vec{\mathbf{v}} \equiv |\vec{\mathbf{v}}\rangle \qquad \langle\vec{\mathbf{v}}| \equiv |\vec{\mathbf{v}}\rangle^*$

Definicja: Iloczynem wewnętrznym (skalarnym) wektorów z przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{C}$ nazywamy przyporządkowanie uporządkowanej parze $(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}})$ dowolnych wektorów $\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$ liczby zespolonej, oznaczanej przez $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{w}}\rangle$, jeśli spełnione są następujące warunki:

- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}_1\rangle^*$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1|c\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = c\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$ dla każdego $c \in \mathbb{C}$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}\rangle + \langle\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}\rangle$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}\rangle > 0$ jesli $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{0}$

Wnioski:

- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}\rangle$ jest zawsze liczbą rzeczywistą
- $\langle c\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = c^*\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_1\rangle + \langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$

Uwaga: W przypadku przestrzeni wektorowej na ciałem $\mathbb{R}$ iloczyn skalarny dowolnych dwóch wektorów ma z definicje wartość rzeczywistą.

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Definicja: Mówimy, że wektory $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$ są wzajemnie ortogonalne jeśli $\langle \vec{\mathbf{v}}_1 | \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle = 0$

Wniosek: Jedynym wektorem, który jest ortogonalny sam do siebie jest wektor zerowy $\langle \vec{0} | \vec{0} \rangle = 0$.

Definicja: Długością (modułem) wektora $\vec{\mathbf{v}}$ nazywamy liczbę $|\vec{\mathbf{v}}| \equiv \sqrt{\langle \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{v}} \rangle} \geq 0$

Niech $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\}$ będzie ortonormalną bazą w n wymiarowej przestrzeni wektorowej:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \vec{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\mathbf{e}}_i \qquad \vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} b_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

W takiej ortonormalnej bazie współrzędne wektora $\vec{\mathbf{a}}$ są równe:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_j | \vec{\mathbf{a}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{\mathbf{e}}_j | a_i \hat{\mathbf{e}}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \hat{\mathbf{e}}_j | \hat{\mathbf{e}}_i \rangle = a_j$$

Natomiast iloczyn skalarny wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ dany jest przez:

$$\langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\mathbf{e}}_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i \hat{\mathbf{e}}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i \langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i^* b_j \langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Uogólnienie na przypadek kiedy baza $\left\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\right\}$ nie jest ortogonalna:

Definicja: Metryką w przestrzeni wektorowej V nazywamy macierz (n^2 liczb):

$$g_{ij} = \left\langle \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \vec{\mathbf{e}}_j \right\rangle$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ dany jest wówczas przez:

$$\left\langle \vec{\mathbf{a}} \middle| \vec{\mathbf{b}} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{\mathbf{e}}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* b_j \left\langle \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \vec{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* g_{ij} b_j$$

Długość wektora jest zawsze rzeczywista:

$$g_{ij} = g_{ji}^* \quad \Rightarrow \quad \left\langle \vec{\mathbf{a}} \middle| \vec{\mathbf{a}} \right\rangle^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_i g_{ij}^* a_j^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_j^* g_{ji}^* a_i = \left\langle \vec{\mathbf{a}} \middle| \vec{\mathbf{a}} \right\rangle$$

W przestrzeniach $\mathbb{C}^n$ oraz $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy bazę naturalną $\mathbf{e}_i^k = \delta_i^k$ w której i-ty wektor ma wszystkie składowe równe zero z wyjątkiem k-tej równej 1.

W przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ często wprowadzamy definicję iloczynu skalarnego odpowiednio w postaci:

$$\left\langle \vec{\mathbf{v}} \middle| \vec{\mathbf{w}} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \quad \text{oraz} \quad \left\langle \vec{\mathbf{v}} \middle| \vec{\mathbf{w}} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_i$$

Metoda Grama-Schmidta

Mając dowolną bazę $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\}$ można z niej otrzymać bazę ortonormalną $\{\vec{\mathbf{e}}'_1, \vec{\mathbf{e}}'_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}'_n\}$ stosując metodę Grama-Schmidta. Nową bazę konstruujemy rekurencyjnie:

$$\vec{\mathbf{e}}'_1 = \frac{\vec{\mathbf{e}}_1}{\left|\vec{\mathbf{e}}_1\right|}$$

Żądamy aby kolejny wektor był prostopadły do $\vec{\mathbf{e}}'_1$ i miał długość równą 1:

$$\vec{\mathbf{e}}'_2 = \frac{\vec{\mathbf{e}}_2 - \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_1 \middle| \vec{\mathbf{e}}_2 \right\rangle \vec{\mathbf{e}}'_1}{\left|\vec{\mathbf{e}}_2 - \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_1 \middle| \vec{\mathbf{e}}_2 \right\rangle \vec{\mathbf{e}}'_1\right|} \qquad \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_2 \middle| \vec{\mathbf{e}}'_1 \right\rangle = 0 \qquad \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_2 \middle| \vec{\mathbf{e}}'_2 \right\rangle = 1$$

W stosunku do kolejnych wektorów żądamy, aby były ortogonalne do wszystkich znalezionych poprzednio i miały jednostkową długość:

$$\vec{\mathbf{e}}'_3 = \frac{\vec{\mathbf{e}}_3 - \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_1 \middle| \vec{\mathbf{e}}_3 \right\rangle \vec{\mathbf{e}}'_1 - \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_2 \middle| \vec{\mathbf{e}}_3 \right\rangle \vec{\mathbf{e}}'_2}{\left|\vec{\mathbf{e}}_3 - \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_1 \middle| \vec{\mathbf{e}}_3 \right\rangle \vec{\mathbf{e}}'_1 - \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_2 \middle| \vec{\mathbf{e}}_3 \right\rangle \vec{\mathbf{e}}'_2\right|} \qquad \begin{matrix} \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_3 \middle| \vec{\mathbf{e}}'_1 \right\rangle = 0 \\ \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_3 \middle| \vec{\mathbf{e}}'_2 \right\rangle = 0 \end{matrix} \qquad \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_3 \middle| \vec{\mathbf{e}}'_3 \right\rangle = 1$$

Ogólnie stosujemy wzór rekurencyjny:

$$\vec{\mathbf{e}}'_k = \frac{\vec{\mathbf{f}}_k}{\left|\vec{\mathbf{f}}_k\right|} \quad \text{gdzie} \quad \vec{\mathbf{f}}_k = \vec{\mathbf{e}}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \vec{\mathbf{e}}'_i \middle| \vec{\mathbf{e}}_k \right\rangle \vec{\mathbf{e}}'_i$$

Macierze

Definicja: Macierzą o wymiarze $m \times n$ i elementach a_{ij}, gdzie $1 \le i \le m$ oraz $1 \le j \le n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$:

$$\mathbf{A} \equiv \left[a_{ij}\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uwaga: i numeruje wiersze,
j numeruje kolumny.

Oznaczenia: $\mathbf{A}_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $\quad a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$

W przypadku gdy $m = n$ macierz nazywamy macierzą kwadratową stopnia n.

Macierz jednowierszową lub jednokolumnową nazywamy wektorem.

Przykłady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2-i & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 2.4 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Definicja: Dwie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są sobie równe wtedy i tylko wtedy kiedy wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}$ są równe odpowiadającym i elementom macierzy $\mathbf{B}$.

Uwaga: Tylko macierze o tym samym wymiarze mogą być sobie równe.

Działania na macierzach

- Mnożenie macierzy A przez liczbę λ (ℝ lub ℂ): $(\lambda \mathbf{A})_{ij} = \lambda a_{ij}$
- Dodawanie i odejmowanie macierzy: $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left[a_{ij}\right] \pm \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]$

  Uwaga: Dodawanie i odejmowanie macierzy ma sens tylko wtedy gdy macierze mają ten sam wymiar.

  Uwaga: Dodawanie macierzy jest przemienne i łączne: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
  $$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Przykład: Znajdź macierz D = A+2B−C jeśli dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B} - \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

- Macierz transponowana to macierz której kolejne wiersze zostały zamienione miejscami z kolumnami: $\mathbf{A}_{m\times n} = \left[a_{ij}\right] \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)_{n\times m} = \left[a_{ji}\right]$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Działania na macierzach

Uwaga: Macierz nazywamy symetryczną jeśli: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ czyli $a_{ij} = a_{ji}$

Macierz nazywamy antysymetryczną jeśli: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ czyli $a_{ij} = -a_{ji}$

Dowolną macierz kwadratową można zapisać jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathrm{s}} + \mathbf{A}_{\mathrm{a}} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{A}_{\mathrm{s}}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}\right) = -\mathbf{A}_{\mathrm{a}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathrm{s}} + \mathbf{A}_{\mathrm{a}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_{\mathrm{s}} - \mathbf{A}_{\mathrm{a}} \end{cases}$$

- Macierz sprzężona w sposób zespolony: $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{*} = \left[a_{ij}^{*}\right]$
- Macierz sprzężona po hermitowsku to macierz transponowana i taka której wszystkie elementy zostały sprzęgnięte w sposób zespolony:

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \left(\mathbf{A}^{*}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{*}$$

Uwaga: Macierz nazywamy hermitowską jeśli: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$ czyli $a_{ij} = a_{ji}^{*}$

Działania na macierzach

- **Mnożenie macierzy:**

Iloczynem macierzy $A_{m\times p} = [a_{ik}]$ i $B_{p\times n} = [b_{kj}]$ nazywamy macierz $C_{m\times n} = [c_{ij}]$ której elementy określone są przez:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{\vdots} & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Przykład:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 25 & 26 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = ?$$

Definicja mnożenia macierzy

Definicja mnożenia macierzy ma uzasadnienie w *transformacjach liniowych*:

Niech $\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{aligned}$ oraz $\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{aligned}$

Szukamy związków pomiędzy z i x:

$$z_1 = b_{11}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) + b_{12}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) =$$

$$= \left(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}\right)x_1 + \left(b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}\right)x_2 + \left(b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}\right)x_3$$

$$z_2 = b_{21}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) + b_{22}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) =$$

$$= \left(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}\right)x_1 + \left(b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}\right)x_2 + \left(b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23}\right)x_3$$

W notacji macierzowej mamy:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Własności operacji na macierzach

Własności iloczynu macierzy:

- $\mathbf{A}_{m\times n} \quad \mathbf{B}_{n\times m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{m\times m} = \mathbf{AB} \quad \mathbf{Q}_{n\times n} = \mathbf{BA} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ oraz $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
- $(\mathbf{ABC})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\mathbf{C}^*$ oraz $(\mathbf{ABC})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ oraz $(\mathbf{ABC})^{\dagger} = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$

Dowód: $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_k a_{jk}b_{ki} = \sum_k (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{kj}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})_{ik} = \sum_k (\mathbf{B}^{\mathrm{T}})_{ik}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{kj} = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{ij}$$

Macierz zerowa to macierz, której każdy element jest równy zero:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{0}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$
- $\mathbf{0}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{0}_{m\times p}$ oraz $\mathbf{C}_{r\times m}\mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{r\times n}$

Iloczyn skalarny wektorów:

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \vec{\mathbf{a}}^{\dagger}\vec{\mathbf{b}} = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

Macierze kwadratowe

Macierz kwadratową o wymiarze $n \times n$ nazywamy macierzą stopnia n.

Definicja: Macierz kwadratową stopnia n nazywamy diagonalną jeśli wszystkie jej elementy poza diagonalnymi są równe zero:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \left[d_{ij} \right] \qquad d_{ij} = 0 \text{ gdy } i \neq j$$

Definicja: Macierz diagonalną której wszystkie elementy na diagonali są równe jedności nazywamy macierzą identycznościową.

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{I}_n = \left[\delta_{ij} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy A zachodzi: $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$

Definicja: Śladem macierzy kwadratowej A nazywamy sumę wszystkich jej elementów diagonalnych:

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Własności:

- $\mathrm{Tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} \pm \mathrm{Tr}\,\mathbf{B}$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}^{\dagger} = (\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})^{*}$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{BA})_{jj} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BA}$

Uwaga: Ogólnie zachodzi $\mathrm{Tr}\,\mathbf{ABC} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{CAB} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BCA}$

Macierze blokowe

Daną macierz A można podzielić za pomocą $p-1$ linii pionowych oraz $q-1$ linii poziomych na pq podmacierzy (bloków) A_{ij} o wymiarach $m_i \times n_j$ (gdzie $i=1,\ldots,q \leqslant m$, $j=1,\ldots,p \leqslant n$):

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{cc|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \cdots & \mathrm{A}_{1q} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{A}_{p1} & \mathrm{A}_{p2} & \cdots & \mathrm{A}_{pq} \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{q} m_i = m \qquad \sum_{i=1}^{p} n_i = n$$

<u>Uwaga:</u> Działania na macierzach blokowych wykonujemy tak samo jak na macierzach skalarnych. Przy odpowiednim podziale można znacznie uprościć rachunki.

<u>Przykład:</u>

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{C} & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} \mathrm{C} & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{C} & \mathrm{C} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$