Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 4

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Oznaczenie: $\vec{\mathbf{v}} \equiv |\vec{\mathbf{v}}\rangle \qquad \langle\vec{\mathbf{v}}| \equiv |\vec{\mathbf{v}}\rangle^*$

Definicja: Iloczynem wewnętrznym (skalarnym) wektorów z przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathbb{C}$ nazywamy przyporządkowanie uporządkowanej parze $(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}})$ dowolnych wektorów $\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$ liczby zespolonej, oznaczanej przez $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{w}}\rangle$ jeśli spełnione są następujące warunki:

- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}_1\rangle^*$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1|c\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = c\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$ dla każdego $c \in \mathbb{C}$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}\rangle + \langle\vec{\mathbf{v}}_2|\vec{\mathbf{v}}\rangle$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}\rangle > 0$ jesli $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{0}$

Wnioski:

- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}\rangle$ jest zawsze liczbą rzeczywistą
- $\langle c\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = c^*\langle\vec{\mathbf{v}}_1|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$
- $\langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_1\rangle + \langle\vec{\mathbf{v}}|\vec{\mathbf{v}}_2\rangle$

Uwaga: W przypadku przestrzeni wektorowej na ciałem $\mathbb{R}$ iloczyn skalarny dowolnych dwóch wektorów ma z definicje wartość rzeczywistą.

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

<u>Definicja:</u> Mówimy, że wektory $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$ są wzajemnie ortogonalne jeśli $\langle \vec{\mathbf{v}}_1 | \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle = 0$

<u>Wniosek:</u> Jedynym wektorem, który jest ortogonalny sam do siebie jest wektor zerowy $\langle \vec{0} | \vec{0} \rangle = 0$.

<u>Definicja:</u> Długością (modułem) wektora $\vec{\mathbf{v}}$ nazywamy liczbę $|\vec{\mathbf{v}}| \equiv \sqrt{\langle \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{v}} \rangle} \geq 0$

Niech $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ będzie ortonormalną bazą w n wymiarowej przestrzeni wektorowej:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \vec{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\mathbf{e}}_i \qquad \vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} b_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

W takiej ortonormalnej bazie współrzędne wektora $\vec{\mathbf{a}}$ są równe:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_j | \vec{\mathbf{a}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{\mathbf{e}}_j | a_i \hat{\mathbf{e}}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \hat{\mathbf{e}}_j | \hat{\mathbf{e}}_i \rangle = a_j$$

Natomiast iloczyn skalarny wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ dany jest przez:

$$\langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\mathbf{e}}_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i \hat{\mathbf{e}}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i \langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i^* b_j \langle \hat{\mathbf{e}}_i | \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

Iloczyn wewnętrzny (skalarny)

Uogólnienie na przypadek kiedy baza $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ nie jest ortogonalna:

Definicja: Metryką w przestrzeni wektorowej V nazywamy macierz (n^2 liczb):

$$g_{ij} = \langle \vec{\mathbf{e}}_i | \vec{\mathbf{e}}_j \rangle$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ dany jest wówczas przez:

$$\langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{\mathbf{e}}_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{\mathbf{e}}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* b_j \langle \vec{\mathbf{e}}_i | \vec{\mathbf{e}}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* g_{ij} b_j$$

Długość wektora jest zawsze rzeczywista:

$$g_{ij} = g_{ji}^* \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{a}} \rangle^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_i g_{ij}^* a_j^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_j^* g_{ji} a_i = \langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{a}} \rangle$$

W przestrzeniach $\mathbb{C}^n$ oraz $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy bazę naturalną $\mathbf{e}_i^k = \delta_i^k$ w której *i*-ty wektor ma wszystkie składowe równe zero z wyjątkiem *i*-tej równej 1.

W przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ często wprowadzamy definicję iloczynu skalarnego odpowiednio w postaci:

$$\langle \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{w}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_\mathrm{i} \quad \text{oraz} \quad \langle \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{w}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_\mathrm{i}$$

Metoda Grama-Schmidta

Mając dowolną bazę $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ można z niej otrzymać bazę ortonormalną $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n\}$ stosując metodę Grama-Schmidta. Nową bazę konstruujemy rekurencyjnie:

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}$$

Żądamy aby kolejny wektor był prostopadły do $\vec{e}'_1$ i miał długość równą 1:

$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{e}_2 - \langle \vec{e}'_1 | \vec{e}_2 \rangle \vec{e}'_1}{\left|\vec{e}_2 - \langle \vec{e}'_1 | \vec{e}_2 \rangle \vec{e}'_1\right|} \qquad \langle \vec{e}'_2 | \vec{e}'_1 \rangle = 0 \qquad \langle \vec{e}'_2 | \vec{e}'_2 \rangle = 1$$

W stosunku do kolejnych wektorów żądamy, aby były ortogonalne do wszystkich znalezionych poprzednio i miały jednostkową długość:

$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{e}_3 - \langle \vec{e}'_1 | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}'_1 - \langle \vec{e}'_2 | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}'_2}{\left|\vec{e}_3 - \langle \vec{e}'_1 | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}'_1 - \langle \vec{e}'_2 | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}'_2\right|} \qquad \begin{array}{l} \langle \vec{e}'_3 | \vec{e}'_1 \rangle = 0 \\ \langle \vec{e}'_3 | \vec{e}'_2 \rangle = 0 \end{array} \qquad \langle \vec{e}'_3 | \vec{e}'_3 \rangle = 1$$

Ogólnie stosujemy wzór rekurencyjny:

$$\vec{e}'_k = \frac{\vec{f}_k}{|\vec{f}_k|} \quad \textbf{gdzie} \quad \vec{f}_k = \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{e}'_i | \vec{e}_k \rangle \vec{e}'_i$$

Macierze

Definicja: Macierzą o wymiarze $m \times n$ i elementach a_{ij}, gdzie $1 \le i \le m$ oraz $1 \le j \le n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$:

$$\mathbf{A} \equiv \left[a_{ij}\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uwaga: i numeruje wiersze,
j numeruje kolumny.

Oznaczenia: $\mathbf{A}_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $\quad a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$

W przypadku gdy $m = n$ macierz nazywamy macierzą kwadratową stopnia n.

Macierz jednowierszową lub jednokolumnową nazywamy wektorem.

Przykłady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2-i & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 2.4 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Definicja: Dwie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są sobie równe wtedy i tylko wtedy kiedy wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}$ są równe odpowiadającym i elementom macierzy $\mathbf{B}$.

Uwaga: Tylko macierze o tym samym wymiarze mogą być sobie równe.

Działania na macierzach

- **Mnożenie macierzy A przez liczbę λ (ℝ lub ℂ):** $(\lambda \mathbf{A})_{ij} = \lambda a_{ij}$
- **Dodawanie i odejmowanie macierzy:** $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left[a_{ij}\right] \pm \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]$

Uwaga: Dodawanie i odejmowanie macierzy ma sens tylko wtedy gdy macierze mają ten sam wymiar.

Uwaga: Dodawanie macierzy jest przemienne i łączne: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

<u>Przykład:</u> Znajdź macierz D = A+2B–C jeśli dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B} - \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

- **Macierz transponowana to macierz której kolejne wiersze zostały zamienione miejscami z kolumnami:** $\mathbf{A}_{m\times n} = \left[a_{ij}\right] \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)_{n\times m} = \left[a_{ji}\right]$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Działania na macierzach

Uwaga: Macierz nazywamy symetryczną jeśli: $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ czyli $a_{ij}=a_{ji}$

Macierz nazywamy antysymetryczną jeśli: $\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ czyli $a_{ij}=-a_{ji}$

Dowolną macierz kwadratową można zapisać jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\mathrm{s}}+\mathbf{A}_{\mathrm{a}} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A}_{\mathrm{s}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}_{\mathrm{a}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{A}_{\mathrm{s}}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}\right)=-\mathbf{A}_{\mathrm{a}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\mathrm{s}}+\mathbf{A}_{\mathrm{a}}\\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}_{\mathrm{s}}-\mathbf{A}_{\mathrm{a}}\end{cases}$$

- Macierz sprzężona w sposób zespolony: $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right] \Rightarrow \mathbf{A}^{*}=\left[a_{ij}^{*}\right]$
- Macierz sprzężona po hermitowsku to macierz transponowana i taka której wszystkie elementy zostały sprzęgnięte w sposób zespolony:

$$\mathbf{A}^{\dagger}=\left(\mathbf{A}^{*}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{*}$$

Uwaga: Macierz nazywamy hermitowską jeśli: $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\dagger}$ czyli $a_{ij}=a_{ji}^{*}$

Działania na macierzach

- **Mnożenie macierzy:**

Iloczynem macierzy $A_{m\times p} = [a_{ik}]$ i $B_{p\times n} = [b_{kj}]$ nazywamy macierz $C_{m\times n} = [c_{ij}]$ której elementy określone są przez:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Przykład:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 25 & 26 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = ?$$

Definicja mnożenia macierzy

Definicja mnożenia macierzy ma uzasadnienie w *transformacjach liniowych*:

Niech
$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{aligned}$$
oraz
$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{aligned}$$

Szukamy związków pomiędzy z i x:

$$z_1 = b_{11}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) + b_{12}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) =$$
$$= \left(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}\right)x_1 + \left(b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}\right)x_2 + \left(b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}\right)x_3$$
$$z_2 = b_{21}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) + b_{22}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) =$$
$$= \left(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}\right)x_1 + \left(b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}\right)x_2 + \left(b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23}\right)x_3$$

W notacji macierzowej mamy:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Własności operacji na macierzach

Własności iloczynu macierzy:

- $\mathbf{A}_{m\times n} \quad \mathbf{B}_{n\times m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{m\times m} = \mathbf{AB} \quad \mathbf{Q}_{n\times n} = \mathbf{BA} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ oraz $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
- $(\mathbf{ABC})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\mathbf{C}^*$ oraz $(\mathbf{ABC})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ oraz $(\mathbf{ABC})^{\dagger} = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$

Dowód: $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_k a_{jk}b_{ki} = \sum_k (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{kj}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})_{ik} = \sum_k (\mathbf{B}^{\mathrm{T}})_{ik}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{kj} = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{ij}$$

Macierz zerowa to macierz, której każdy element jest równy zero:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{0}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$
- $\mathbf{0}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{0}_{m\times p}$ oraz $\mathbf{C}_{r\times m}\mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{r\times n}$

Iloczyn skalarny wektorów:

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{\mathbf{a}} | \vec{\mathbf{b}} \rangle = \vec{\mathbf{a}}^{\dagger}\vec{\mathbf{b}} = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

Macierze kwadratowe

Macierz kwadratową o wymiarze $n \times n$ nazywamy macierzą stopnia n.

Definicja: Macierz kwadratową stopnia n nazywamy diagonalną jeśli wszystkie jej elementy poza diagonalnymi są równe zero:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \left[d_{ij} \right] \qquad d_{ij} = 0 \text{ gdy } i \neq j$$

Definicja: Macierz diagonalną której wszystkie elementy na diagonali są równe jedności nazywamy macierzą identycznościową.

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{I}_n = \left[\delta_{ij} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ zachodzi: $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$

Definicja: Śladem macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywamy sumę wszystkich jej elementów diagonalnych:

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Własności:

- $\mathrm{Tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} \pm \mathrm{Tr}\,\mathbf{B}$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}^T = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}^\dagger = (\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})^*$
- $\mathrm{Tr}\,\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{BA})_{jj} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BA}$

Uwaga: Ogólnie zachodzi $\mathrm{Tr}\,\mathbf{ABC} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{CAB} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BCA}$

Macierze blokowe

Daną macierz A można podzielić za pomocą $p-1$ linii pionowych oraz $q-1$ linii poziomych na pq podmacierzy (bloków) A_{ij} o wymiarach $m_i \times n_j$ (gdzie $i=1,\dots,q\leqslant m$, $j=1,\dots,p\leqslant n$):

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{q} m_i = m \quad \sum_{i=1}^{p} n_i = n$$

Uwaga: Działania na macierzach blokowych wykonujemy tak samo jak na macierzach skalarnych. Przy odpowiednim podziale można znacznie uprościć rachunki.

Przykład:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} C & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & C \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} C & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C & C \\ I & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Transformacje za pomocą macierzy

Macierze można wykorzystać do transformacji liniowych obiektów geometrycznych. Odwzorowanie liniowe z $\mathcal{R}^n$ do $\mathcal{R}^m$ określone jest za pomocą macierzy $\mathbf{A}_{m\times n}$:

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$$

Własności: $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}} \quad \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}) = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathbf{T}(\vec{\mathbf{y}}) \quad \mathbf{T}(\lambda\vec{\mathbf{x}}) = \lambda\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}})$

Przykład:

- $\mathbf{T}(x,y) = (3x+4y, x+5y) \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{T}(x) = -3x \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = (-3)$
- $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{x}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \vec{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{T}(x) = x\vec{\mathbf{y}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
- $\mathbf{T}(x,y,z) = (x,y) \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{T}(x,y) = (x+y, x-y, 2x-3y) \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
- **transformacja identycznościowa:** $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{x}}$

Transformacje za pomocą macierzy

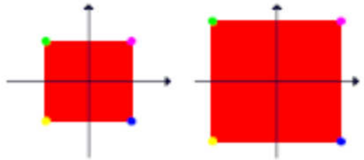
Transformacja liniowa $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ określona za pomocą macierzy której kolumnami są wektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ ma własność, że odwzorowuje wektory bazy naturalnej $\vec{\mathbf{e}}_i$ w wektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$

Wniosek: Aby znaleźć macierz transformacji A należy znaleźć obrazy wektorów bazy naturalnej, a następnie zbudować z nich macierz A.

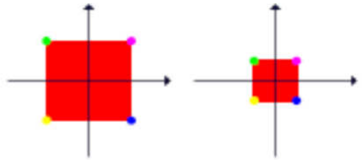
Przykład:

- skalowanie:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

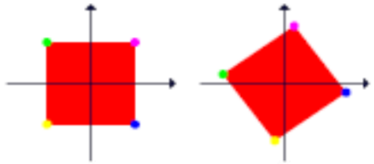


$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

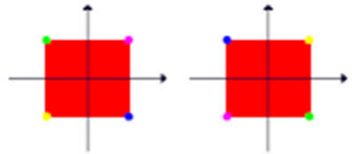


- obrót:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

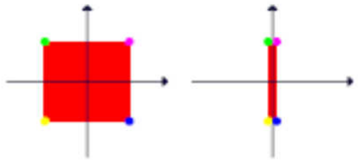


$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

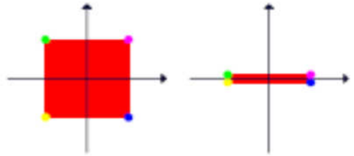


- rzut:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Rzut na linię w której leży wektor $\vec{\mathbf{u}}$ dany jest przez $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_2 u_1 \\ u_1 u_2 & u_2 u_2 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{x}}$