Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 5

Rząd macierzy

Uwaga: Aby doprowadzić macierz do postaci schodkowej, wykonujemy operacje elementarne tylko na jej wierszach.

Definicja: Kolumny oryginalnej macierzy, w których znajdują się elementy wiodące nazywamy kolumnami podstawowymi.

Definicja: Macierz $\mathbf{A}$ jest w postaci schodkowej zredukowanej $\mathbf{E_A}$, jeśli jest w postaci schodkowej i jeśli dodatkowo elementy wiodące są równe 1, a wszystkie pozostałe elementy w kolumnach podstawowych są równe zero.

Uwaga: W postaci schodkowej zredukowanej, zarówno forma macierzy jak i jej poszczególne elementy są określone jednoznacznie.

Definicja: Rzędem macierzy nazywamy (poniższe definicje są równoważne):

- liczbę niezerowych wierszy, po przekształceniu macierzy do postaci schodkowej,
- albo liczbę kolumn podstawowych w oryginalnej macierzy,
- albo liczbę liniowo niezależnych wektorów, których współrzędne w pewnej bazie stanowią kolumny macierzy,
- albo liczbę liniowo niezależnych wektorów, których współrzędne w pewnej bazie stanowią wiersze macierzy.
- albo wymiar największego niezerowego minora macierzy.

Rząd macierzy

<u>Przykład:</u> Znajdź rząd macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1/2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 12 & -9 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 - 4R_2]{R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 15/2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3/17} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 15/2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - 2R_3]{R_1 - 7R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Rząd macierzy A wynosi rz(A)=3

Kolumny podstawowe macierzy A: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Każda nie podstawowa kolumna k macierzy A oraz E_A daje się zapisać jako kombinacja kolumn podstawowych znajdujących się na lewo od niej, ze współczynnikami określonymi przez elementy k-tej kolumny macierzy E_A:

$$E_{*3} = 2E_{*1} + 3E_{*2}$$

$$A_{*3} = 2A_{*1} + 3A_{*2}$$

$$E_{*5} = 4E_{*1} + 2E_{*2} + \frac{1}{2}E_{*4}$$

$$A_{*5} = 4A_{*1} + 2A_{*2} + \frac{1}{2}A_{*4}$$

Rząd macierzy

Przykład: Znajdź rząd macierzy:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{2} & 4 & 2 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 6 & 3 & \boxed{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Kolumny podstawowe

Rząd macierzy A wynosi rz(A)=2

Przykład: Znajdź metodą wyznacznikową rząd macierzy:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Widać, że istnieją minory stopnia 1 i 2 różne od zera, a więc rz(A)$\geqslant$2

Jednocześnie widać, że nie istnieje minor stopnia 4.

Należy sprawdzić czy istnieją niezerowe minory stopnia 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Ponieważ wszystkie minory stopnia 3 są równe zero więc rz(A) = 2.

Macierze elementarne

Definicja: Macierzami elementarnymi nazywamy macierze w postaci $\mathbf{I}-\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ gdzie $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ są kolumnami n×1 takimi, ze $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \neq 1$.

Uwaga: W szczególności jesteśmy zainteresowani macierzami elementarnymi stowarzyszonymi z trzema elementarnymi operacjami na wierszach (kolumnach) macierzy. Macierze takie otrzymujemy z macierzy jednostkowej do której stosujemy operacje elementarne, np.:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Są to macierze elementarne ponieważ ($\mathbf{e}_i$ to jednostkowy wektor kolumnowy):

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T, \text{ gdzie } \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{I} - (1-\alpha)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T \qquad \mathbf{E}_3 = \mathbf{I} + \alpha\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T$$

Powyższą konstrukcję można uogólnić na macierze dowolnego stopnia.

Twierdzenie: Pomnożenie dowolnej macierzy od lewej strony przez macierz elementarną odpowiadającą danej operacji elementarnej (typu E1, E2, E3) jest równoważne wykonaniu tej operacji elementarnej na wierszach tej macierzy.

Natomiast pomnożenie od prawej strony jest równoważne wykonaniu odpowiedniej operacji elementarnej na kolumnach macierzy.

Macierze elementarne

Dowód dla operacji typu E3:

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \left(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^{T}\right)\mathbf{A} = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{e}_j \mathbf{A}_{i*} = \mathbf{A} + \alpha \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \; j\text{–ty wiersz} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_3 = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^{T}\right) = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{A}_{*j} \mathbf{e}_i^{T} = \mathbf{A} + \alpha \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nj} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \; i\text{-ta kolumna} \end{array}$$

<u>Przykład:</u> Iloczyn macierzy elementarnych odpowiadających operacjom z przykładu ze strony 5-5

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{R_2 \leftrightarrow R_3} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{R_3 - 3R_1} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{R_2 - 2R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Układy równań liniowych

Rozważmy układ n równań liniowych o współczynnikach a_{ij} z n niewiadomymi x_i:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = d_n \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie metodą Cramera:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Zastępując pierwszą kolumnę ostatniego wyznacznika przez d_1, d_2, ..., d_n dostajemy:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ d_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Podobne równania możemy znaleźć dla pozostałych niewiadomych w układzie równań.

Wzory Cramera

Wprowadzamy oznaczenia (W – wyznacznik główny układu):

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{W}_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & d_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & d_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & d_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1) Jeśli wyznacznik współczynników **W** jest różny od zera wtedy układ n równań liniowych z n niewiadomymi ma dokładnie jedno rozwiązanie (układ oznaczony) dane przez tzw. wzory Cramera:

$$x_i = \frac{\mathbf{W}_i}{\mathbf{W}} \qquad 1 \le i \le n$$

2) Jeśli **W**=0, ale nie wszystkie $\mathbf{W}_j$, j = 1, ..., n są jednocześnie równe zero, to układ nie ma rozwiązań (układ sprzeczny).

3) Jeśli **W**=0, oraz wszystkie $\mathbf{W}_j$ =0, j = 1, ..., n są jednocześnie równe zero, to przynajmniej jedno z równań układu jest kombinacją liniową pozostałych. Odrzucając to równanie (równania) dostajemy układ równoważny (mający te same rozwiązania) układowi pierwotnemu, ale zawierający mniej równań niż niewiadomych. Układ taki może być sprzeczny lub nieoznaczony.

Układ równań liniowych jednorodnych

Układ równań liniowych w których wszystkie stałe d_i, i = 1,...., n są równe zero nazywamy układem jednorodnym:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

- wszystkie $W_i = 0$, i = 1,...., n
- jeśli wyznacznik główny $W \neq 0$, wtedy jedynym rozwiązaniem układu jednorodnego jest rozwiązanie trywialne tzn. $x_i = 0$, i = 1,...., n
- jeśli wyznacznik $W = 0$, wtedy układ może posiadać rozwiązania nietrywialne.

Przykład: Dla jakich wartości parametru λ układ równań posiada również inne rozwiązania poza rozwiązaniem x=y=0.

$$\begin{cases} (3-\lambda)x + 2y = 0 \\ 4x + (5-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda-1)(\lambda-7) = 0$$

$\Rightarrow$ układ posiada nietrywialne rozwiązania dla λ=1 lub λ=7

$$\lambda = 1: \quad \begin{cases} (3-1)x + 2y = 0 \\ 4x + (5-1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = -x$$

$$\lambda = 7: \quad \begin{cases} (3-7)x + 2y = 0 \\ 4x + (5-7)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 2x$$

Macierz odwrotna

Definicja: Macierz kwadratową A stopnia *n* nazywamy macierzą nieosobliwą jeśli istnieje macierz B taka, że: $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$

Jeśli macierz B nie istnieje, wtedy mówimy, że macierz A jest osobliwa.

Macierz B nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A i oznaczamy $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^{-1}$

- jeśli B jest odwrotnością A, wtedy A jest odwrotnością B:

$$\mathbf{BA} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{BA} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$$

- macierz odwrotna, jeśli istnieje, jest określona jednoznacznie:

niech macierze B i C będą macierzami odwrotnymi do macierzy A, wtedy

$$\mathbf{CA} = \mathbf{AC} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B} \\ (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI} = \mathbf{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

- odwrotność iloczynu macierzy: $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{ABC}(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{I} \\ \mathbf{ABC}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{AB}(\mathbf{CC}^{-1})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- jeśli macierz A jest nieosobliwa to det A ≠ 0

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$$

a więc ani det A ani det $\mathbf{A}^{-1}$ nie mogą być równe zero.

Znajdowanie macierzy odwrotnej

Zgodnie z metodą Cramera, rozwiązania układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

dane są przez $x_i = \dfrac{\mathbf{W}_i}{|\mathbf{A}|}$ gdzie

$$\mathbf{W}_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & d_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & d_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & d_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Rozwijając $\mathbf{W}_i$ względem j-tej kolumny dostajemy $x_i = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{j=1}^{n} d_j \mathbf{C}_{ji}$ gdzie $\mathbf{C}_{ji}$ są odpowiednimi dopełnieniami.

Niech $\mathbf{B}$ będzie macierzą odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$, tzn: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

Ponieważ $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{Bd}$

więc $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} d_j$

Porównując oba rozwiązania układu znajdujemy, że:

$$\boxed{b_{ij} = \frac{\mathbf{C}_{ij}^{\mathrm{T}}}{|\mathbf{A}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}}{\det \mathbf{A}}}$$

Znajdowanie macierzy odwrotnej

<u>Przykład:</u> Stosując metodę Cramera znajdź macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 15 & -6 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Znajdujemy elementy macierzy dopełnień:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \quad c_{12} = -\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 5 \quad c_{13} = \begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad c_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \quad c_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = -1 \quad c_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad c_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} = 3$$

Wyznacznik: $\det A = -3c_{11} + 15c_{21} - 5c_{31} = -1$

Macierz odwrotna: $A^{-1} = \dfrac{C^T}{\det A} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Odwracanie macierzy metodą Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana polega na zastosowaniu elementarnych operacji do układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{Id}$ tak aby przekształcić go do postaci $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Id} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

W celu uzyskania przejrzystości wykonywanych operacji, odwracaną macierz przepisujemy w postaci:

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Jeśli w wyniku zastosowania elementarnych operacji do wierszy tak skonstruowanej macierzy, jej lewa strona stanie się macierzą jednostkową, wtedy prawa strona będzie macierzą odwrotną do macierzy wyjściowej.

Odwracanie macierzy metodą Gaussa-Jordana

<u>Przykład:</u> Stosując metodę Gaussa-Jordana znajdź macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$ z poprzedniego przykładu.

Zapisujemy macierz w postaci blokowej $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}]$ a następnie stosujemy operacje elementarne do jej wierszy

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2/15 \\ -R_3/5}]{-R_1/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -6/15 & 5/15 & 0 & 1/15 & 0 \\ 1 & -2/5 & 2/5 & 0 & 0 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/15 & 0 & 1/3 & 1/15 & 0 \\ 0 & -1/15 & 1/15 & 1/3 & 0 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-15R_2 \\ -15R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1+R_2/3 \\ R_3-R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & -2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1+R_2/3 \\ R_3-R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & -2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_3]{R_1+R_3/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Układy równań liniowych

Rozważmy układ m równań liniowych o współczynnikach a_{ij} z n niewiadomymi x_i:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

W postaci macierzowej powyższy układ równań zapisujemy jako: $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$

- jeśli wszystkie d_i są jednocześnie równe zero, wtedy układ nazywamy jednorodnym,
- jeśli choć jedno d_i jest różne od zera, wtedy układ nazywamy niejednorodnym,
- istnieją dokładnie trzy możliwości dotyczące zbiorów rozwiązań x_i układu liniowego
  - rozwiązanie jednoznaczne, tzn. istnieje dokładnie jeden zbiór wartości x_i spełniający jednocześnie wszystkie równania układu (układ oznaczony)
  - brak rozwiązań, tzn. nie istnieje zbiór wartości x_i spełniający jednocześnie wszystkie równania układu (układ sprzeczny)
  - nieskończenie wiele rozwiązań, tzn. istnieje nieskończenie wiele zbiorów wartości x_i spełniających jednocześnie wszystkie równania układu (układ nieoznaczony)

Istnienie i liczba rozwiązań układu

W celu uproszczenia zapisu przedstawiamy układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ za pomocą tzw. macierzy uzupełnionej $\mathbf{U} = [\mathbf{A}|\mathbf{d}]$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & d_m \end{array}\right)$$

Twierdzenie (o istnieniu i liczbie rozwiązań układu równań liniowych)

- Układ m równań liniowych z n niewiadomymi ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy współczynników $\mathbf{A}$ jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej $\mathbf{U}$.
- Jeśli rz($\mathbf{A}$) = rz($\mathbf{U}$) = r oraz $r < n$ to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r$ parametrów. Rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego ma postać:

$$\vec{x} = \vec{p} + x_{i_1}\vec{h}_{i_1} + x_{i_2}\vec{h}_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-r}}\vec{h}_{i_{n-r}}$$

($\vec{p}$ i $\vec{h}_i$ to wektory kolumnowe n×1; x_i to zmienne traktowane jako parametry)

- Jeśli rz($\mathbf{A}$) = rz($\mathbf{U}$) = r oraz $r = n$ to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- Jeśli rz($\mathbf{A}$) ≠ rz($\mathbf{U}$) to układ nie ma rozwiązań.

Definicja: Dwa układy równań są równoważne, jeśli mają te same zbiory rozwiązań.

Zastosowanie operacji elementarnych (E1, E2 i E3) do wierszy macierzy uzupełnionej, przekształca dany układ równań w układ równoważny.

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa polega na doprowadzeniu macierzy uzupełnionej do postaci schodkowej za pomocą operacji elementarnych stosowanych do jej wierszy.

Przykład: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=11 \\ 2x+3y+z=13 \\ x+y+4z=12 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-\frac{1}{3}R_1]{R_2-\frac{2}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & 17/3 \\ 0 & 1/3 & 11/3 & 25/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3R_3]{3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 11 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 54/5 & 108/5 \end{array}\right)$$

Rzędy macierzy współczynników i uzupełnionej są równe i wynoszą rz(A) = rz(U) = 3

Rozwiązania: $x_3=2 \quad x_2=\frac{1}{5}(17-x_3)=3 \quad x_1=\frac{1}{3}(11-x_3-2x_2)=1$

Math Player

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana polega na dodatkowym wyzerowaniu wszystkich elementów znajdujących się w kolumnie nad elementami wiodącymi.

$$\xrightarrow{\frac{5}{54}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{5}R_2]{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}R_1]{R_1-R_3,\ R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=3 \\ x_3=2 \end{array}$$

Jednorodny układ równań liniowych

Jednorodny układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- układ jednorodny ma zawsze rozwiązanie trywialne tzn. $x_i = 0$, dla $i = 1,\ldots, n$
- jeśli rz$(A) = r$ oraz $r = n$ to układ jednorodny ma tylko rozwiązanie trywialne.
- jeśli rz$(A) = r$ oraz $r < n$ to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r$ parametrów. Ogólne rozwiązanie ma postać:

$$\vec{x} = x_{i_1}\vec{h}_{i_1} + x_{i_2}\vec{h}_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-r}}\vec{h}_{i_{n-r}}$$

Przykład: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \\ 3x + 6y + 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E$$

Ponieważ rz$(A) = n = 3$ więc układ ma tylko rozwiązanie trywialne.
Rónież z postaci macierzy [E|0] stosując podstawienia widać, że $x = y = z = 0$

Metoda eliminacji Gaussa

Przykład: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

oznacza to, że wyjściowy układ równań jest równoważny układowi dwóch równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Wybieramy dwie podstawowe zmienne i wyrażamy poprzez dwie pozostałe:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

Rozwiązanie zapisujemy w postaci:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$