Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 5

Układ dwóch równań liniowych

Rozwiązanie układu dwóch równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = d_1 & / \cdot b_2 \\ a_2 x + b_2 y = d_2 & / \cdot b_1 \end{cases} \Rightarrow \left(b_2 a_1 - b_1 a_2\right) x = b_2 d_1 - b_1 d_2 \Rightarrow x = \frac{d_1 b_2 - d_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Powyższą procedurę można łatwo uogólnić na układy n równań liniowych wprowadzając pojęcie wyznacznika. W szczególności wyznacznik drugiego stopnia to:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ \\ (+) \end{matrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Stosując pojęcie wyznacznika rozwiązanie układu dwóch równań liniowych ma postać:

$$x = \frac{W_x}{W} \quad y = \frac{W_y}{W} \quad \text{gdzie} \quad W_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \quad W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Przykład: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases} \quad W_x = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 14 \quad W_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 28 \quad W = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

A więc rozwiązania to: $x = W_x / W = 1$ oraz $y = W_y / W = 2$

Własności wyznaczników drugiego stopnia

- wartość wyznacznika nie zmienia się przy zamianie wierszy z kolumnami:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- przestawienie dwóch kolumn (wierszy) zmienia znak wyznacznika na przeciwny:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- pomnożenie dowolnego wiersza (kolumny) przez liczbę α jest równoważne pomnożeniu wyznacznika przez α:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1 & b_1 \\ \alpha a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \alpha a_1 b_2 - \alpha a_2 b_1 = \alpha\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- jeśli każdy element danej kolumny (lub wiersza) jest sumą dwóch wyrazów, to wyznacznik jest równy sumie odpowiadających wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \left(a_1 + c_1\right) b_2 - \left(a_2 + c_2\right) b_1 = \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) + \left(c_1 b_2 - c_2 b_1\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Interpretacja geometryczna układu równań

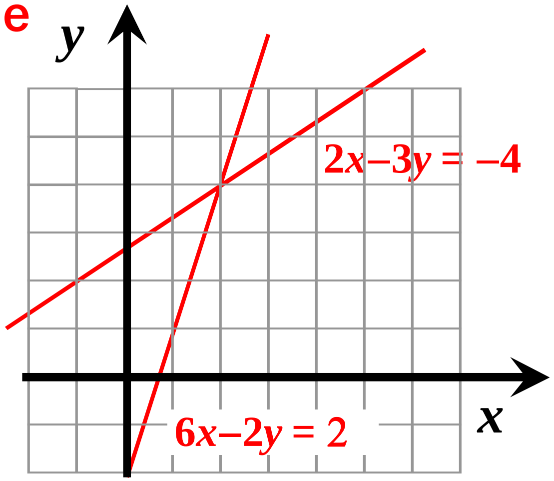
Układ dwóch równań – spojrzenie wierszowe i kolumnowe:

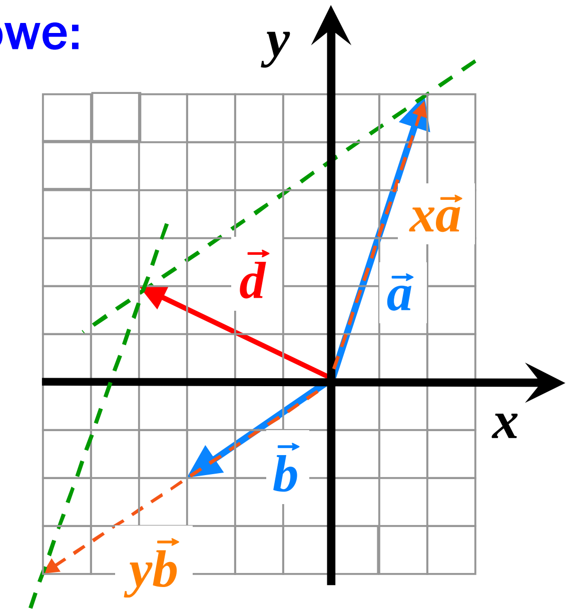
dokładnie jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$x\vec{a} \quad + \quad y\vec{b} \quad = \quad \vec{d}$$

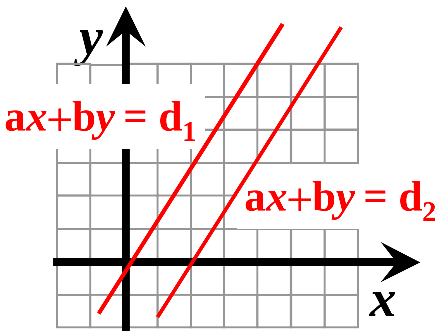
$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

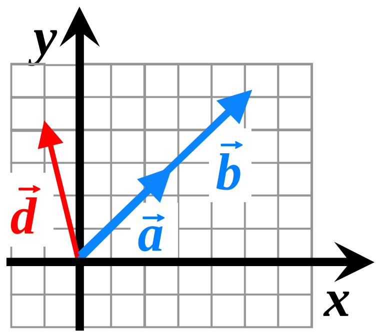




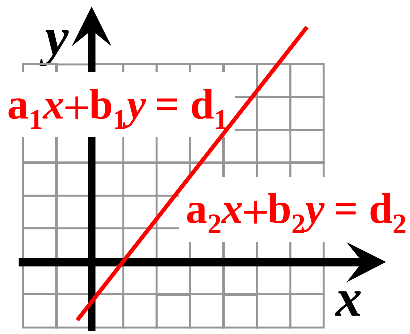
Inne możliwe sytuacje:

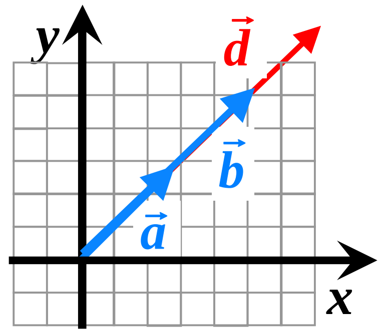
brak rozwiązań (ukł. sprzeczny)





nieskończenie wiele rozwiązań





Układ trzech równań liniowych

Rozwiązanie układu trzech równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 y + c_2 z = d_2 - a_2 x \\ b_3 y + c_3 z = d_3 - a_3 x \end{cases} \Rightarrow y = \frac{W_y}{W} \quad z = \frac{W_z}{W}$$

gdzie

$$W_y = \begin{vmatrix} (d_2 - a_2 x) & c_2 \\ (d_3 - a_3 x) & c_3 \end{vmatrix} \quad W_z = \begin{vmatrix} b_2 & (d_2 - a_2 x) \\ b_3 & (d_3 - a_3 x) \end{vmatrix} \quad W = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Wstawiając za y i z do pierwszego równania i mnożąc przez W dostajemy:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + b_1 \begin{vmatrix} (d_2 - a_2 x) & c_2 \\ (d_3 - a_3 x) & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} b_2 & (d_2 - a_2 x) \\ b_3 & (d_3 - a_3 x) \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

czyli

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + b_1 \left\{ \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x \right\} + c_1 \left\{ \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} x \right\} = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

a więc $Wx = W_x$ gdzie

$$W_x = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad W = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

Układ trzech równań liniowych

Rozwijając wyznaczniki drugiego stopnia otrzymujemy:

$$\mathbf{W} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 - c_1 b_2 a_3 + c_1 b_3 a_2$$

Wprowadzamy wyznacznik trzeciego stopnia:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. \begin{array}{c} (-) \\ \\ (+) \end{array} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

A więc W oraz $\mathbf{W}_x$ możemy zapisać jako wyznaczniki trzeciego stopnia:

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{W}_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

natomiast: $x = \dfrac{\mathbf{W}_x}{\mathbf{W}}$

Podobnie znajdujemy, że:

$y = \dfrac{\mathbf{W}_y}{\mathbf{W}}$ **oraz** $z = \dfrac{\mathbf{W}_z}{\mathbf{W}}$ **gdzie**

$$\mathbf{W}_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{W}_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Układ trzech równań liniowych

Przykład: Rozwiąż układ równań:

Math Player

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 11 \\ 2x + 3y + z = 13 \\ x + y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 2 - 3 - 3 - 16 = 18$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \\ 12 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 132 + 24 + 13 - 36 - 11 - 104 = 18 \qquad x = \frac{W_x}{W} = \frac{18}{18} = 1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 2 & 13 & 1 \\ 1 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 156 + 11 + 24 - 13 - 36 - 88 = 54 \qquad y = \frac{W_y}{W} = \frac{54}{18} = 3$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 108 + 26 + 22 - 33 - 39 - 48 = 36 \qquad z = \frac{W_z}{W} = \frac{36}{18} = 2$$

Wyznacznik macierzy

Definicja: Wyznacznikiem macierzy kwadratowej stopnia n nazywamy liczbę:

$$\det A \equiv |A| \equiv |a_{ij}| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

Twierdzenie:

Wyznacznik macierzy A można zapisać jako $\det A = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n}$

Dowód: (przez przesuwanie wyrazów)

niech $i_{j_1} = 1$ $\quad a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{j_1 i_{j_1}} \dots a_{n i_n} = a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{j_1 1} \dots a_{n i_n} = a_{j_1 1} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n}$

niech $i_{j_2} = 2$ $\quad a_{j_1 1} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{j_2 i_{j_2}} \dots a_{n i_n} = a_{j_1 1} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{j_2 2} \dots a_{n i_n} = a_{j_1 1} a_{j_2 2} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n}$

postępując tak dalej otrzymujemy ostatecznie $\quad a_{j_1 1} a_{j_2 2} a_{j_3 3} \dots a_{j_n n}$

ponieważ ciąg $j_1, j_2, \dots, j_n$ otrzymujemy z przestawienia ciągu $i_1, i_2, \dots, i_n$ (permutacja odwrotna) więc

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$$

Minory i dopełnienia

Definicja: Minorem $\mathbf{M}_{ij}$ odpowiadającym elementowi a_{ij} macierzy $\mathbf{A}_{n\times n}$ nazywamy wyznacznik stopnia $(n-1)$ utworzony z macierzy $\mathbf{A}$ po wykreśleniu i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Definicja: Dopełnieniem elementu a_{ij} macierzy $\mathbf{A}_{n\times n}$ nazywamy: $\mathbf{D}_{ij} = (-1)^{i+j}\,\mathbf{M}_{ij}$

Przykład: Znajdź minory oraz dopełnienia elementów a_{11} i a_{23} macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{D}_{11} = (-1)^{1+1}\,\mathbf{M}_{11} = 4$$

$$\mathbf{M}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{D}_{23} = (-1)^{2+3}\,\mathbf{M}_{23} = 9$$

Rozwinięcie Laplace'a

Twierdzenie: **Wyznacznik macierzy dowolnego stopnia można obliczyć stosując rozwinięcie Laplace'a względem dowolnego wiersza lub kolumny:**

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, \mathbf{M}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \mathbf{D}_{ij} \qquad \text{dla dowolnego } i$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, \mathbf{M}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \mathbf{D}_{ij} \qquad \text{dla dowolnego } j$$

Dowód:

minor $\mathbf{M}_{ij}$ – wyznacznik stopnia $n-1$ czyli suma $(n-1)!$ iloczynów po jednym elemencie z każdego wiersza i każdej kolumny, z wyjątkiem i-tego wiersza i j-tej kolumny.

$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} a_{ij}\, \mathbf{M}_{ij}$ – suma $n(n-1)! = n!$ iloczynów po jednym elemencie z każdego wiersza i każdej kolumny.

rozważmy wyrazy w definicji wyznacznika zawierające element a_{11} tzn. $i_1 = 1$

$$\sum_{i_2,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{1 i_2 \dots i_n} a_{11} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = a_{11} \sum_{i_2,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_2 \dots i_n} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = a_{11} \mathbf{M}_{11} \quad \Rightarrow \quad k_{11} = +1$$

Uwaga: ponieważ parzystości permutacji $1 i_2 i_3 \dots i_n$ oraz $i_2 i_3 \dots i_n$ są sobie równe więc także $\varepsilon_{1 i_2 i_3 \dots i_n} = \varepsilon_{i_2 i_3 \dots i_n}$

Rozwinięcie Laplace'a

Rozważmy teraz wyrazy w definicji wyznacznika zawierające dowolny, ale element a_{ij}.
Aby przesunąć ten element do lewego, górnego rogu wyznacznika, musimy wykonać $(i-1)+(j-1)$ transpozycji wierszy i kolumn, a więc:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

W wyznaczniku po prawej stronie miejsce a_{11} zajął element a_{ij}, a więc suma wszystkich wyrazów w tym wyznaczniku zawierających a_{ij} jest równa $a_{ij}\mathrm{M}_{ij}$
Z drugiej strony, suma wszystkich wyrazów zawierających a_{ij} w wyznaczniku po lewej stronie jest równa $k_{ij}a_{ij}\mathrm{M}_{ij}$

Porównując obie strony powyższej równości znajdujemy, że

$$k_{ij}a_{ij}\,\mathrm{M}_{ij} = (-1)^{i+j-2}\,a_{ij}\,\mathrm{M}_{ij} \quad \Rightarrow \quad k_{ij} = (-1)^{i+j}$$

Obliczanie wyznacznika

<u>Przykład:</u> **Oblicz wyznacznik macierzy A korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem (a) pierwszego wiersza, (b) drugiego wiersza, (c) drugiej kolumny.**

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2+i & -1 & 1 \\ 1-3i & 2 & i \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Math Player

$$\det \mathbf{A} = (2+i)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & i \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1-3i & i \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1-3i & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(2+i) + (-2(1-3i) - i) + 2 = -12 + i$$

$$\det \mathbf{A} = (1-3i)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2+i & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (i)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2+i & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(1-3i) + 2(-2(2+i) - 1) - i = -12 + i$$

$$\det \mathbf{A} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1-3i & i \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2+i & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2+i & 1 \\ 1-3i & i \end{vmatrix} =$$

$$= -2(1-3i) - i + 2(-2(2+i) - 1) + 0 = -12 + i$$

Własności wyznacznika macierzy

- $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

D: $\det \mathrm{A} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})_{i_1 1} (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})_{i_2 2} \ldots (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})_{i_n n} = \det \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

- przestawienie dowolnych dwóch wierszy (kolumn) macierzy powoduje zmianę znaku jej wyznacznika na przeciwny.

D: zamiana miejscami k-tej i l-tej kolumny ($l>k$) odpowiada wykonaniu $2(l-k)-1$ transpozycji, co oznacza, że zmienia znak $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ a więc również wyznacznik macierzy.

- wyznacznik macierzy z dwiema identycznymi kolumnami (wierszami) jest równy zero.

D: zamiana miejscami dwóch identycznych kolumn (wierszy) nie zmienia macierzy natomiast zmienia znak jej wyznacznika na przeciwny, a więc $\det \mathrm{A} = -\det \mathrm{A} = 0$

- pomnożenie wszystkich elementów wiersza (lub kolumny) wyznacznika przez stałą κ jest równoważne pomnożeniu wyznacznika przez tą stałą:

D:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \kappa a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \kappa a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \kappa a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \kappa a_{ij} \mathrm{D}_{ij} = \kappa \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathrm{D}_{ij} = \kappa \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

w szczególności: $\det(\kappa \mathrm{A}) = \kappa^n \det \mathrm{A}$

Własności wyznacznika macierzy

- jeśli każdy element w danej kolumnie (lub wierszu) jest sumą dwóch wyrazów, to wyznacznik jest równy sumie dwóch odpowiadających mu wyznaczników

D:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\mathrm{D}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{D}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathrm{D}_{ij} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- wartość wyznacznika nie ulega zmianie, jeśli do dowolnej kolumny (wiersza) dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn (wierszy) macierzy.

D:
$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1k} + \sum\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} c_l a_{1l} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{nk} + \sum\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} c_l a_{nl} & \cdots \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \cdots & a_{1k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{nk} & \cdots \end{vmatrix}}_{\det A} + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} c_l \underbrace{\begin{vmatrix} \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1l} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nl} & \cdots \end{vmatrix}}_{=0} = \det A$$

Własności wyznacznika macierzy

- $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

D: prawdziwe są następujące tożsamości:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \dots a_{j_n i_n}$$

$$\det A \det B = \det A \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n = 1}^{n} \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_n n} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n = 1}^{n} \left(\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \det A\right) b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_n n} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n = 1}^{n} \left(\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{j_1 k_1} a_{j_2 k_2} \dots a_{j_n k_n} \right) b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_n n} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \left(\sum_{k_1 = 1}^{n} a_{j_1 k_1} b_{k_1 1} \right) \left(\sum_{k_2 = 1}^{n} a_{j_2 k_2} b_{k_2 2} \right) \dots \left(\sum_{k_n = 1}^{n} a_{j_n k_n} b_{k_n n} \right) =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} c_{j_1 1} c_{j_2 2} \dots c_{j_n n} = \det C = \det(AB)$$

Wyznaczniki - przykłady

Przykład: Wyznacznik macierzy trójkątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots\, a_{nn}$$

Przykład: Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -i \\ 2+i & 0 & i \\ 0 & 1-i & i \end{vmatrix} = \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+R_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -i \\ 3+i & 1 & 0 \\ 1 & 2-i & 0 \end{vmatrix} = (-i)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3+i & 1 \\ 1 & 2-i \end{vmatrix} = -1-6i$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -i \\ 2+i & 0 & i \\ 0 & 1-i & i \end{vmatrix} = \xrightarrow[C_3+iC_1]{C_2-C_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+i & -2-i & -1+3i \\ 0 & 1-i & i \end{vmatrix} = (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2-i & -1+3i \\ 1-i & i \end{vmatrix} = -1-6i$$

Przykład: Wyznacznik macierzy blokowej.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{ABC}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \det \mathbf{C}$$

Uwaga: macierze na przekątnej $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ muszą być macierzami kwadratowymi.

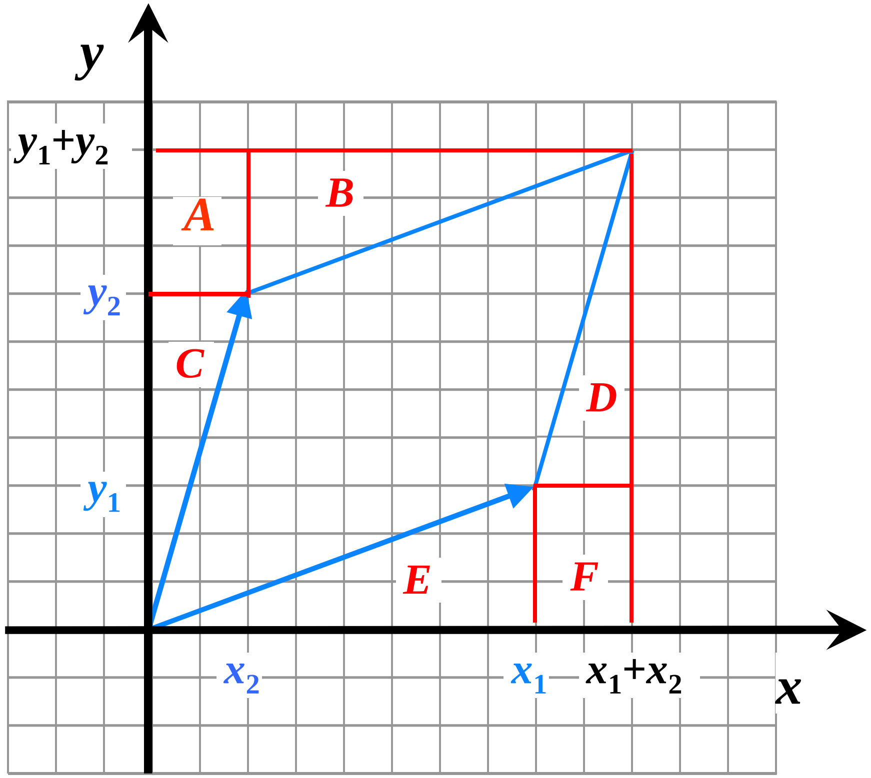
Interpretacja geometryczna wyznacznika

Twierdzenie: **Objętość równoległościanu w $\mathbb{R}^n$ zbudowanego na wektorach $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jest równa modułowi z wyznacznika macierzy której kolumnami są te wektory.**

Dowód: (dla $n = 2$)

$$P_{\square} = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - x_2 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_2 - \frac{1}{2} x_1 y_1 - x_2 y_1 =$$

$$= x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$



Dowód: (dla $n = 3$)

$$\left|\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})\right| = \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_x & u_x & w_x \\ v_y & u_y & w_y \\ v_z & u_z & w_z \end{vmatrix}$$

Dowód: (dla dowolnego n) - w przyszłości