Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 6

Liniowa niezależność wektorów

Przykład: Sprawdzić czy następujące wektory z przestrzeni $\mathcal{C}^3$ tworzą bazę:

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sprawdzamy czy te wektory są liniowo niezależne:

$$\sum_{i=1}^{3} c_i \vec{\mathbf{e}}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ det $\mathbf{A}$ = 1, więc układ ma tylko rozwiązanie zerowe $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, a więc wektory są liniowo niezależne.

Twierdzenie: Dowolny układ wektorów $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$ z przestrzeni $\mathcal{C}^n$ lub $\mathcal{R}^n$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy macierz $\mathbf{A} = \left[\vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2 \ldots \vec{\mathbf{e}}_n\right]$ której kolumnami są te wektory, jest nieosobliwa.

Wniosek: Aby sprawdzić czy wektory są liniowo niezależne należy zbudować z nich macierz i sprawdzić rząd tej macierzy, który określa liczbę liniowo niezależnych wektorów w danym zbiorze.

Zbiór wektorów tworzących bazę

Aby przekonać się, że wektory $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ tworzą bazę w C^3 należy pokazać, że dowolny wektor $\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$ można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową tych wektorów:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{\mathbf{e}}_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = a \\ 2v_1 + v_2 + 3v_3 = b \\ v_1 - v_2 + 2v_3 = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a - 3b + 2c \\ -a + b - c \\ -3a + 2b - c \end{pmatrix}$$

Uwaga: a, b, c to współrzędne wektora w bazie naturalnej,

v_1, v_2, v_3 to współrzędne tego samego wektora w bazie $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$

Uwaga: W przypadku n wymiarowej przestrzeni, dowolny zbiór n liniowo niezależnych wektorów tworzy bazę w tej przestrzeni.

Twierdzenie: W n wymiarowej przestrzeni wektorowej, każdy układ s wektorów n wymiarowych dla s>n jest układem wektorów liniowo zależnych.

Twierdzenie: Jeżeli pewien podukład $m<n$ wektorów z układu wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ jest liniowo zależny, to cały układ jest też liniowo zależny.

Ważne klasy macierzy kwadratowych

- macierz symetryczna: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
- macierz antysymetryczna: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det(-\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = (-1)^n \det \mathbf{A}$$

a więc dla n nieparzystych $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 0$

- macierz ortogonalna: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \det \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \det \mathbf{A} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det \mathbf{A})^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = \pm 1$$

- macierz hermitowska: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$

$$\det \mathbf{A}^{\dagger} = \det \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}^{*\mathrm{T}}) = \det \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad (\det \mathbf{A})^* = \det \mathbf{A} \in \mathcal{R}$$

- macierz antyhermitowska: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\dagger}$
- macierz normalna to dla której zachodzi: $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}$
- macierz unitarna: $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$\det(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}) = \det \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A}^{*\mathrm{T}} \det \mathbf{A} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det \mathbf{A})^* \det \mathbf{A} = 1$$

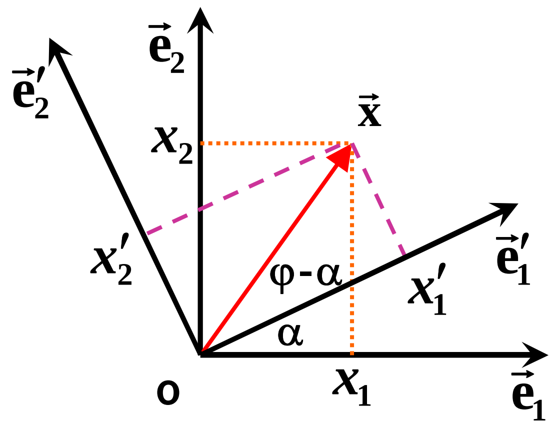
$$\Rightarrow \quad |\det \mathbf{A}|^2 = 1$$

- macierz unimodularna: $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ **oraz** $\det \mathbf{A} = 1$

Obroty układu współrzędnych w 2D

Obrót układu współrzędnych w dwóch wymiarach.

$$\vec{\mathbf{x}} = x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad \vec{\mathbf{x}} = x_1'\vec{\mathbf{e}}_1' + x_2'\vec{\mathbf{e}}_2'$$



Płaszczyzna zespolona jest 2-dim przestrzenią wektorową:

$$z = x_1 + ix_2 \qquad z' = x_1' + ix_2' \qquad z' = z\,e^{-i\alpha}$$

$$z' = z\,e^{-i\alpha} = (x_1 + ix_2)(\cos\alpha - i\sin\alpha) =$$

$$= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha + i(-x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)$$

$$\begin{cases} x_1' = \cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot x_2 \\ x_2' = -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j$$

Zapis macierzowy: $\vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$

$$\vec{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

<u>Przykład:</u> Złożenie obrotów (proszę sprawdzić poniższy związek).

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Obroty układu współrzędnych w 2D

<u>Twierdzenie:</u> **Przy obrotach na płaszczyźnie, iloczyny skalarny i zewnętrzny dowolnych dwóch wektorów leżących w tej płaszczyźnie, nie zmieniają się.**

<u>Dowód:</u>

$$\begin{cases} u_1' = \cos\alpha \cdot u_1 + \sin\alpha \cdot u_2 \\ u_2' = -\sin\alpha \cdot u_1 + \cos\alpha \cdot u_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1' = \cos\alpha \cdot v_1 + \sin\alpha \cdot v_2 \\ v_2' = -\sin\alpha \cdot v_1 + \cos\alpha \cdot v_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}' \cdot \vec{v}' &= u_1' v_1' + u_2' v_2' = \left(u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha\right)\left(v_1 \cos\alpha + v_2 \sin\alpha\right) + \\
&+ \left(-u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha\right)\left(-v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha\right) = \\
&= u_1 v_1 \cos^2\alpha + u_1 v_2 \sin\alpha\cos\alpha + u_2 v_1 \sin\alpha\cos\alpha + u_2 v_2 \sin^2\alpha + \\
&+ u_1 v_1 \sin^2\alpha - u_1 v_2 \sin\alpha\cos\alpha - u_2 v_1 \sin\alpha\cos\alpha + u_2 v_2 \cos^2\alpha = \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 = \vec{u} \cdot \vec{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}' \wedge \vec{v}' &= u_1' v_2' - u_2' v_1' = \left(u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha\right)\left(-v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha\right) + \\
&+ \left(-u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha\right)\left(v_1 \cos\alpha + v_2 \sin\alpha\right) = \\
&= u_1 v_2 - u_2 v_1 = \vec{u} \wedge \vec{v}
\end{aligned}$$

Transformacje współrzędnych w 3D

Układ współrzędnych w trzech wymiarach jest określony przez podanie trzech wektorów bazowych $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$. Niech będą to wektory ortogonalne, a sam układ prawoskrętny

$$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \qquad \vec{\mathbf{e}}_i \times \vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_k$$

Dowolny wektor można przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazowych:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \quad \text{gdzie} \quad x_i = \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_i$$

Rozważmy teraz inną bazę ortonormalną: $\vec{\mathbf{e}}_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \vec{\mathbf{e}}_j$ gdzie $a_{ij} = \vec{\mathbf{e}}_i' \cdot \vec{\mathbf{e}}_j$

Ortonormalność wektorów bazy „primowanej”:

$$\delta_{ij} = \vec{\mathbf{e}}_i' \cdot \vec{\mathbf{e}}_j' = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} \vec{\mathbf{e}}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{3} a_{jl} \vec{\mathbf{e}}_l \right) = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} \vec{\mathbf{e}}_k \cdot \vec{\mathbf{e}}_l = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk}$$

Równie dobrze można przedstawić wektory bazy $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ w bazie „primowanej”:

$$\vec{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}' \vec{\mathbf{e}}_j' \quad \text{gdzie} \quad a_{ij}' = \vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j' = a_{ji}$$

Relacja ortonormalności: $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}' a_{jk}' = \sum_{k=1}^{3} a_{ki} a_{kj}$

Transformacje współrzędnych w 3D

W zapisie macierzowym, relacje ortonormalności mają postać $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

<u>Uwaga:</u> W n-dim przestrzeni liczba niezależnych elementów macierzy obrotu wynosi:

$$n^2 - \left[\frac{1}{2}\left(n^2-1\right)+\left(n-1\right)+1\right] = \frac{1}{2}n\left(n-1\right)$$

(na płaszczyźnie 2D – kąt obrotu; w przestrzeni 3D – trzy kąty Eulera)

Chcemy teraz znaleźć relacje pomiędzy współrzędnymi wektorów w bazach $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ i $\{\vec{\mathbf{e}}_i'\}$:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{3} x_i'\vec{\mathbf{e}}_i' = \sum_{i=1}^{3} x_i'\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^{3} x_j\vec{\mathbf{e}}_j \quad \Rightarrow \quad x_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}x_i'$$

Transformacje odwrotną dostajemy korzystając z relacji ortonormalności dla a_{ij}:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{kj}x_j = \sum_{j=1}^{3} a_{kj}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}x_i' = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{kj}a_{ij}x_i' = \sum_{i=1}^{3}\delta_{ki}x_i' = x_k'$$

Podsumowanie:

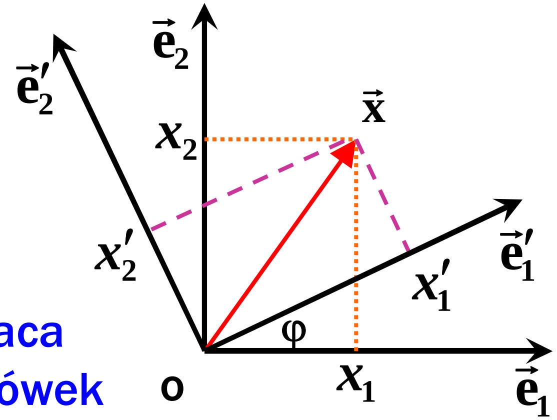
$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{3} x_i'\vec{\mathbf{e}}_i' = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{\mathbf{e}}_i \qquad \vec{\mathbf{e}}_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\vec{\mathbf{e}}_j \qquad \vec{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\vec{\mathbf{e}}_j'$$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \qquad x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}x_j' \qquad \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}a_{kj}$$

Obroty układu współrzędnych

Macierz obrotu w dwóch wymiarach:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



Możliwe dwie interpretacje obrotu:

- **pasywna – wektor nie zmienia położenia, natomiast obraca się układ (baza) w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (+φ). Wtedy x_i i x_i' to współrzędne tego samego wektora w różnych bazach:**

$$\vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1' = \cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot x_2 \\ x_2' = -\sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_i' = a_{ij} x_j$$

- **aktywna – obraca się wektor, natomiast baza pozostaje niezmienna. Wtedy x_i to współrzędne wektora $\vec{\mathbf{x}}$ natomiast x_i' to współrzędne innego wektora $\vec{\mathbf{x}}'$ otrzymanego przez obrót wektora $\vec{\mathbf{x}}$ o kąt (−φ).**

$$\vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1' = \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot x_2 \\ x_2' = \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_i' = a_{ji} x_j$$

Macierz obrotu w 3D

Macierz obrotu w 3D wokół osi z ma postać:

$$\mathbf{R}(\varphi) = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz obrotu do układu gdzie nowa oś z' jest skierowana w kierunku dowolnego wektora $\vec{\mathbf{v}}$ znajdujemy w następujący sposób:

- wykonujemy obrót wokół wspólnej osi z - z' o kąt φ gdzie macierz obrotu to $\mathbf{R}(\varphi)$, tak aby wektor $\vec{\mathbf{v}}$ znalazł się w płaszczyźnie $x'z'$:

$$\vec{\mathbf{e}}_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\vec{\mathbf{e}}_j$$

- wykonujemy obrót wokół osi y' o kąt $-\theta$ tak aby oś z' pokryła się z wektorem $\vec{\mathbf{v}}$. Macierz tego obrotu dana jest przez:

$$[b_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

W wyniku złożenia obu obrotów otrzymujemy:

$$\vec{\mathbf{e}}_i'' = \sum_{j=1}^{3} b_{ij}\vec{\mathbf{e}}_j' = \sum_{j,k=1}^{3} b_{ij}a_{jk}\vec{\mathbf{e}}_k = \sum_{k=1}^{3} c_{ik}\vec{\mathbf{e}}_k$$

Macierz obrotu w 3D

W wyniku złożenia tych dwóch obrotów otrzymujemy macierz:

$$\mathbf{R}(\varphi,\theta)=\left[c_{ij}\right]=\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Aby otrzymać pełną macierz obrotu w 3D, reprezentującą dowolny obrót, należy jeszcze wykonać obrót o kąt ψ w płaszczyźnie $x''z''$ wokół osi z'':

$$\left[d_{ij}\right]=\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pełną macierz obrotu otrzymamy ze złożenia: $\left[\mathbf{R}(\varphi,\theta,\psi)\right]_{ij}=\sum_{k.l=1}^{3} d_{ik}b_{kl}a_{lj}$

$$\mathbf{R}(\varphi,\theta,\psi)=$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\theta\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Kąty φ, θ, ψ to tzw. kąty Eulera określające wzajemną orientację układów współrzędnych.

Macierz przejścia pomiędzy bazami w $\mathcal{R}^n$

Niech będą dane dwie dowolne bazy w $\mathcal{R}^n$: $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ oraz $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$, i=1,...,n. Szukamy macierzy przejścia pomiędzy tymi bazami, takiej że (k numeruje elementy wektorów e_i i e_i'):

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\vec{\mathbf{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}'_{k1} = c_{11}\mathbf{e}_{k1} + c_{21}\mathbf{e}_{k2} + \ldots + c_{n1}\mathbf{e}_{kn} \\ \mathbf{e}'_{k2} = c_{12}\mathbf{e}_{k1} + c_{22}\mathbf{e}_{k2} + \ldots + c_{n2}\mathbf{e}_{kn} \\ \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_{kn} = c_{1n}\mathbf{e}_{k1} + c_{2n}\mathbf{e}_{k2} + \ldots + c_{nn}\mathbf{e}_{kn} \end{cases}$$

W zapisie macierzowym mamy (E i E' to macierze, których kolumnami są wektory baz):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{11} & \mathbf{e}'_{12} & \cdots & \mathbf{e}'_{1n} \\ \mathbf{e}'_{21} & \mathbf{e}'_{22} & \cdots & \mathbf{e}'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}'_{n1} & \mathbf{e}'_{n2} & \cdots & \mathbf{e}'_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \cdots & \mathbf{e}_{1n} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} & \cdots & \mathbf{e}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{n1} & \mathbf{e}_{n2} & \cdots & \mathbf{e}_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'$$

Macierz transformacji pomiędzy bazami $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ oraz $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ dana jest przez macierz:

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'$$

Transformacje współrzędnych wektora

Niech będą dane dwie dowolne bazy w $\mathcal{R}^n$: $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ oraz $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$, i=1,...,n. Szukamy macierzy przejścia pomiędzy współrzędnymi dowolnego wektora w tych bazach:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{\mathbf{e}}'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{i,j=1}^{n} x'_i c_{ji} \vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\mathbf{e}}_j \qquad \Rightarrow \qquad x_j = \sum_{i=1}^{n} x'_i c_{ji}$$

W zapisie macierzowym mamy: $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}' \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{C}^{-1}\vec{\mathbf{x}}$

A więc macierz transformacji współrzędnych $\mathbf{O}$ dana jest przez:

$$\mathbf{O} \equiv \mathbf{C}^{-1} = \left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'\right)^{-1} = \mathbf{E}'^{-1}\mathbf{E}$$

Math Player

Twierdzenie: Macierz transformacji współrzędnych pomiędzy bazami ortonormalnymi, jest ortogonalna.

$$\mathbf{O}^{-1} = \left(\mathbf{E}'^{-1}\mathbf{E}\right)^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}' = \left\| \begin{matrix} \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{E}'^{-1} = \mathbf{E}'^{\mathrm{T}} \end{matrix} \right\| = \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{E}'^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{E}'^{-1}\mathbf{E}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$$

Uwaga: Macierz której kolumny (lub wiersze) są wzajemnie ortogonalnymi wektorami o jednostkowej długości, jest ortogonalna.

Transformacje za pomocą macierzy

Macierze można wykorzystać do transformacji liniowych obiektów geometrycznych.
Odwzorowanie liniowe z $\mathcal{R}^n$ do $\mathcal{R}^m$ określone jest za pomocą macierzy $\mathbf{A}_{m\times n}$:

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$$

Własności: $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}} \quad \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}) = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}})+\mathbf{T}(\vec{\mathbf{y}}) \quad \mathbf{T}(\lambda\vec{\mathbf{x}}) = \lambda\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}})$

<u>Przykład:</u>

- $\mathbf{T}(x,y) = (3x+4y, x+5y) \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{T}(x) = -3x \Rightarrow \mathbf{A} = (-3)$
- $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{A} = \vec{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{T}(x) = x\vec{\mathbf{y}} \Rightarrow \mathbf{A} = \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
- $\mathbf{T}(x,y,z) = (x,y) \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{T}(x,y) = (x+y, x-y, 2x-3y) \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
- transformacja identycznościowa: $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{x}}$

Transformacje za pomocą macierzy

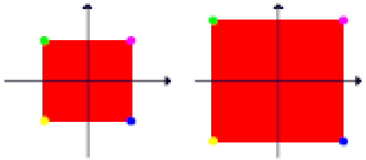
Transformacja liniowa $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ określona za pomocą macierzy której kolumnami są wektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ ma własność, że odwzorowuje wektory bazy naturalnej $\vec{\mathbf{e}}_i$ w wektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$

Wniosek: Aby znaleźć macierz transformacji $\mathbf{A}$ należy znaleźć obrazy wektorów bazy naturalnej, a następnie zbudować z nich macierz $\mathbf{A}$.

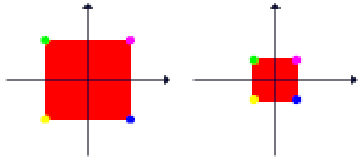
Przykład:

- skalowanie:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

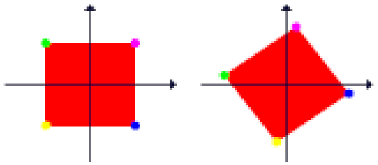


$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

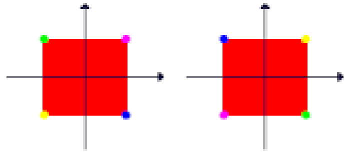


- obrót:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

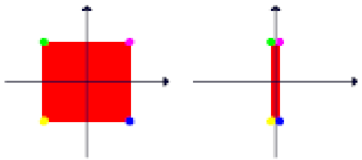


$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

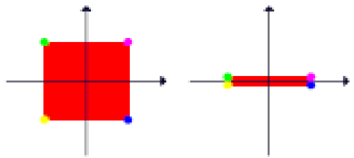


- rzut:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Rzut na linię w której leży wektor $\vec{\mathbf{u}}$ dany jest przez $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_2 u_1 \\ u_1 u_2 & u_2 u_2 \end{pmatrix}\vec{\mathbf{x}}$

Dla zainteresowanych

Odwrotności sum macierzy:

- generalnie dla macierzy mamy: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$
- macierz $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ może być osobliwa nawet gdy macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są nieosobliwe.

Tylko w szczególnych przypadkach można podać ogólny wzór na odwrotność sumy macierzy:

Twierdzenie: Niech $\mathbf{c}$ oraz $\mathbf{d}$ będą macierzami kolumnowymi o wymiarze n×1 takimi, że $1+\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{c} \neq 0$. Spełniona jest wówczas następująca tożsamość: $(\mathbf{I}+\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{I} - \dfrac{\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}}{1+\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}}$

(dowód przez bezpośrednie wymnożenie)

Twierdzenie: (Formuła Shermana-Morrisona) Niech $\mathbf{A}_{n\times n}$ będzie nieosobliwą macierzą i niech $\mathbf{c}$ oraz $\mathbf{d}$ będą macierzami kolumnowymi o wymiarze n×1 takimi, że $1+\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \neq 0$. Spełniona jest wówczas następująca tożsamość:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}}$$

Dowód:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}})^{-1} = \left(\mathbf{A}\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} = \left(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{A}^{-1} =$$

$$= \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}}{1+\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}}\right)\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}}$$

Dla zainteresowanych

<u>Przykład:</u> Załóżmy, że znamy macierz $\mathbf{A}$ i jej odwrotność $\mathbf{A}^{-1}$. Następnie do elementu a_{ij} dodajemy α. Znajdź odwrotność tak zmodyfikowanej macierzy $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{c}\mathbf{d}^{\mathrm{T}} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{c} = \mathbf{e}_i \\ \mathbf{d} = \alpha \mathbf{e}_j \end{matrix} \right\| = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \left(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \alpha \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1}}{1 + \alpha \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_i} = \mathbf{A}^{-1} - \alpha \frac{\left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{\bullet i} \left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{j \bullet}}{1 + \alpha \left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{ji}}$$

Niech: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ czyli $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Znajdź macierz odwrotną do $\mathbf{A}$ po dodaniu 1 do elementu a_{21}.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \alpha \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_2} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{\bullet 2} \left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{1 \bullet}}{1 + \left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{21}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}}{1 - 2} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$