Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 6

Układy równań liniowych

Rozważmy układ n równań liniowych o współczynnikach a_{ij} z n niewiadomymi x_i:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = d_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie metodą Cramera:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Zastępując pierwszą kolumnę ostatniego wyznacznika przez d_1, d_2, ..., d_n dostajemy:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ d_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Podobne równania możemy znaleźć dla pozostałych niewiadomych w układzie równań.

Wzory Cramera

Wprowadzamy oznaczenia (W – wyznacznik główny układu):

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{W}_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & d_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & d_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & d_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1) Jeśli wyznacznik współczynników **W** jest różny od zera wtedy układ n równań liniowych z n niewiadomymi ma dokładnie jedno rozwiązanie (układ oznaczony) dane przez tzw. wzory Cramera:

$$x_i = \frac{\mathbf{W}_i}{\mathbf{W}} \qquad 1 \le i \le n$$

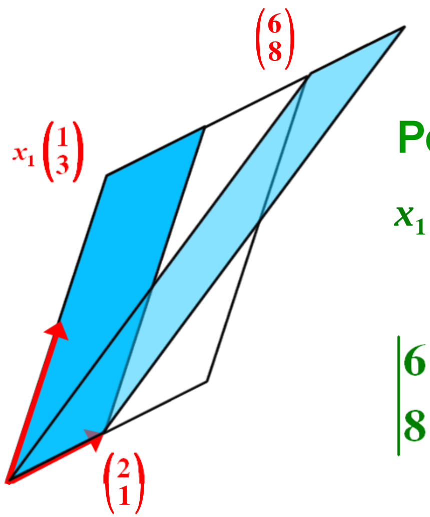
2) Jeśli **W**=0, ale nie wszystkie $\mathbf{W}_j$, j = 1, ..., n są jednocześnie równe zero, to układ nie ma rozwiązań (układ sprzeczny).

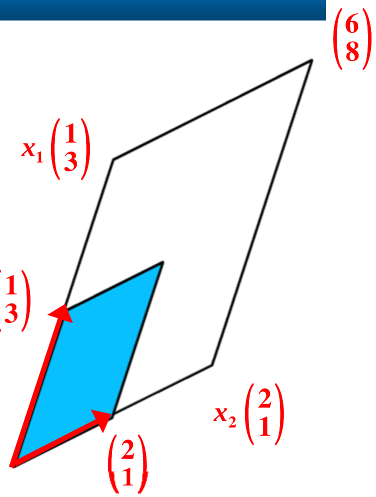
3) Jeśli **W**=0, oraz wszystkie $\mathbf{W}_j$ =0, j = 1, ..., n są jednocześnie równe zero, to przynajmniej jedno z równań układu jest kombinacją liniową pozostałych. Odrzucając to równanie (równania) dostajemy układ równoważny (mający te same rozwiązania) układowi pierwotnemu, ale zawierający mniej równań niż niewiadomych. Układ taki może być sprzeczny lub nieoznaczony.

Wzory Cramera - interpretacja geometryczna

<u>Przykład:</u> Rozwiąż układ równań metodą wyznacznikową (Cramera):

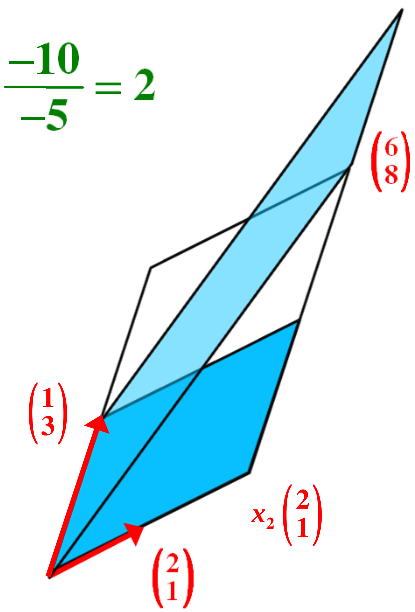
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$$





Pola równoległoboków zbudowanych z wektorów $x_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ oraz $x_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ są równe:

$$\begin{vmatrix}6 & 2\\8 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1\cdot 1 & 2\\x_1\cdot 3 & 1\end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix}6 & 2\\8 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2$$



Pola równoległoboków zbudowanych z wektorów $x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ oraz $x_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ są równe:

$$\begin{vmatrix}1 & 6\\3 & 8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & x_2\cdot 2\\3 & x_2\cdot 1\end{vmatrix} = x_2\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 6\\3 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Układ równań liniowych jednorodnych

Układ równań liniowych w których wszystkie stałe d_i, i = 1,...., n są równe zero nazywamy układem jednorodnym:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

- wszystkie $W_i = 0$, $i = 1,\ldots, n$
- jeśli wyznacznik główny W ≠ 0, wtedy jedynym rozwiązaniem układu jednorodnego jest rozwiązanie trywialne tzn. $x_i = 0$, $i = 1,\ldots, n$
- jeśli wyznacznik W = 0, wtedy układ może posiadać rozwiązania nietrywialne.

Przykład: Dla jakich wartości parametru λ układ równań posiada również inne rozwiązania poza rozwiązaniem x=y=0.

$$\begin{cases} (3-\lambda)x + 2y = 0 \\ 4x + (5-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda-1)(\lambda-7) = 0$$

$\Rightarrow$ układ posiada nietrywialne rozwiązania dla λ=1 lub λ=7

$$\lambda = 1: \quad \begin{cases} (3-1)x + 2y = 0 \\ 4x + (5-1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = -x$$

$$\lambda = 7: \quad \begin{cases} (3-7)x + 2y = 0 \\ 4x + (5-7)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 2x$$

Postać schodkowa macierzy

Definicja: Operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy to:

- (E1) zamiana miejscami dwóch wierszy (kolumn),
- (E2) pomnożenie wszystkich elementów dowolnego wiersza (kolumny) przez liczbę różną od zera,
- (E3) dodanie do dowolnego wiersza (kolumny) kombinacji liniowej pozostałych wierszy (kolumn).

Definicja: Macierz $\mathbf{A}$ jest w postaci schodkowej jeśli spełnione są następujące warunki:

- wszystkie niezerowe wiersze występują powyżej wierszy zerowych,
- jeśli pierwszy niezerowy element w danym wierszu pojawia się w kolumnie j, to wszystkie elementy w tej kolumnie w kolejnych wierszach są równe zero,
- pierwszy niezerowy element w każdym niezerowym wierszu, pojawia się w dalszej (bardziej na prawo) kolumnie, niż pierwszy niezerowy element w poprzednim wierszu.

element wiodący w pierwszym wierszu jest różny od zera

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elementy wiodące

Rząd macierzy

Uwaga: Aby doprowadzić macierz do postaci schodkowej, wykonujemy operacje elementarne tylko na jej wierszach.

Definicja: Kolumny oryginalnej macierzy, w których znajdują się elementy wiodące nazywamy kolumnami podstawowymi.

Definicja: Macierz $\mathbf{A}$ jest w postaci schodkowej zredukowanej $\mathbf{E_A}$, jeśli jest w postaci schodkowej i jeśli dodatkowo elementy wiodące są równe 1, a wszystkie pozostałe elementy w kolumnach podstawowych są równe zero.

Uwaga: W postaci schodkowej zredukowanej, zarówno forma macierzy jak i jej poszczególne elementy są określone jednoznacznie.

Definicja: Rzędem macierzy nazywamy (poniższe definicje są równoważne):

- liczbę niezerowych wierszy, po przekształceniu macierzy do postaci schodkowej,
- albo liczbę kolumn podstawowych w oryginalnej macierzy,
- albo liczbę liniowo niezależnych wektorów, których współrzędne w pewnej bazie stanowią kolumny macierzy,
- albo liczbę liniowo niezależnych wektorów, których współrzędne w pewnej bazie stanowią wiersze macierzy.
- albo wymiar największego niezerowego minora macierzy.

Rząd macierzy

<u>Przykład:</u> Znajdź rząd macierzy:

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&-8&6&3\\0&1&3&2&3\\3&-2&0&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1/2}\begin{pmatrix}1&-2&-4&3&3/2\\0&1&3&2&3\\3&-2&0&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1&-2&-4&3&3/2\\0&1&3&2&3\\0&4&12&-9&7/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-4R_2]{R_1+2R_2}\begin{pmatrix}1&0&2&7&15/2\\0&1&3&2&3\\0&0&0&-17&-17/2\end{pmatrix}\xrightarrow{-R_3/17}\begin{pmatrix}1&0&2&7&15/2\\0&1&3&2&3\\0&0&0&1&1/2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2-2R_3]{R_1-7R_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0&4\\0&1&3&0&2\\0&0&0&1&1/2\end{pmatrix}$$

Rząd macierzy A wynosi rz(A)=3

Kolumny podstawowe macierzy A: $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

Każda nie podstawowa kolumna k macierzy A oraz E_A daje się zapisać jako kombinacja liniowa kolumn podstawowych znajdujących się na lewo od niej, ze współczynnikami określonymi przez elementy k-tej kolumny macierzy E_A:

$$E_{*3}=2E_{*1}+3E_{*2}$$

$$A_{*3}=2A_{*1}+3A_{*2}$$

$$E_{*5}=4E_{*1}+2E_{*2}+\frac{1}{2}E_{*4}$$

$$A_{*5}=4A_{*1}+2A_{*2}+\frac{1}{2}A_{*4}$$

Rząd macierzy

<u>Przykład:</u> Znajdź rząd macierzy:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&1&\boxed{1}\\ \boxed{2}&4&2&\boxed{2}\\ \boxed{3}&6&3&\boxed{4}\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=E$$

Kolumny podstawowe

Rząd macierzy A wynosi rz(A)=2

<u>Przykład:</u> Znajdź metodą wyznacznikową rząd macierzy:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\4&5&6&1\\7&8&9&1\end{pmatrix}$$

Widać, że istnieją minory stopnia 1 i 2 różne od zera, a więc rz(A)$\geqslant$2

Jednocześnie widać, że nie istnieje minor stopnia 4.

Należy sprawdzić czy istnieją niezerowe minory stopnia 3:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=0\qquad\begin{vmatrix}1&2&1\\4&5&1\\7&8&1\end{vmatrix}=0\qquad\begin{vmatrix}1&3&1\\4&6&1\\7&9&1\end{vmatrix}=0\qquad\begin{vmatrix}2&3&1\\5&6&1\\8&9&1\end{vmatrix}=0$$

Ponieważ wszystkie minory stopnia 3 są równe zero więc rz(A) = 2.

Układy równań liniowych

Rozważmy układ m równań liniowych o współczynnikach a_{ij} z n niewiadomymi x_i:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

W postaci macierzowej powyższy układ równań zapisujemy jako: $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$

- jeśli wszystkie d_i są jednocześnie równe zero, wtedy układ nazywamy jednorodnym,
- jeśli choć jedno d_i jest różne od zera, wtedy układ nazywamy niejednorodnym,
- istnieją dokładnie trzy możliwości dotyczące zbiorów rozwiązań x_i układu liniowego
  - rozwiązanie jednoznaczne, tzn. istnieje dokładnie jeden zbiór wartości x_i spełniający jednocześnie wszystkie równania układu (układ oznaczony)
  - brak rozwiązań, tzn. nie istnieje zbiór wartości x_i spełniający jednocześnie wszystkie równania układu (układ sprzeczny)
  - nieskończenie wiele rozwiązań, tzn. istnieje nieskończenie wiele zbiorów wartości x_i spełniających jednocześnie wszystkie równania układu (układ nieoznaczony)

Metoda eliminacji Gaussa

Definicja: Dwa układy równań są **równoważne**, jeśli mają te same zbiory rozwiązań.

Twierdzenie: Zamiana miejscami dwóch równań lub pomnożenie stronami równania przez stałą różną od zera lub dodanie do równania kombinacji liniowej innych równań przekształca dany układ równań w układ równoważny.

Przykład: Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{cases} x+y+z=9 \\ 2y-5z=-17 \\ 3y-8z=-27 \end{cases} \xrightarrow[-2R_3]{R_3-\frac{3}{2}R_2} \begin{cases} x+y+z=9 \\ 2y-5z=-17 \\ z=3 \end{cases}$$

Stosując wsteczne podstawianie otrzymujemy: $z=3, \quad y=-1, \quad x=7.$

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=-3 \\ 2x+2y=-2 \end{cases} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \begin{cases} x+3y=1 \\ -5y=-5 \\ -4y=-4 \end{cases} \xrightarrow{R_3-\frac{4}{5}R_2} \begin{cases} x+3y=1 \\ -5y=-5 \\ 0=0 \end{cases}$$

Stosując wsteczne podstawianie otrzymujemy: $y=1, \quad x=-2.$

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=-3 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \begin{cases} x+3y=1 \\ -5y=-5 \\ -4y=-2 \end{cases} \xrightarrow{R_3-\frac{4}{5}R_2} \begin{cases} x+3y=1 \\ -5y=-5 \\ 0=2 \end{cases}$$

Brak rozwiązań.

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} x+\quad y+\quad z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+5y-2z=10 \end{cases} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{cases} x+\quad y+\quad z=9 \\ \qquad 2y-5z=-17 \\ \qquad 2y-5z=-17 \end{cases} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{cases} x+\quad y+\quad z=9 \\ \qquad 2y-5z=-17 \\ \qquad\qquad 0=0 \end{cases}$$

Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań: $y=\frac{1}{2}(5z-17), \quad x=-y-z+9=\frac{1}{2}(-7z+9)$

Definicja: W każdym wierszu (równaniu) pierwszą niezerową zmienną nazywamy **zmienną wiodącą**. Układ jest w **postaci schodkowej** jeśli każda zmienna wiodąca znajduje się na prawo od zmiennej wiodącej w równaniu powyżej (nie dotyczy pierwszego równania).

Wnioski: W metodzie Gaussa doprowadzamy układ równań do postaci schodkowej. Jeśli każda zmienna jest zmienną wiodącą wtedy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jeśli choć jedna zmienna nie jest zmienną wiodącą i układ nie jest sprzeczny to ma nieskończenie wiele rozwiązań.

W celu uproszczenia zapisu przedstawiamy układ równań **Ax** = **d** za pomocą tzw. macierzy uzupełnionej U = [A|d]=

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & d_m \end{array}\right)$$

Twierdzenie: Zastosowanie operacji elementarnych (E1, E2 i E3) do wierszy macierzy uzupełnionej, przekształca dany układ równań w układ równoważny.

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

Metoda eliminacji Gaussa polega na doprowadzeniu macierzy uzupełnionej do postaci schodkowej za pomocą operacji elementarnych stosowanych do jej wierszy.

Przykład: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=11 \\ 2x+3y+z=13 \\ x+y+4z=12 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-\frac{1}{3}R_1]{R_2-\frac{2}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & 17/3 \\ 0 & 1/3 & 11/3 & 25/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3R_3]{3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 11 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 54/5 & 108/5 \end{array}\right)$$

Rzędy macierzy współczynników i uzupełnionej są równe i wynoszą rz(A) = rz(U) = 3

Rozwiązania: $x_3=2 \quad x_2=\frac{1}{5}(17-x_3)=3 \quad x_1=\frac{1}{3}(11-x_3-2x_2)=1$

Math Player

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana polega na dodatkowym wyzerowaniu wszystkich elementów znajdujących się w kolumnie nad elementami wiodącymi.

$$\xrightarrow{\frac{5}{54}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{5}R_2]{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}R_1]{R_1-R_3,\ R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=3 \\ x_3=2 \end{array}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Układy równań o nieskończonej liczbie rozwiązań – opis zbioru rozwiązań.

Przykład: Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Zmienne wiodące wyrażamy za pomocą zmiennych swobodnych, które traktujemy jako parametry:

$$x_4 = -1 \qquad x_2 = \frac{1}{4}x_3 \qquad x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3$$

Sposoby zapisu zbioru rozwiązań:

$$\left\{1 - \frac{1}{4}x_3, \frac{1}{4}x_3, x_3, -1 \,\middle|\, x_3 \in \mathcal{R}\right\} \qquad \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_3 \,\middle|\, x_3 \in \mathcal{R}\right\}$$

Rzędy macierzy współczynników i uzupełnionej są równe i wynoszą rz(A) = rz(U) = 3 < 4

Definicja: Zmienne, które nie są wiodące w postaci schodkowej, nazywamy swobodnymi.

Istnienie i liczba rozwiązań układu

Przykład: Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+\ \ y=-3 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-\frac{4}{5}R_2} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Układ nie ma rozwiązań (ukł. sprzeczny).

Rzędy macierzy współczynników i uzupełnionej są różne rz(A) = 2 ≠ rz(U) = 3

Twierdzenie (o istnieniu i liczbie rozwiązań układu równań liniowych)

- Układ m równań liniowych z n niewiadomymi ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy współczynników $\mathbf{A}$ jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej $\mathbf{U}$.
- Jeśli rz(A) = rz(U) = r oraz $r < n$ to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r$ parametrów. Rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego ma postać:

$$\vec{x} = \vec{p} + x_{i_1}\vec{h}_{i_1} + x_{i_2}\vec{h}_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-r}}\vec{h}_{i_{n-r}}$$

($\vec{p}$ i $\vec{h}_i$ to wektory kolumnowe n×1; x_i to zmienne traktowane jako parametry)

- Jeśli rz(A) = rz(U) = r oraz $r = n$ to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- Jeśli rz(A) ≠ rz(U) to układ nie ma rozwiązań.

Jednorodny układ równań liniowych

Jednorodny układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- układ jednorodny ma zawsze rozwiązanie trywialne tzn. $x_i = 0$, dla $i = 1, \ldots, n$
- jeśli rz(A) = r oraz $r = n$ to układ jednorodny ma tylko rozwiązanie trywialne.
- jeśli rz(A) = r oraz $r < n$ to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r$ parametrów. Ogólne rozwiązanie ma postać:

$$\vec{x} = x_{i_1}\vec{h}_{i_1} + x_{i_2}\vec{h}_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-r}}\vec{h}_{i_{n-r}}$$

Przykład: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \\ 3x + 6y + 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{E}$$

Ponieważ rz(A) = n = 3 więc układ ma tylko rozwiązanie trywialne.
Rónież z postaci macierzy [E|0] stosując podstawienia widać, że $x = y = z = 0$

Metoda eliminacji Gaussa

Przykład: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

oznacza to, że wyjściowy układ równań jest równoważny układowi dwóch równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ \qquad\qquad -3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Wybieramy dwie wiodące zmienne
i wyrażamy poprzez dwie pozostałe:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

Rozwiązanie zapisujemy w postaci:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$