# Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 7

# Zmiana bazy i transformacje podobieństwa

Macierz przejścia pomiędzy dwoma bazami $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ i $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ zdefiniowaliśmy przez:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\vec{\mathbf{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'$$

Natomiast transformacje współrzędnych dowolnego wektora przy zmianie bazy mają wówczas postać:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x'_i c_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}'$$

Znajdziemy teraz prawa transformacyjne dla macierzy reprezentujących operatory liniowe przy zmianie bazy. Równanie operatorowe $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ można zapisać jako równanie macierzowe w każdej z baz $\vec{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ oraz $\vec{\mathbf{y}}' = \mathbf{A}'\vec{\mathbf{x}}'$

Korzystając ze związków określających transformacje współrzędnych wektorów mamy:

$$\mathbf{C}\vec{\mathbf{y}}' = \mathbf{A}\mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}' \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{y}}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}'$$

Relację pomiędzy macierzami $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ określoną przez $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ nazywamy transformacją podobieństwa. O macierzach $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ mówimy, że są podobne.

Uwaga: Macierze podobne reprezentują ten sam operator liniowy $\mathcal{A}$ w różnych bazach. dlatego wszystkie własności operatora niezależne od bazy posiadają też macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$.

# Własności macierzy podobnych

Ogólne własności transformacji podobieństwa $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$

- $\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{I}$ D: $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{I}$
- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$

  D: $\det \mathbf{A}' = \det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\right) = \det \mathbf{S}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{S} = \det \mathbf{A} \det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\right) = \det \mathbf{A}$
- $\mathrm{Tr}\, \mathbf{A} = \mathrm{Tr}\, \mathbf{A}'$

  D: $\mathrm{Tr}\, \mathbf{A}' = \sum_i A'_{ii} = \sum_{i,j,k} \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{ij} A_{jk} S_{ki} = \sum_{i,j,k} S_{ki} \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{ij} A_{jk} = \sum_{j,k} \delta_{kj} A_{jk} = \sum_j A_{jj} = \mathrm{Tr}\, \mathbf{A}$

W przypadku gdy S jest macierzą unitarną, tzn. $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{\dagger}$ wtedy: $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S}$

Transformacje unitarne przekształcają bazy ortonormalne w bazy ortonormalne:

$$\left\langle \vec{\mathbf{e}}'_i \middle| \vec{\mathbf{e}}'_j \right\rangle = \left\langle \sum_k \mathbf{S}_{ki} \vec{\mathbf{e}}_k \middle| \sum_r \mathbf{S}_{rj} \vec{\mathbf{e}}_r \right\rangle = \sum_k \mathbf{S}^*_{ki} \sum_r \mathbf{S}_{rj} \left\langle \vec{\mathbf{e}}_k \middle| \vec{\mathbf{e}}_r \right\rangle = \sum_k \mathbf{S}^*_{ki} \sum_r \mathbf{S}_{rj} \delta_{kr} = \sum_k \mathbf{S}^*_{ki} \mathbf{S}_{kj} = \left(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{S}\right)_{ij} = \delta_{ij}$$

Dla transformacji unitarnych mamy:

- $\mathbf{A}^{\dagger} = \pm\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{A}'\right)^{\dagger} = \left(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)^{\dagger} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S} = \pm\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S} = \pm\mathbf{A}'$
- $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{A}'\right)^{\dagger}\mathbf{A}' = \left(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)^{\dagger}\left(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S}\right) = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S} =$

  $= \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{I}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{S} = \mathbf{I}$

# Problem własny

**Problemem własnym** dla macierzy kwadratowej $\mathbf{A}_{n\times n}$ nazywamy znalezienie wielkości skalarnych $\lambda$ (**wartości własnych**) oraz niezerowych wektorów $\vec{\mathbf{x}}$ (**wektorów własnych**) spełniających jednocześnie **równanie własne**: $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}} = 0$

Powyższy układ ma nietrywialne rozwiązania tylko wtedy gdy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

Równanie to nazywamy **równaniem charakterystycznym**. Sam wyznacznik po rozwinię-ciu jest wielomianem (w. charakterystyczny) $w(\lambda)$ stopnia $n$ z wyrazem wiodącym $(-1)^n\lambda^n$

<u>Dowód:</u> Z definicji wyznacznika mamy:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \left(a_{1i_1} - \delta_{1i_1}\lambda\right)\left(a_{2i_2} - \delta_{2i_2}\lambda\right)\dots\left(a_{ni_n} - \delta_{ni_n}\lambda\right)$$

Najwyższą potęgę $\lambda$ otrzymujemy z wyrazu:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) = (-1)^n\lambda^n + O\left(\lambda^{n-1}\right)$$

<u>Twierdzenie:</u> Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy gdy ma zerową wartość własną.

$$\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\mathbf{A} = 0$$

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy **spektrum** i oznaczamy $\sigma(\mathbf{A})$.

# Wartości własne i wektory własne

<u>Twierdzenie:</u> Dowolna kombinacja liniowa wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadających tej samej wartości własnej $\lambda$ jest także wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym tej wartości własnej $\lambda$.

D : Niech $\vec{\mathbf{x}} = c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n \vec{\mathbf{x}}_n$ oraz $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda \vec{\mathbf{x}}_i$

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n \vec{\mathbf{x}}_n\right) = c_1 \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_1 + c_2 \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_n =$$

$$= c_1\lambda \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\lambda \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\lambda \vec{\mathbf{x}}_n = \lambda\left(c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n \vec{\mathbf{x}}_n\right) = \lambda \vec{\mathbf{x}}$$

W szczególności dowolny wektor własny pomnożony przez stałą różną od zera jest również wektorem własnym odpowiadającym tej samej wartości własnej.

<u>Przykład:</u> Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

a więc mamy dwie wartości własne: $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$

wektory własne: $\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_1 = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3: \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_2 = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Math Player

# Wartości własne i wektory własne

Przykład: Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

a więc mamy dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1 + i$ i $\lambda_2 = 1 - i$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 1 + i: \quad \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2-i)\,x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 - (2+i)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Z każdego z równań otrzymujemy $x_1 = (2+i)\,x_2$

A więc wektorem własnym do wartości własnej $\lambda_1$ jest $\vec{\mathbf{v}}_1 = x_2 \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$

Podobnie znajdujemy, że wektorem własnym do wartości własnej $\lambda_2$ jest:

$$\vec{\mathbf{v}}_2 = x_2 \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie: Jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest rzeczywista wtedy zespolone wartości własne występują zawsze w parach wzajemnie sprzężonych, tzn. jeśli $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \lambda^* \in \sigma(\mathbf{A})$

# Wartości własne i wektory własne

Przykład: Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = (\lambda - 5)(\lambda + 3)^2 = 0$$

a więc mamy trzy wartości własne (w tym jedną podwójną):

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -3$$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 5: \quad \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

A więc wektorem własnym do wartości własnej $\lambda_1$ jest $\vec{v}_1 = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{2,3} = -3: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

co oznacza, że: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

# Wartości własne i wektory własne

Możemy wyrazić $x_1$ poprzez $x_2$ i $x_3$, przy czym $x_2$ i $x_3$ mogą przyjmować dowolne wartości. Niech $x_2$=$c_3$ i $x_3$=$c_3$, wówczas możemy napisać:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $c_2$ i $c_3$ są dowolne, możemy najpierw ustalić $c_3$ = 0 i znaleźć jeden wektor własny, a następnie $c_2$ = 0 i znaleźć drugi wektor własny. W rezultacie znajdujemy dwa różne wektory własne do zdegenerowanej wartości własnej $\lambda = -3$:

$$\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

W tym przykładzie mamy tylko dwie różne wartości własne ale wciąż trzy różne wektory własne.

Uwaga: Jeśli istnieje $n$ różnych wartości własnych, to zawsze będziemy mieli $n$ różnych wektorów własnych. Powtarzające się wartości własne nazywamy zdegenerowanymi. Zdegenerowanej wartości własnej może odpowiadać tylko jeden albo więcej różnych wektorów własnych.

# Wartości własne i wektory własne

<u>Przykład:</u> Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

a więc mamy trzy wartości własne (w tym jedną podwójną): $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

A więc wektorem własnym do wartości własnej $\lambda_1$ jest $\vec{v}_1 = c_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{2,3} = 2: \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Math Player

Rozwiązanie układu zależy od jednego parametru $x_3 = c_3$: $\vec{v}_2 = c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

A więc mamy tylko dwa różne wektory własne.

# Własności wartości własnych

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$. Prawdziwe są twierdzenia:

- $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$

  D: $w(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$

  Wybierając $\lambda=0$ dostajemy tezę.

- $\mathrm{Tr}\, \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

  D: Można udowodnić indukcyjnie następującą tożsamość:

  $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n \left[\lambda^n - (\mathrm{Tr}\, \mathbf{A})\lambda^{n-1} + \mathcal{O}(\lambda^{n-2})\right]$$

  Natomiast rozwinięcie wyznacznika daje:

  $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) =$$

  $$= (-1)^n \left(\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \mathcal{O}(\lambda^{n-2})\right)$$

  Porównując współczynniki przy $\lambda^{n-1}$ otrzymujemy tezę.

- wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ są takie same:

  D: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det\left((\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - \lambda \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\right) = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda \mathbf{I})^{\mathrm{T}} = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda \mathbf{I})$

- wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}^\dagger$, są sprzężone wartości własne macierzy $\mathbf{A}$

D: $0 = \det(\mathbf{A}^\dagger - \lambda \mathbf{I}) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda^* \mathbf{I}\right)^{*\mathrm{T}} = \left[\det\left(\mathbf{A} - \lambda^* \mathbf{I}\right)\right]^* \quad \Rightarrow \quad \det\left(\mathbf{A} - \lambda^* \mathbf{I}\right) = 0$

# Własności wartości własnych

- jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$, to wartościami własnymi $\mathbf{A}^m$ są $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m$

D: $\mathbf{A}^m \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{m-1} \lambda \vec{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{A}^{m-2} \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} = \ldots = \lambda^m \vec{\mathbf{x}}$

- jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$, to wartościami własnymi $\mathbf{A}^{-1}$ są $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$

D: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}^{-1})) = 0$

$\Rightarrow \quad \det \mathbf{A} \det(-\lambda(\mathbf{A}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I})) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda)^n \det \mathbf{A} \det(\mathbf{A}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I}) = 0$

Ponieważ A jest nieosobliwa więc $\det \mathbf{A} \neq 0$ i $\mathbf{A}$ nie ma zerowych wartości własnych, a więc musi zachodzić $\det(\mathbf{A}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I}) = 0$

- wartościami własnymi macierzy trójkątnej są elementy diagonalne:

D: $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda) = 0$$

A więc $\lambda = a_{11}$, $\lambda = a_{22}$, ..., $\lambda = a_{nn}$

# Własności wektorów własnych

- macierze podobne $\mathbf{A}$ i $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ mają te same wartości własne

D: $$\det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}-\lambda\,\mathbf{I}\right)=\det\left(\mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)\mathbf{S}\right)=\det\mathbf{S}^{-1}\det\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)\det\mathbf{S}=$$
$$=\det\left(\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{S}\right)\det\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)=\det\mathbf{I}\det\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)=\det\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)$$

- wektory własne macierzy podobnych $\mathbf{A}$ i $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ są związane relacją

D: $$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,\vec{\mathbf{x}}=\lambda\,\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}\mathbf{S}\,\vec{\mathbf{x}}=\lambda\,\mathbf{S}\,\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}=\lambda\vec{\mathbf{y}}\quad\text{gdzie}\quad\vec{\mathbf{y}}=\mathbf{S}\,\vec{\mathbf{x}}$$

- jeśli $\vec{\mathbf{x}}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda$ i $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to $\vec{\mathbf{x}}$ jest również wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ do wartości własnej $1/\lambda$:

D: $$\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}=\lambda\,\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}\right)=\mathbf{A}^{-1}\left(\lambda\,\vec{\mathbf{x}}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{\mathbf{x}}=\lambda\mathbf{A}^{-1}\,\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}^{-1}\,\vec{\mathbf{x}}=\frac{1}{\lambda}\,\vec{\mathbf{x}}$$

- jeśli $\vec{\mathbf{x}}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda$, to jest również wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}-c\mathbf{I}$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda-c$ gdzie $c$ jest dowolną stałą.

D: $$\begin{array}{l}\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}=\lambda\,\vec{\mathbf{x}}\\ c\mathbf{I}\,\vec{\mathbf{x}}=c\,\vec{\mathbf{x}}\end{array}\quad\Rightarrow\quad\left(\mathbf{A}-c\mathbf{I}\right)\vec{\mathbf{x}}=\left(\lambda-c\right)\vec{\mathbf{x}}$$

# Własności wektorów własnych

- wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne

D: Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy A, a $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_n$ odpowiadającymi im wektorami własnymi, tzn. $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda_i \vec{\mathbf{x}}_i$

Chcemy pokazać, że jedynym rozwiązaniem równania $c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n \vec{\mathbf{x}}_n = 0$ jest rozwiązanie zerowe $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

Mnożąc powyższe równanie przez kolejne potęgi macierzy $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}$ i korzystając z równania własnego otrzymujemy:

$$\begin{cases} c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n \vec{\mathbf{x}}_n = 0 \\ c_1\lambda_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\lambda_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\lambda_n \vec{\mathbf{x}}_n = 0 \\ \vdots \\ c_1\lambda_1^{n-1} \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\lambda_2^{n-1} \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\lambda_n^{n-1} \vec{\mathbf{x}}_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 \\ c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ c_n \vec{\mathbf{x}}_n \end{pmatrix} = 0$$

Wyznacznik Vandermonde:

$$\det \mathbf{Q} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)\ldots(\lambda_n - \lambda_1) \neq 0$$ ponieważ $\lambda_i$ są różnymi w.w.

A więc musi zachodzić: $\begin{pmatrix} c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 & c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 & \cdots & c_n \vec{\mathbf{x}}_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = 0$

Ale ponieważ $\vec{\mathbf{x}}_i$ są wektorami własnymi (różne od zera), więc: $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

# Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie (Cayleya-Hamiltona): Każda macierz kwadratowa spełnia swoje własne równanie charakterystyczne.

D: Chcemy pokazać, że jeśli wielomianem charakterystycznym macierzy $\mathbf{A}$ jest

$$w(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_0$$

to wówczas spełnione jest równanie macierzowe

$$w(\mathbf{A}) = c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Niech $\vec{\mathbf{x}}_i$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda_i$, czyli

$$w(\lambda_i) = 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda_i\,\vec{\mathbf{x}}_i$$

Mamy: $w(\mathbf{A})\vec{\mathbf{x}}_i = \left(c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I}\right)\vec{\mathbf{x}}_i = \left(c_n\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + c_0\right)\vec{\mathbf{x}}_i =$

$$= w(\lambda_i)\,\vec{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}\,\vec{\mathbf{x}}_i$$

Powyższy związek jest prawdziwy dla dowolnego wektora własnego macierzy $\mathbf{A}$, a więc $w(\mathbf{A})$ musi być macierzą zerową.

Przykład:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \qquad w(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona można wykorzystać do znalezienia odwrotności macierzy:

$$w(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^n + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0 \mathbf{I} = 0$$

mnożąc obustronnie prze $\mathbf{A}^{-1}$ otrzymujemy:

$$\mathbf{A}^{-1} w(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} + \ldots + c_0 \mathbf{A}^{-1} = 0$$

a stąd

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{c_0}\left(c_n \mathbf{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} + \ldots + c_1 \mathbf{I}\right)$$

Przykład: Znajdź macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$w(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 - 11\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} w(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} - 11\mathbf{I} + 6\mathbf{A}^{-1} = 0$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 11\mathbf{I}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}^2 - 6\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -19 & 13 \\ -2 & -5 & 5 \\ -8 & -26 & 20 \end{pmatrix}$$

# Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

Zastosowanie tw. Cayleya-Hamiltona do znajdowania wysokich potęg macierzy:

$$w(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^n + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0 \mathbf{I} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}^n = -\frac{1}{c_n}\left(c_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0 \mathbf{I}\right)$$

Mnożąc ostatnie równanie obustronnie przez $\mathbf{A}$ i podstawiając go jednocześnie za $\mathbf{A}^n$ dostajemy:

$$\mathbf{A}^{n+1} = \left(\frac{c_{n-1}^2}{c_n^2} - \frac{c_{n-2}}{c_n}\right)\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \left(\frac{c_{n-1}c_1}{c_n^2} - \frac{c_0}{c_n}\right)\mathbf{A} + \frac{c_{n-1}c_0}{c_n^2}\mathbf{I}$$

Proces ten może być kontynuowany, co oznacza, że dowolną całkowitą potęgę macierzy stopnia $n$ można zapisać w postaci wielomianu macierzy stopnia co najwyżej $n-1$

# Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

<u>Przykład:</u> Znajdź macierz $\mathbf{A}^{100}$ jeśli $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$$w(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda-4)(\lambda+2)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=4,\ \lambda_2=-2$$

A więc wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}^{100}$ są $\lambda_1^{100}$ i $\lambda_2^{100}$ czyli spełnione są równania własne:

$$\mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_1=\lambda_1^{100}\vec{\mathbf{x}}_1 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_2=\lambda_2^{100}\vec{\mathbf{x}}_2$$

Z drugiej strony, wiemy na podstawie tw. C-H, że macierz $\mathbf{A}^{100}$ możemy zapisać jako kombinację liniową macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I}$ (ponieważ $\mathbf{A}$ jest stopnia $n$=2): $\mathbf{A}^{100}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{I}$

Stąd mamy:

$$\begin{cases}\mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_1=(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_1=(\alpha\lambda_1+\beta)\vec{\mathbf{x}}_1\\ \mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_2=(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_2=(\alpha\lambda_2+\beta)\vec{\mathbf{x}}_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1^{100}=\alpha\lambda_1+\beta\\ \lambda_2^{100}=\alpha\lambda_2+\beta\end{cases}$$

Rozwiązując układ równań względem $\alpha$ i $\beta$ otrzymujemy:

$$\alpha=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1^{100}-\lambda_2^{100}\right)=\frac{1}{6}\left(4^{100}-2^{100}\right)$$

$$\beta=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1\lambda_2^{100}-\lambda_2\lambda_1^{100}\right)=\frac{1}{3}\left(4^{100}+2^{101}\right)$$

a więc: $$\mathbf{A}^{100}=\frac{1}{6}\left(4^{100}-2^{100}\right)\mathbf{A}+\frac{1}{3}\left(4^{100}+2^{101}\right)\mathbf{I}$$