Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 7

Parametryzacja rozwiązań układu równań

Przykład: Rozwiąż układy równań:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 - \frac{4}{3}R_3 \\ R_1 - R_3 - 3R_2}]{\substack{R_1/2 \\ R_2/3 \\ R_3/(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Korzystając z postaci schodkowej (środkowa macierz) i stosując podstawianie wsteczne znajdujemy zbiór rozwiązań:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -9/2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_3 \,\middle|\, x_3 \in \mathcal{R} \right\}$$

Identyczne rozwiązanie otrzymujemy korzystając z postaci schodkowej zredukowanej!

Chociaż powyższy zbiór rozwiązań można sparametryzować na różne sposoby, np.:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -9/2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t \,\middle|\, t \in \mathcal{R} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 8/3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s \,\middle|\, s \in \mathcal{R} \right\}$$

to zawsze będziemy stosować konwencję z wykorzystaniem niezmodyfikowanych zmiennych swobodnych.

Twierdzenie: Postać schodkowa zredukowana macierzy jest jednoznaczna. Oznacza to, że także jednoznaczna jest parametryzacja rozwiązań układu równań za pomocą niezmodyfikowanych zmiennych swobodnych.

Klasy równoważności macierzy

<u>Twierdzenie:</u> Operacje elementarne na wierszach są odwracalne.

<u>Dowód:</u> Dla dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ oraz dla $i \neq j$, $k \neq 0$ mamy:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[R_j \leftrightarrow R_i]{R_i \leftrightarrow R_j} \mathbf{A} \qquad \mathbf{A} \xrightarrow[R_i/k]{kR_i} \mathbf{A} \qquad \mathbf{A} \xrightarrow[R_j - kR_i]{R_j + kR_i} \mathbf{A}$$

<u>Twierdzenie:</u> „Redukcja” macierzy za pomocą operacji elementarnych (typu E1, E2, E3) jest relacją równoważności.

<u>Dowód:</u>

- **zwrotna:** macierz jest redukowalna sama na siebie poprzez zero operacji elem.
- **symetryczna:** jeśli $\mathbf{A}$ jest redukowalna do $\mathbf{B}$, to $\mathbf{B}$ jest redukowalna do $\mathbf{A}$ za pomocą odwrotnej operacji elementarnej.
- **przechodnia:** należy połączyć kroki redukcji $\mathbf{A} \to \cdots \to \mathbf{B}$ oraz $\mathbf{B} \to \cdots \to \mathbf{C}$

<u>Definicja:</u> Dwie macierze które są wzajemnie redukowalne za pomocą operacji elementarnych na wierszach nazywamy równoważnymi wierszowo.

<u>Wniosek:</u> Wszystkie macierze można podzielić na klasy równoważności ze względu na operacje redukcji. Dowolną macierz z danej klasy można wybrać jako jej reprezentanta.

<u>Przykład:</u> Wszystkie nieosobliwe macierze 2×2 należą do jednej klasy.

Własności macierzy równoważnych

Twierdzenie: Kombinacja liniowa kombinacji liniowych jest kombinacją liniową.

Dowód: Rozważmy kombinację liniową kombinacji liniowych, gdzie c i d są stałymi:

$$d_1\left(c_{11}x_1+\ldots+c_{1n}x_n\right)+d_2\left(c_{21}x_1+\ldots+c_{2n}x_n\right)+\ldots+d_m\left(c_{m1}x_1+\ldots+c_{mn}x_n\right)=$$

$$=\left(d_1c_{11}+\ldots+d_mc_{m1}\right)x_1+\left(d_1c_{12}+\ldots+d_mc_{m2}\right)x_2+\ldots+\left(d_mc_{1n}+\ldots+d_mc_{mn}\right)x_n$$

Twierdzenie: Jeżeli jedna macierz jest wierszowo redukowalna do innej, to każdy wiersz tej drugiej jest kombinacją liniową wierszy pierwszej macierzy.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cdots\vec{\alpha}_1\cdots\\ \vdots\\ \cdots\vec{\alpha}_m\cdots\end{pmatrix}$$

Dowód: indukcyjny na minimalnej liczbie elementarnych operacji na wierszach potrzebnych do przejścia pomiędzy macierzami.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\cdots\vec{\beta}_1\cdots\\ \vdots\\ \cdots\vec{\beta}_m\cdots\end{pmatrix}$$

1) zero operacji, kiedy dwie macierze są równe $\mathbf{A}=\mathbf{B}$

$$\vec{\beta}_i=0\cdot\vec{\alpha}_1+\ldots+1\cdot\vec{\alpha}_i+\ldots+0\cdot\vec{\alpha}_m$$

2) Z: Jeśli macierz G może być otrzymana z $\mathbf{A}$ w t≥0 krokach to jej wiersze są k.l. wierszy macierzy $\mathbf{A}$. T: Wiersze macierzy B otrzymanej w t+1 krokach są k.l. wierszy macierzy A.

$$\mathbf{A}\to\cdots\to\mathbf{G}\to\mathbf{B}$$

Przykład: Kolejne macierze oznaczamy A,D, G i B:

$$\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2/2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=(-1/2)\alpha_1+1\cdot\alpha_2$$
$$\beta_2=(1/2)\alpha_1+0\cdot\alpha_2$$

Macierz odwrotna

Definicja: Macierz kwadratową $\mathbf{A}$ stopnia n nazywamy macierzą nieosobliwą jeśli istnieje macierz B taka, że: $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$

Jeśli macierz $\mathbf{B}$ nie istnieje, wtedy mówimy, że macierz $\mathbf{A}$ jest osobliwa.

Macierz $\mathbf{B}$ nazywamy macierzą odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$ i oznaczamy $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^{-1}$

- jeśli $\mathbf{B}$ jest odwrotnością $\mathbf{A}$, wtedy $\mathbf{A}$ jest odwrotnością $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{BA} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{BA} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$$

- macierz odwrotna, jeśli istnieje, jest określona jednoznacznie:

niech macierze $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ będą macierzami odwrotnymi do macierzy $\mathbf{A}$, wtedy

$$\mathbf{CA} = \mathbf{AC} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B} \\ (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI} = \mathbf{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

- odwrotność iloczynu macierzy: $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{ABC}(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{I} \\ \mathbf{ABC}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{AB}(\mathbf{CC}^{-1})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa to $\det \mathbf{A} \neq 0$

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$$

a więc ani $\det \mathbf{A}$ ani $\det \mathbf{A}^{-1}$ nie mogą być równe zero.

Znajdowanie macierzy odwrotnej

Zgodnie z metodą Cramera, rozwiązania układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

dane są przez $x_i = \dfrac{\mathbf{W}_i}{|\mathbf{A}|}$ gdzie $\mathbf{W}_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & d_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & d_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & d_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Rozwijając $\mathbf{W}_i$ względem i-tej kolumny dostajemy $x_i = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{j=1}^{n} d_j \mathbf{C}_{ji}$ gdzie $\mathbf{C}_{ji}$ są odpowiednimi dopełnieniami.

Niech $\mathbf{B}$ będzie macierzą odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$, tzn: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

Ponieważ $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{Bd}$

więc $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} d_j$

Porównując oba rozwiązania układu znajdujemy, że:

$$\boxed{b_{ij} = \frac{\mathbf{C}_{ij}^{\mathrm{T}}}{|\mathbf{A}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}}{\det \mathbf{A}}}$$

Znajdowanie macierzy odwrotnej

<u>Przykład:</u> Stosując metodę Cramera znajdź macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 15 & -6 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Znajdujemy elementy macierzy dopełnień:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \qquad c_{12} = -\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 5 \qquad c_{13} = \begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} = 3$$

Wyznacznik: $\det A = -3c_{11} + 15c_{21} - 5c_{31} = -1$

Macierz odwrotna: $A^{-1} = \dfrac{C^T}{\det A} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Macierze elementarne

Definicja: Macierzami elementarnymi nazywamy macierze w postaci $\mathbf{I}-\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ gdzie $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ są kolumnami n×1 takimi, ze $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} \neq 1$.

Uwaga: W szczególności jesteśmy zainteresowani macierzami elementarnymi stowarzyszonymi z trzema elementarnymi operacjami na wierszach (kolumnach) macierzy. Macierze takie otrzymujemy z macierzy jednostkowej do której stosujemy operacje elementarne, np.:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Są to macierze elementarne ponieważ ($\mathbf{e}_i$ to jednostkowy wektor kolumnowy):

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \text{ gdzie } \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{I} - (1-\alpha)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{E}_3 = \mathbf{I} + \alpha\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}}$$

Powyższą konstrukcję można uogólnić na macierze dowolnego stopnia.

Twierdzenie: Pomnożenie dowolnej macierzy od lewej strony przez macierz elementarną odpowiadającą danej operacji elementarnej (typu E1, E2, E3) jest równoważne wykonaniu tej operacji elementarnej na wierszach tej macierzy.

Natomiast pomnożenie od prawej strony jest równoważne wykonaniu odpowiedniej operacji elementarnej na kolumnach macierzy.

Macierze elementarne

Dowód dla operacji typu E3:

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \left(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i^T\right)\mathbf{A} = \mathbf{A} + \alpha\mathbf{e}_j\mathbf{A}_{i*} = \mathbf{A} + \alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} j-\text{ty} \\ \text{wiersz} \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_3 = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i^T\right) = \mathbf{A} + \alpha\mathbf{A}_{*j}\mathbf{e}_i^T = \mathbf{A} + \alpha\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nj} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow\ i\text{-ta kolumna} \end{array}$$

<u>Przykład:</u> Iloczyn macierzy elementarnych odpowiadających operacjom z przykładu ze strony 6-9:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{R_2 \leftrightarrow R_3} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{R_3 - 3R_1} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{R_2 - 2R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odwracanie macierzy metodą Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana polega na zastosowaniu elementarnych operacji do układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{Id}$ tak aby przekształcić go do postaci $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Id} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{BAx} = \mathbf{BId} \quad \text{ale} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

W celu uzyskania przejrzystości wykonywanych operacji, odwracaną macierz przepisujemy w postaci:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Jeśli w wyniku zastosowania elementarnych operacji do wierszy tak skonstruowanej macierzy, jej lewa strona stanie się macierzą jednostkową, wtedy prawa strona będzie macierzą odwrotną do macierzy wyjściowej.

Uwaga: W przypadku kiedy macierz jest osobliwa, podczas odwracania metodą G-J po lewej stronie pojawi się wiersz złożony z samych zer.

Twierdzenie: Macierz jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy kiedy daje się zapisać jako Iloczyn macierzy elementarnych typu E1, E2 i E3.

Mnożenie macierzy - uzupełnienie

Niech będą dane macierze $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ oraz $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$

Wiersze i kolumny iloczynu macierzy można zapisać na różne sposoby:

$$[\mathbf{AB}]_{i\bullet}=\left[\mathbf{A}_{i\bullet}\mathbf{B}_{\bullet 1}\middle|\mathbf{A}_{i\bullet}\mathbf{B}_{\bullet 2}\middle|\cdots\middle|\mathbf{A}_{i\bullet}\mathbf{B}_{\bullet n}\right]=\mathbf{A}_{i\bullet}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{1\bullet}\\ \mathbf{B}_{2\bullet}\\ \vdots\\ \mathbf{B}_{p\bullet}\end{pmatrix}=$$

$$=a_{i1}\mathbf{B}_{1\bullet}+a_{i2}\mathbf{B}_{2\bullet}+\cdots+a_{ip}\mathbf{B}_{p\bullet}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\mathbf{B}_{k\bullet}$$

<u>Wniosek:</u> Wiersze macierzy **AB** są kombinacjami liniowymi wierszy macierzy **B**.

$$[\mathbf{AB}]_{\bullet j}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{1\bullet}\mathbf{B}_{\bullet j}\\ \mathbf{A}_{2\bullet}\mathbf{B}_{\bullet j}\\ \vdots\\ \mathbf{A}_{m\bullet}\mathbf{B}_{\bullet j}\end{bmatrix}=\mathbf{AB}_{\bullet j}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{\bullet 1} & \mathbf{A}_{\bullet 2} & \cdots & \mathbf{A}_{\bullet p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{pj}\end{pmatrix}=$$

$$=\mathbf{A}_{\bullet 1}b_{1j}+\mathbf{A}_{\bullet 2}b_{2j}+\cdots+\mathbf{A}_{\bullet p}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}\mathbf{A}_{\bullet k}b_{kj}$$

<u>Wniosek:</u> Kolumny macierzy **AB** są kombinacjami liniowymi kolumn macierzy **A**.

Odwracanie macierzy metodą Gaussa-Jordana

Dowód II (metoda G-J): Znalezienie macierzy odwrotnej do macierzy $\mathbf{A}$ jest równoważne rozwiązaniu równania $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, a to z kolei jest równoważne rozwiązaniu n układów równań:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{I}_{\bullet j} \quad \text{gdzie} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Jeśli przez $\mathbf{X}_{\bullet 1}, \mathbf{X}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbf{X}_{\bullet n}$ oznaczymy rozwiązania kolejnych układów to wówczas

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{X}_{\bullet 1} \middle| \mathbf{X}_{\bullet 2} \middle| \cdots \middle| \mathbf{X}_{\bullet n}\right] = \mathbf{A}^{-1}$$

Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą nieosobliwą, to wiemy, że metoda Gaussa-Jordana redukuje macierz uzupełnioną $[\mathbf{A} | \mathbf{I}_{\bullet j}]$ do postaci $[\mathbf{I} | \mathbf{X}_{\bullet j}]$ gdzie $\mathbf{X}_{\bullet j}$ jest jednoznacznym rozwiązaniem układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{I}_{\bullet j}$, tzn.:

$$\left[\mathbf{A} \middle| \mathbf{I}_{\bullet j}\right] \xrightarrow{\text{G-J}} \left[\mathbf{I} \middle| \left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{\bullet j}\right]$$

Korzystając z faktu, że macierze współczynników $\mathbf{A}$ we wszystkich układach równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{I}_{\bullet j}$ są takie same, możemy rozwiązać je metodą G-J jednocześnie zapisując macierz uzupełnioną w postaci rozszerzonej:

$$\left[\mathbf{A} \middle| \mathbf{I}_{\bullet 1} \middle| \mathbf{I}_{\bullet 2} \middle| \cdots \middle| \mathbf{I}_{\bullet n}\right] \xrightarrow{\text{G-J}} \left[\mathbf{I} \middle| \left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{\bullet 1} \middle| \left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{\bullet 2} \middle| \cdots \middle| \left[\mathbf{A}^{-1}\right]_{\bullet n}\right]$$

Czyli, zapisując to w bardziej zwartej postaci mamy: $\left[\mathbf{A} \middle| \mathbf{I}\right] \xrightarrow{\text{G-J}} \left[\mathbf{I} \middle| \mathbf{A}^{-1}\right]$

Odwracanie macierzy metodą Gaussa-Jordana

<u>Przykład:</u> Stosując metodę Gaussa-Jordana znajdź macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$ z poprzedniego przykładu.

Zapisujemy macierz w postaci blokowej $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}]$ a następnie stosujemy operacje elementarne do jej wierszy

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_3/5]{\substack{-R_1/3 \\ R_2/15}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -6/15 & 5/15 & 0 & 1/15 & 0 \\ 1 & -2/5 & 2/5 & 0 & 0 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/15 & 0 & 1/3 & 1/15 & 0 \\ 0 & -1/15 & 1/15 & 1/3 & 0 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-15R_2 \\ -15R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1+R_2/3 \\ R_3-R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & -2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1+R_2/3 \\ R_3-R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & -2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_3]{R_1+R_3/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Relacja równoważności macierzy

Definicja: Mówimy, że macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są równoważne jeśli można przejść od macierzy $\mathbf{A}$ do macierzy $\mathbf{B}$ poprzez operacje elementarne na wierszach i/lub kolumnach. Jest to relacja równoważności, którą można wyrazić za pomocą macierzy elementarnych $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \iff \mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$$

W szczególności jeśli macierz $\mathbf{A}$ da się przekształcić w $\mathbf{B}$ jedynie za pomocą operacji na wierszach lub jedynie za pomocą operacji na kolumnach wtedy piszemy:

$$\mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B} \iff \mathbf{PA} = \mathbf{B} \qquad \mathbf{A} \overset{\text{kol}}{\sim} \mathbf{B} \iff \mathbf{AQ} = \mathbf{B}$$

Twierdzenie: Jeśli rząd macierzy $\mathbf{A}_{m\times n}$ wynosi r, tzn. $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = r$, wtedy $\mathbf{A} \sim \mathbf{N}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Dowód: Zawsze zachodzi $\mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{E}_A \Rightarrow$ istnieje $\mathbf{P}$ taka że $\mathbf{PA} = \mathbf{E}_A$

Przestawiamy r podstawowych kolumn na lewo. Niech operacja ta oznacza mnożenie od prawej strony przez $\mathbf{Q}_1$. W rezultacie otrzymujemy:

$$\mathbf{PAQ}_1 = \mathbf{E}_A\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Mnożymy od prawej strony przez nieosobliwą macierz

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & -\mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{PAQ}_1\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & -\mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

A więc $\mathbf{A} \sim \mathbf{N}_r$ ponieważ $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ są nieosobliwe.

Relacja równoważności macierzy

Przykład: Niech rz(A) = r i rz(B) = s. Uzasadnij, że $\mathrm{rz}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rz}(A) + \mathrm{rz}(B) = r + s$

$$\left.\begin{matrix} A \sim N_r \\ B \sim N_s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & N_s \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rz}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rz}\begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & N_s \end{pmatrix} = r + s = \mathrm{rz}(A) + \mathrm{rz}(B)$$

Twierdzenie: Prawdziwe są następujące stwierdzenia dotyczące macierzy $A_{m\times n}$ i $B_{m\times n}$:

$$A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(B) \qquad A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \Leftrightarrow E_A = E_B \qquad A \overset{\text{kol}}{\sim} B \Leftrightarrow E_{A^T} = E_{B^T}$$

Dowód:

a) $\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(B) \Rightarrow \begin{matrix} A \sim N_r \\ B \sim N_r \end{matrix} \Rightarrow A \sim N_r \sim B \Rightarrow A \sim B$

Niech rz(A) = r i rz(B) = s czyli $A \sim N_r$ i $B \sim N_s$

$$A \sim B \Rightarrow N_r \sim A \sim B \sim N_s \Rightarrow N_r \sim N_s \Rightarrow \mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(B)$$

b) $\left.\begin{matrix} A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \\ B \overset{\text{wiersz}}{\sim} E_B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} E_B \Rightarrow E_B = E_A$

$$E_A = E_B \Rightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} E_A = E_B \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \Rightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B$$

c) $A \overset{\text{kol}}{\sim} B \Leftrightarrow AQ = B \Leftrightarrow (AQ)^T = B^T \Leftrightarrow Q^T A^T = B^T \Leftrightarrow A^T \overset{\text{wiersz}}{\sim} B^T$