

Matematyczne Metody FIZYKI I

Wykład 9

Podprzestrzenie macierzowe

Definicja: Zakresem macierzy $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ nazywamy podprzestrzeń $\mathcal{R}(A)$ przestrzeni \mathcal{R}^m generowaną przez zakres funkcji $f(\vec{x}) = A\vec{x}$: $\mathcal{R}(A) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathcal{R}^n\} \subseteq \mathcal{R}^m$

Definicja: Zakresem macierzy $A^T \in \mathcal{R}^{n \times m}$ nazywamy podprzestrzeń $\mathcal{R}(A^T)$ przestrzeni \mathcal{R}^n generowaną przez zakres funkcji $f(\vec{y}) = A^T\vec{y}$: $\mathcal{R}(A^T) = \{A^T\vec{y} \mid \vec{y} \in \mathcal{R}^m\} \subseteq \mathcal{R}^n$

Wszystkie obrazy odwzorowania $A\vec{x}$ są liniowymi kombinacjami kolumn macierzy A , tzn, jeśli $\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$

$$A\vec{x} = (A_{\cdot 1} \mid A_{\cdot 2} \mid \dots \mid A_{\cdot n}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \xi_j A_{\cdot j}$$

A więc przestrzeń $\mathcal{R}(A)$ to przestrzeń napięta przez kolumny macierzy A (**przestrzeń kolumnowa**), tzn. $\vec{b} \in \mathcal{R}(A) \Leftrightarrow \exists \vec{x}, \vec{b} = A\vec{x}$

Podobnie $\mathcal{R}(A^T)$ to przestrzeń napięta przez kolumny macierzy A^T czyli wiersze macierzy A (**przestrzeń wierszowa**), tzn. $\vec{a} \in \mathcal{R}(A^T) \Leftrightarrow \exists \vec{y}, \vec{a}^T = \vec{y}^T A$

Przykład: Podaj interpretację geometryczną przestrzeni $\mathcal{R}(A)$ oraz $\mathcal{R}(A^T)$ dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathcal{R}(A) = \text{span}(A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 3}) \Rightarrow \mathcal{R}(A) = \text{span}((1, 2)^T) \text{ – linia w } \mathcal{R}^2 \\ \mathcal{R}(A^T) = \text{span}(A_{1\cdot}, A_{2\cdot}) \Rightarrow \mathcal{R}(A^T) = \text{span}((1, 2, 3)^T) \text{ – linia w } \mathcal{R}^3 \end{array}$$

Podprzestrzenie macierzowe

Twierdzenie: Dla dwóch macierzy A i B o tych samych wymiarach zachodzi:

$$\text{a) } \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(B^T) \Leftrightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \qquad \text{b) } \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow A \overset{\text{kol}}{\sim} B$$

Dowód:

$$\text{a) } A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \Rightarrow \text{istnieje } P \text{ taka że } PA = B$$

$$\vec{a} \in \mathcal{R}(A^T) \Leftrightarrow \exists \vec{y} : \vec{a}^T = \vec{y}^T A = \vec{y}^T P^{-1} P A \overset{\vec{z}^T \equiv \vec{y}^T P^{-1}}{\Leftrightarrow} \vec{a}^T = \vec{z}^T B \Leftrightarrow \vec{a} \in \mathcal{R}(B^T)$$

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(B^T) \Leftrightarrow \text{span}(A_{1\cdot}, A_{2\cdot}, \dots, A_{m\cdot}) = \text{span}(B_{1\cdot}, B_{2\cdot}, \dots, B_{m\cdot}) \Leftrightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B$$

b) dowód przebiega analogicznie jak w (a) zastępując odpowiednio A, B przez A^T, B^T .

Przykład: Czy następujące zbiory wektorów napinają tę samą podprzestrzeń \mathcal{R}^n :

$$\mathcal{A} = \left\{ (1, 2, 2, 3)^T, (2, 4, 1, 3)^T, (3, 6, 1, 4)^T \right\} \qquad \mathcal{B} = \left\{ (0, 0, 1, 1)^T, (1, 2, 3, 4)^T \right\}$$

Konstruujemy macierze A i B , których wierszami są wektory ze zbiorów \mathcal{A} i \mathcal{B} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E_B$$

$\text{span}(A) = \text{span}(B)$ ponieważ niezerowe wiersze w macierzach E_A i E_B są takie same.

Podprzestrzenie macierzowe

Twierdzenie: Niech A będzie macierzą o wymiarach $m \times n$, a U dowolną macierzą w postaci schodkowej otrzymaną z macierzy A :

- (a) niezerowe wiersze macierzy U napinają przestrzeń wierszową $\mathcal{R}(A^T)$,
- (b) kolumny podstawowe w macierzy A napinają przestrzeń kolumnową $\mathcal{R}(A)$.

D: a) $A \overset{\text{wiersz}}{\sim} U \Rightarrow \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)$

- b) Niech b_1, b_2, \dots, b_r oraz n_1, n_2, \dots, n_t oznaczają odpowiednio podstawowe i niepodstawowe kolumny macierzy A . Macierz Q_1 niech będzie macierzą permutacji przestawiającą kolumny podstawowe na lewą stronę, tak że $AQ_1 = (B_{m \times r} \quad N_{m \times t})$

Kolumny niepodstawowe są liniowymi kombinacjami kolumn podstawowych i mogą być wyzerowane za pomocą operacji elementarnych na kolumnach macierzy AQ_1 :

$$AQ_1Q_2 = (B_{m \times r} \quad N_{m \times t})Q_2 = (B \quad 0) \Rightarrow \exists Q \equiv Q_1Q_2 : AQ = (B \quad 0) \Rightarrow A \overset{\text{kol}}{\sim} (B \quad 0)$$

Przykład: Znajdź zbiory napinające przestrzenie $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(A^T)$, jeśli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{R}(A^T) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Podprzestrzenie macierzowe

Definicja: Jądrem odwzorowania $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ nazywamy zbiór $\mathcal{N}(f) = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$

Twierdzenie: $\mathcal{N}(f)$ jest podprzestrzenią \mathcal{R}^n .

D: (A1): $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{N}(f) \Rightarrow f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \mathcal{N}(f)$

(M1): $\vec{x} \in \mathcal{N}(f)$ i $\alpha \in \mathcal{R} \Rightarrow f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{x} \in \mathcal{N}(f)$

Definicja: Przestrzenią zerową (jądrem) macierzy $A_{m \times n}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{N}(A) = \{\vec{x}_{n \times 1} \mid A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathcal{R}^n$$

Definicja: Lewostronną przestrzenią zerową (lewostronnym jądrem) macierzy $A_{m \times n}$

nazywamy zbiór

$$\mathcal{N}(A^T) = \{\vec{y}_{m \times 1} \mid A^T\vec{y} = \vec{0}\} \subseteq \mathcal{R}^m$$

Przykład: Znajdź zbiór napinający przestrzeń $\mathcal{N}(A)$ gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Poszukiwany zbiór to ogólne rozwiązanie równania $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv x_2 \vec{h}_1 + x_3 \vec{h}_2$$

A więc $\mathcal{N}(A) = \text{span}(\vec{h}_1, \vec{h}_2)$

Podprzestrzenie macierzowe

Wniosek: Aby znaleźć zbiór napinający przestrzeń $\mathcal{N}(A)$ gdzie $\text{rz}(A_{m \times n}) = r$ należy zredukować A do postaci schodkowej U , a następnie rozwiązać równanie $U\vec{x} = \mathbf{0}$ wyrażając zmienne podstawowe przez zmienne swobodne i znajdując w ten sposób ogólne rozwiązanie równania $A\vec{x} = \mathbf{0}$ w postaci $\vec{x} = x_{f_1}\vec{h}_1 + x_{f_2}\vec{h}_2 + \dots + x_{f_{n-r}}\vec{h}_{n-r}$

Zbiór wektorów $\mathcal{H} = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_{n-r}\}$ napina przestrzeń i jest niezależny od postaci U .

Twierdzenie: Jeśli macierz A ma wymiar $m \times n$ to zachodzi:

$$a) \quad \mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{rz}(A) = n \quad b) \quad \mathcal{N}(A^T) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{rz}(A) = m$$

Dowód:

(a) Wiemy, że rozwiązanie zerowe $\vec{x} = \mathbf{0}$ jest jedynym rozwiązaniem równania

$A\vec{x} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy A jest równy liczbie zmiennych.

(b) Podobnie, że rozwiązanie zerowe $\vec{y} = \mathbf{0}$ jest jedynym rozwiązaniem równania

$A^T\vec{y} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy $\text{rz}(A^T) = m$. Ale zachodzi $\text{rz}(A^T) = \text{rz}(A)$

Twierdzenie: Dwie macierze A i B o tych samych wymiarach mają jednakowe przestrzenie zerowe gdy:

$$a) \quad \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B) \Leftrightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \quad b) \quad \mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(B^T) \Leftrightarrow A \overset{\text{kol}}{\sim} B$$

Podprzestrzenie macierzowe

Twierdzenie: Jeśli $\text{rz}(A_{m \times n}) = r$ oraz $PA = U$, gdzie P jest macierzą nieosobliwą, a U jest macierzą w postaci schodkowej, wtedy ostatnie $m-r$ wierszy macierzy P napina lewo-

stronną przestrzeń zerową macierzy A . Tzn. jeśli $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ gdzie P_2 ma wymiar $(m-r) \times m$ wtedy $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(P_2^T)$

Dowód: (trudny)

Przykład: Znajdź zbiór napinający przestrzeń $\mathcal{N}(A^T)$ gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Szukamy macierzy P , takiej, że $PA = E_A$:

Dygresja: Jeśli G_1, \dots, G_k są macierzami elementarnymi opowiadającymi kolejnym operacjom wierszowym w redukcji $[A | I] \rightarrow [B | P]$ wtedy

$$G_k \dots G_2 G_1 [A | I] = [G_k \dots G_2 G_1 A | G_k \dots G_2 G_1 I] = [B | P]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix}$$

A więc: $\mathcal{N}(A^T) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 1 \end{pmatrix}^T \right\}$

Kombinacja liniowa wektorów

Definicja: Wektor \vec{v} z przestrzeni wektorowej \mathcal{V} nazywamy **liniową kombinacją** wektorów $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathcal{V}$ jeśli daje się przedstawić w postaci:

$$\vec{v} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_k \vec{u}_k$$

Przykład: W zbiorze S wektorów z przestrzeni $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ wektor \vec{v}_4 jest kombinacją liniową pozostałych wektorów

$$S = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Szukamy takich stałych c_i aby zachodziło $\vec{v}_4 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3$

$$\begin{cases} -c_2 - 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 = 8 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ 2c_2 + 3c_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 3 & 0 & | & 8 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Liniowa niezależność wektorów

Definicja: Zbiór $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ wektorów z przestrzeni wektorowej \mathcal{V} nazywamy **liniowo niezależnymi** jeśli równanie wektorowe: $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}$ ma jedynie rozwiązanie trywialne $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_k = 0$.

Jeśli istnieją rozwiązania nietrywialne, to wektory ze zbioru S są **liniowo zależne**.

Twierdzenie: Dowolny układ wektorów $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ z przestrzeni C^n lub \mathcal{R}^n jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy macierz $A = [\vec{e}_1 \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n]$ której kolumnami są te wektory, jest nieosobliwa.

Wniosek: Aby sprawdzić czy wektory są liniowo niezależne należy zbudować z nich macierz i sprawdzić rząd tej macierzy, który określa liczbę liniowo niezależnych wektorów w danym zbiorze.

Twierdzenie: Jeżeli pewien podukład $m < n$ wektorów z układu wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jest liniowo zależny, to cały układ jest też liniowo zależny.

Baza w przestrzeni wektorowej \mathcal{V}

Definicja: Zbiór liniowo niezależnych wektorów $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ należących do przestrzeni wektorowej \mathcal{V} nazywamy bazą, jeśli dowolny wektor $\vec{v} \in \mathcal{V}$ może być zapisany jako:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$$

Liczbę n nazywamy **wymiarem przestrzeni \mathcal{V}** i oznaczamy $\dim \mathcal{V}$.

Twierdzenie: Rozkład wektora na składowe w ustalonej bazie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ jest jednoznaczny.

Dowód: Niech wektor \vec{x} ma w bazie $\{\vec{e}_i\}$ dwa zestawy współrzędnych x_i oraz y_i :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \\ \vec{x} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \vec{e}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad x_i = y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Uwaga: dowolny zbiór n liniowo niezależnych wektorów tworzy bazę w n wymiarowej przestrzeni wektorowej. W nowej bazie zmieniają się współrzędne wektorów: $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{e}'_i$

Twierdzenie: W n wymiarowej przestrzeni wektorowej, każdy układ s wektorów n wymiarowych dla $s > n$ jest układem wektorów liniowo zależnych.

Baza w przestrzeni wektorowej \mathcal{V}

Dowód: Niech zbiór wektorów $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ będzie bazą w przestrzeni \mathcal{V} .

Chcemy pokazać, że zbiór $S_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ wektorów z przestrzeni \mathcal{V} gdzie $m > n$ jest liniowo zależny, tzn. istnieją stałe k_1, k_2, \dots, k_m (nie wszystkie równe zero) takie, że:

$$k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2 + \dots + k_m \vec{u}_m = \vec{0}$$

Ponieważ S jest bazą, więc:

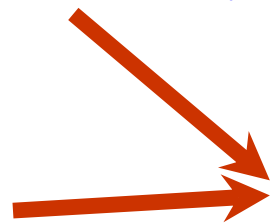
$$\vec{u}_1 = c_{11} \vec{v}_1 + c_{21} \vec{v}_2 + \dots + c_{n1} \vec{v}_n$$

$$\vec{u}_2 = c_{12} \vec{v}_1 + c_{22} \vec{v}_2 + \dots + c_{n2} \vec{v}_n$$

\vdots

\vdots

$$\vec{u}_m = c_{1m} \vec{v}_1 + c_{2m} \vec{v}_2 + \dots + c_{nm} \vec{v}_n$$



$$d_1 \vec{v}_1 + d_2 \vec{v}_2 + \dots + d_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

$$\text{gdzie } d_i = c_{i1}k_1 + c_{i2}k_2 + \dots + c_{im}k_m$$

Ponieważ \vec{v}_i tworzą zbiór wektorów liniowo niezależnych więc wszystkie $d_i = 0$, czyli

$$c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + \dots + c_{1m}k_m = 0$$

$$c_{21}k_1 + c_{22}k_2 + \dots + c_{2m}k_m = 0$$

\vdots

\vdots

$$c_{n1}k_1 + c_{n2}k_2 + \dots + c_{nm}k_m = 0$$

Ponieważ w powyższym układzie jednorodnym mamy mniej równań niż zmiennych k_i , więc musi posiadać on nietrywialne rozwiązanie, a więc zbiór S_1 jest liniowo zależny.

Zbiór wektorów tworzących bazę

Przykład: Sprawdzić czy następujące wektory z przestrzeni \mathcal{R}^3 tworzą bazę:

Math
Player

$$\vec{e}_1 = (1 \ 2 \ 1)^T \quad \vec{e}_2 = (1 \ 1 \ -1)^T \quad \vec{e}_3 = (1 \ 3 \ 2)^T$$

Sprawdzamy czy te wektory są liniowo niezależne:

$$\sum_{i=1}^3 c_i \vec{e}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $\det \mathbf{A} = 1$, więc układ ma tylko rozwiązanie zerowe $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, a więc wektory są liniowo niezależne.

Aby przekonać się, że wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tworzą bazę w \mathcal{R}^3 należy pokazać, że dowolny wektor $\vec{v} = (a, b, c)^T$ można jednoznacznie przedstawić jako ich kombinację liniową:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = a \\ 2v_1 + v_2 + 3v_3 = b \\ v_1 - v_2 + 2v_3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a - 3b + 2c \\ -a + b - c \\ -3a + 2b - c \end{pmatrix}$$

Uwaga: a, b, c to współrzędne wektora w bazie naturalnej: $\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$

v_1, v_2, v_3 to współrzędne tego samego wektora w bazie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Transformacje współrzędnych wektora

Niech będą dane dwie dowolne bazy w \mathcal{R}^n : $\{\vec{e}_i\}$ oraz $\{\vec{e}'_i\}$, $i=1, \dots, n$. Szukamy macierzy przejścia pomiędzy współrzędnymi dowolnego wektora w tych bazach:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^n x'_i \sum_{j=1}^n c_{ji} \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^n x'_i c_{ji} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad x_j = \sum_{i=1}^n x'_i c_{ji}$$

W zapisie macierzowym mamy: $\vec{x} = \mathbf{C} \vec{x}' \Rightarrow \vec{x}' = \mathbf{C}^{-1} \vec{x}$

A więc macierz transformacji współrzędnych \mathbf{O} dana jest przez:

$$\mathbf{O} \equiv \mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{E}^{-1} \mathbf{E}')^{-1} = \mathbf{E}'^{-1} \mathbf{E}$$

Math
Player

Twierdzenie: Macierz transformacji współrzędnych pomiędzy bazami ortonormalnymi, jest ortogonalna.

$$\mathbf{O}^{-1} = (\mathbf{E}'^{-1} \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{E}' = \left\| \begin{array}{l} \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E}'^{-1} = \mathbf{E}'^T \end{array} \right\| = \mathbf{E}^T (\mathbf{E}'^{-1})^T = (\mathbf{E}'^{-1} \mathbf{E})^T = \mathbf{O}^T$$

Uwaga: Macierz której kolumny (lub wiersze) są wzajemnie ortogonalnymi wektorami o jednostkowej długości, jest ortogonalna.

Uwaga: $\mathbf{G}_k \dots \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 [\mathbf{E}' | \mathbf{E}] = [\mathbf{G}_k \dots \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{E}' | \mathbf{G}_k \dots \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{E}] = [\mathbf{I} | \mathbf{E}'^{-1} \mathbf{E}]$