

# Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 9

# Macierze normalne

**Twierdzenie:** Macierz można zdiagonalizować za pomocą unitarnej transformacji podobieństwa wtedy i tylko wtedy gdy jest normalna ( $AA^\dagger = A^\dagger A$ ).

**D<sup>(⇒)</sup>:** Dowolną macierz kwadratową można zapisać w postaci  $A = B + iC$  gdzie

$$B = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) \Rightarrow B^\dagger = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)^\dagger = \frac{1}{2}(A^\dagger + A) = B$$

$$C = \frac{1}{2i}(A - A^\dagger) \Rightarrow C^\dagger = -\frac{1}{2i}(A - A^\dagger)^\dagger = -\frac{1}{2i}(A^\dagger - A) = C$$

$$\left. \begin{aligned} BC &= \frac{1}{4i}(A^2 - AA^\dagger + A^\dagger A - A^{\dagger 2}) \\ CB &= \frac{1}{4i}(A^2 - A^\dagger A + AA^\dagger - A^{\dagger 2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{jesli } AA^\dagger = A^\dagger A \text{ to } BC = CB$$

Ponieważ macierze  $B$  i  $C$  komutują, więc mogą być jednocześnie zdiagonalizowane, czyli  $U^{-1}AU = U^{-1}BU + iU^{-1}CU$  musi też być macierzą diagonalną.

**D<sup>(⇒)</sup>:**  $U^{-1}AU = D \Rightarrow (U^{-1}AU)^\dagger = U^{-1}A^\dagger U = D^\dagger = D^*$

$$\left. \begin{aligned} U^{-1}AA^\dagger U &= (U^{-1}AU)(U^{-1}A^\dagger U) = DD^* \\ U^{-1}A^\dagger AU &= (U^{-1}A^\dagger U)(U^{-1}AU) = D^*D \end{aligned} \right\} \Rightarrow AA^\dagger = A^\dagger A$$

# Diagonalizacja macierzy - podsumowanie

Zarówno hermitowskie (rz. symetryczne) jak i unitarne (rz. ortogonalne) macierze można zdiagonalizować za pomocą unitarnej transformacji podobieństwa.

- wartości własne macierzy hermitowskiej są zawsze rzeczywiste (właśnie dlatego w mechanice kwantowej obserwabla są zawsze stowarzyszone z wartościami własnymi operatorów hermitowskich)
- wektory własne macierzy hermitowskiej mogą być zespolone dlatego unitarna macierz diagonalizująca jest w ogólności zespolona.
- macierz rz. symetryczna jest macierzą hermitowską, a więc jej wartości własne są rzeczywiste. Ponieważ wartości własne i sama macierz są rzeczywiste, więc wektory własne można wybrać jako rzeczywiste, a w konsekwencji macierz diagonalizująca jest rzeczywistą macierzą ortogonalną.
- macierze unitarne i rz. ortogonalne można zdiagonalizować przy pomocy macierzy unitarnej. Ponieważ wartości własne i wektory własne są w ogólności zespolone, więc również macierz diagonalizująca jest macierzą unitarną a nie ortogonalną. (np. macierz obrotu jest rzeczywistą macierzą ortogonalną, jednak w ogólności może być zdiagonalizowana przez zespoloną macierz unitarną)

**Uwaga:** Nie wszystkie macierze kwadratowe można zdiagonalizować, ale wszystkie macierze kwadratowe można sprowadzić do postaci trójkątnej.

# Ruch cząstki naładowanej

Przykład: Ruch cząstki naładowanej w stałym polu magnetycznym skierowanym wzdłuż osi  $z$  tzn.  $\vec{B} = B\vec{e}_z$

Równanie ruchu ma postać:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

ruch jednostajny

Rozwiążemy układ dwóch pierwszych równań:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\omega \equiv \frac{qB}{m}$$

Diagonalizujemy macierz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1$$

Znajdujemy wektory własne i konstruujemy macierz diagonalizującą:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

# Ruch cząstki naładowanej

Zdiagonalizowana macierz ma postać:

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega \equiv \frac{qB}{m}$$

Równania ruchu przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -i\omega \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$$

czyli

$$\frac{dv'_x}{dt} = i\omega v'_x \qquad \frac{dv'_y}{dt} = -i\omega v'_y$$

których rozwiązaniami są  $v'_x = v'_{0x} \exp(i\omega t)$   $v'_y = v'_{0y} \exp(-i\omega t)$

$$\begin{pmatrix} v'_{0x} \\ v'_{0y} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iv_{0x} + v_{0y} \\ -iv_{0x} + v_{0y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \mathbf{U} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -iv'_{0x} \exp(i\omega t) + iv'_{0y} \exp(-i\omega t) \\ v'_{0x} \exp(i\omega t) + v'_{0y} \exp(-i\omega t) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (v_{0x} - iv_{0y}) \exp(i\omega t) + (v_{0x} + iv_{0y}) \exp(-i\omega t) \\ (iv_{0x} + v_{0y}) \exp(i\omega t) + (-iv_{0x} + v_{0y}) \exp(-i\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \cos \omega t + v_{0y} \sin \omega t \\ -v_{0x} \sin \omega t + v_{0y} \cos \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Formy kwadratowe

**Definicja:** Rzeczywistą formą kwadratową w zmiennych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nazywamy jednorodny wielomian stopnia drugiego o rzeczywistych współczynnikach  $a_{ij}$  i rzeczywistych zmiennych  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  postaci

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

Math  
Player

**Uwaga:** Macierz współczynników  $\mathbf{A}$  można zawsze uważać za symetryczną, ponieważ dla dowolnej macierzy  $\mathbf{C}$  mamy:

$$c_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) + \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji}) \equiv a_{ij} + b_{ij} \quad \text{gdzie} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{oraz} \quad b_{ij} = -b_{ji}$$

ale 
$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n (-b_{ji}) x_i x_j = - \sum_{i,j=1}^n b_{ji} x_j x_i = - \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j = 0$$

**Przykład:** Zapisz formę kwadratową  $f(\vec{x}) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 - 2x_2x_3$  w postaci macierzowej.

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -2 & -1 \\ 3/2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

# Diagonalizacja formy kwadratowej

**Definicja:** **Postacią kanoniczną** formy kwadratowej nazywamy postać w której występują jedynie wyrazy kwadratowe w poszczególnych zmiennych.

**Twierdzenie:** Niech  $A$  będzie symetryczną macierzą stopnia  $n$  o wartościach własnych  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , oraz niech  $Q$  będzie macierzą ortogonalną diagonalizującą macierz  $A$  poprzez transformację podobieństwa  $Q^T A Q = D$ . Stosując zmianę zmiennych  $\vec{x} = Q \vec{y}$  przekształcamy formę kwadratową  $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$  do postaci kanonicznej

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

**Dowód:**  $f(\vec{x}) \equiv \vec{x}^T A \vec{x} = (Q \vec{y})^T A Q \vec{y} = \vec{y}^T Q^T A Q \vec{y} = \vec{y}^T D \vec{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

**Twierdzenie:** Rząd formy kwadratowej (czyli rząd określającej ją macierzy) nie ulega zmianie przy transformacji za pomocą nieosobliwej macierzy  $Q$ .

**Definicja:** **Ogólną (zespoloną) formą kwadratową** w zmiennych  $z_1, z_2, \dots, z_n$  nazywamy jednorodny wielomian stopnia drugiego o zespolonych współczynnikach  $a_{ij}$  i zespolonych zmiennych  $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^\dagger$  postaci

$$f(\vec{z}) = \vec{z}^\dagger A \vec{z} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_i^* z_j$$

# Krzywe stożkowe - przykład: elipsa

Przykład: Przekształcając formę kwadratową do postaci kanonicznej określ jaką krzywą stożkową przedstawia równanie  $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 2\sqrt{5}x - 4\sqrt{6}y = 15$



Część kwadratową powyższego równania można zapisać jako:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 9x^2 - 2xy - 2xy + 6y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wartości własne macierzy współczynników:

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 54 - 15\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5 \text{ i } \lambda_2 = 10$$

odpowiadające im wektory własne:

$$\lambda_1 = 5: \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 10: \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizujemy formę kwadratową:

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^T A U = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$



# Krzywe stożkowe - przykład: elipsa

Diagonalizacja macierzy współczynników przy wyrazach kwadratowych, jest równoważna zmianie zmiennych:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

A więc wyjściowe równanie może być przepisane w postaci:

$$(x' \ y') \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 4\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') = 15$$

lub po uproszczeniu

$$5x'^2 + 10y'^2 - 10x' = 15 \Leftrightarrow x'^2 + 2y'^2 - 2x' = 3 \Leftrightarrow \frac{(x'-1)^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1$$

Jest to równanie elipsy o środku w punkcie  $(x' = 1, y' = 0)$  oraz osiach  $2\sqrt{4}$  i  $2\sqrt{2}$

Oś główna elipsy jest skierowana wzdłuż wektora  $\vec{v}_1$  a krótsza wzdłuż wektora  $\vec{v}_2$ .

Oznacza to, że oś główna oryginalnej elipsy tworzy kąt  $\theta$  z osią poziomą układu współrzędnych, który jest równy:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$$

# Twierdzenie Sylvestra-Jacobiego

**Twierdzenie (Sylvestra-Jacobiego, o bezwładności form kwadratowych):** Jeżeli formę kwadratową rzeczywistą sprowadzimy do dwóch różnych postaci kanonicznych za pomocą dwóch różnych macierzy rzeczywistych nieosobliwych, to obie formy kanoniczne mają zarówno te same ilości współczynników dodatnich jak i współczynników ujemnych (mówimy że mają takie same sygnatury).

**Dowód:** Niech przekształcenia  $\vec{x} = B\vec{y}$  oraz  $\vec{x} = C\vec{z}$  przeprowadzają formę kwadratową  $f(\vec{x})$  odpowiednio do postaci kanonicznych

$$g(\vec{y}) = b_1 y_1^2 + \dots + b_k y_k^2 - b_{k+1} y_{k+1}^2 - \dots - b_{k+l} y_{k+l}^2$$

$$h(\vec{z}) = c_1 z_1^2 + \dots + c_m z_m^2 - c_{m+1} z_{m+1}^2 - \dots - c_{m+p} z_{m+p}^2$$

gdzie wszystkie  $b_i > 0$  oraz  $c_i > 0$  oraz zachodzi równość  $k + l = m + p$ , bo obie postaci kanoniczne mają ten sam rząd co forma  $f(\vec{x})$ .

Dowód sprowadza się do pokazanie, że  $m = k$  oraz  $p = l$ . Przypuśćmy, że tak nie jest.

Niech  $k > m$  (czyli  $l < p$ ). Rozważmy przekształcenia odwrotne  $\vec{y} = B^{-1}\vec{x}$  oraz  $\vec{z} = C^{-1}\vec{x}$

Układ równań ( $n - k + m < n$ ):

$$\begin{cases} \vec{y}_{k+1} = 0, & \vec{y}_{k+2} = 0, & \dots, & \vec{y}_{k+l} = 0 \\ \vec{z}_1 = 0, & \vec{z}_2 = 0, & \dots, & \vec{z}_m = 0 \end{cases}$$

# Klasyfikacja form kwadratowych

Niech wektor  $\vec{x}_0 = (x_1^0 \dots x_n^0)^T$  będzie jednym z niezerowych rozwiązań tego układu.

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{x}_0) &= b_1 y_1^2 + \dots + b_k y_k^2 \geq 0 \\ &= -c_{m+1} z_{m+1}^2 - \dots - c_{m+p} z_{m+p}^2 \leq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$$

a więc  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  - sprzeczność!

Dowód dla  $k < m$  przebiega analogicznie.

Klasyfikacja rzeczywistych form kwadratowych:

- $f(\vec{x})$  nazywamy **dodatnio określona** jeśli  $f(\vec{x}) > 0$  dla wszystkich  $\vec{x} \neq \vec{0}$  oraz  $f(\vec{x}) = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\vec{x} = \vec{0}$ .  
 $f(\vec{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2$
- $f(\vec{x})$  nazywamy **ujemnie określona** jeśli  $f(\vec{x}) < 0$  dla wszystkich  $\vec{x} \neq \vec{0}$  oraz  $f(\vec{x}) = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\vec{x} = \vec{0}$ .  
 $f(\vec{x}) = -(3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2)$
- $f(\vec{x})$  nazywamy **dodatnio półokreślona** jeśli  $f(\vec{x}) \geq 0$  dla wszystkich  $\vec{x} \neq \vec{0}$  oraz  $f(\vec{x}) = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\vec{x} = \vec{0}$ .  
 $f(\vec{x}) = 3x_1^2 + 4x_3^2$
- $f(\vec{x})$  nazywamy **ujemnie półokreślona** jeśli  $f(\vec{x}) \leq 0$  dla wszystkich  $\vec{x} \neq \vec{0}$  oraz  $f(\vec{x}) = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\vec{x} = \vec{0}$ .  
 $f(\vec{x}) = -(3x_1^2 + 4x_3^2)$
- $f(\vec{x})$  nazywamy **nieokreślona** jeśli nie spełnia żadnego z powyższych warunków.  
 $f(\vec{x}) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2$

# Funkcje macierzy

Każda macierz  $\mathbf{A}$  może być pomnożona przez siebie dowolną liczbę razy:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{n \text{ razy}} \Rightarrow \mathbf{A}^n \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}$$

Dobrze zdefiniowana jest również odwrotność macierzy  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$   
a więc również logiczne są definicje:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{1-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}^{-n} = (\mathbf{A}^{-1})^n$$

Wykorzystując te definicje możemy zdefiniować funkcje wielomianowe macierzy poprzez dokładną analogię z funkcjami zmiennej skalarnej.

Przykład:  $f(x) = x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$   $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 5\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$$

Przykład:

$$f(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^2 - \mathbf{I}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{I})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

# Funkcje macierzy

Dysponując macierzą kwadratową  $A$ , zastanówmy się jak należy zdefiniować funkcje macierzy np.  $e^A$ ,  $\sin A$ ,  $\ln A$ , ...

Czy ma sens definicja:  $\sin A = \sin \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \sin a_{11} & \sin a_{12} \\ \sin a_{21} & \sin a_{22} \end{pmatrix}$

Nie ma, ponieważ oczekujemy, że funkcje macierzy powinny spełniać podobne związki jak funkcje zmiennych skalarnych, czyli np.  $\sin^2 A + \cos^2 A = I$  dla wszystkich macierzy  $A$ .

Do definicji funkcji macierzy można wykorzystać rozwinięcie funkcji w nieskończony szereg Maclaurin'a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Jeśli taki szereg jest zbieżny dla  $|z| < R$  to również szereg macierzowy  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$  jest zbieżny jeśli wszystkie wartości własne  $A$  spełniają warunek  $|\lambda_i| < R$ .

Definicja (funkcji macierzy):  $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$

Przykład:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

# Funkcje macierzy

Jeśli  $A$  jest macierzą diagonalizowalną wówczas mamy

$$A = SDS^{-1} = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1}$$

$$A^k = (SDS^{-1})^k = \underbrace{SDS^{-1}SDS^{-1} \dots SDS^{-1}}_{k \text{ razy}} = SD^k S^{-1} = S \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) S^{-1}$$

Przykład: 
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SD^k S^{-1}}{k!} = S \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) S^{-1} = S \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) S^{-1}$$

Niech  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$   $\left| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{array} \right| = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6 \text{ i } \lambda_2 = -4$

Znajdujemy wektory własne i konstruujemy macierz diagonalizującą

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a więc

$$e^A = S \begin{pmatrix} e^6 & 0 \\ 0 & e^{-4} \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^6 & 0 \\ 0 & e^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^6 + e^{-4} & e^6 - e^{-4} \\ e^6 - e^{-4} & e^6 + e^{-4} \end{pmatrix}$$

# Funkcje macierzy

Ideę tę można uogólnić na dowolną funkcję  $f(z)$  określoną na wartościach własnych  $\lambda_i$  diagonalizowalnej macierzy  $A=SDS^{-1}$  wprowadzając definicję

$$f(\mathbf{D}) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{S}f(\mathbf{D})\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))\mathbf{S}^{-1}$$



Przykład: Rozwiąż równanie macierzowe  $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Najpierw zdiagonalizujemy macierz znajdującą się po prawej stronie równania:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ i } \lambda_2 = 9$$

Znajdujemy wektory własne i konstruujemy macierz diagonalizującą

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Po zdiagonalizowaniu macierzy prawa strona równania staje się równa

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

# Funkcje macierzy

Lewa strona równania musi być również diagonalna, a więc:

$$S^{-1}(A^2 - 4A + 4I)S = S^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Założmy, że  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$  wtedy równanie przyjmuje postać

$$S^{-1}(A^2 - 4A + 4I)S = \begin{pmatrix} x_1^2 - 4x_1 + 4 & 0 \\ 0 & x_2^2 - 4x_2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

która jest równoważna układowi równań:

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + 4 = 1 & \Rightarrow x_1 = 1, 3 \\ x_2^2 - 4x_2 + 4 = 9 & \Rightarrow x_2 = 5, -1 \end{cases}$$

Możliwe są następujące kombinacje:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

W konsekwencji wyjściowe równanie ma więc cztery rozwiązania:

$$A_1 = S\Lambda_1S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$



# Macierz nilpotentna

**Przykład:** Dana jest macierz  $A$ . Znajdź  $e^A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^n = 0 \text{ dla } n > 3$$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definicja:** Macierz kwadratową  $A$  stopnia  $n$  nazywamy **nilpotentną**, jeżeli istnieje taka liczba naturalna  $m > 1$ , że  $A^m = 0$  (0 jest tutaj macierzą zerową).

**Przykład:** Przykładem macierzy nilpotentnej jest macierz ściśle trójkątna, tzn. mająca zera na diagonalu i poniżej:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Twierdzenie:** Dla macierzy nilpotentnej  $A$  zachodzi:

$$\det A = 0 \text{ oraz } \text{Tr } A = 0.$$

$$\text{Dowód: } A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow A^m\vec{x} = \lambda^m\vec{x}$$

$$\text{Ponieważ } A^m = 0 \text{ oraz } \vec{x} \neq 0 \text{ więc } \lambda^m = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\text{A więc } \text{Tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \quad \det A = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n = 0$$