Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 9

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie (Cayleya-Hamiltona): Każda macierz kwadratowa spełnia swoje własne równanie charakterystyczne.

D: Chcemy pokazać, że jeśli wielomianem charakterystycznym macierzy $\mathbf{A}$ jest

$$w(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = c_n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_0$$

to wówczas spełnione jest równanie macierzowe

$$w(\mathbf{A}) = c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Niech $\vec{\mathbf{x}}_i$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_i, czyli

$$w(\lambda_i) = 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda_i\,\vec{\mathbf{x}}_i$$

Mamy: $w(\mathbf{A})\vec{\mathbf{x}}_i = \left(c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I}\right)\vec{\mathbf{x}}_i = \left(c_n\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + c_0\right)\vec{\mathbf{x}}_i =$

$$= w(\lambda_i)\,\vec{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}\,\vec{\mathbf{x}}_i$$

Powyższy związek jest prawdziwy dla dowolnego wektora własnego macierzy $\mathbf{A}$, a więc $w(\mathbf{A})$ musi być macierzą zerową.

Przykład:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \qquad w(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona można wykorzystać do znalezienia odwrotności macierzy:

$$w(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0 \mathbf{I} = 0$$

mnożąc obustronnie przez $\mathbf{A}^{-1}$ otrzymujemy:

$$\mathbf{A}^{-1} w(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^{n-1} + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + c_0 \mathbf{A}^{-1} = 0$$

a stąd

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{c_0}\left(c_n \mathbf{A}^{n-1} + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + c_1 \mathbf{I}\right)$$

Przykład: Znajdź macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$w(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 - 11\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} w(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} - 11\mathbf{I} + 6\mathbf{A}^{-1} = 0$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 11\mathbf{I}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}^2 - 6\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -19 & 13 \\ -2 & -5 & 5 \\ -8 & -26 & 20 \end{pmatrix}$$

Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

Zastosowanie tw. Cayleya-Hamiltona do znajdowania wysokich potęg macierzy:

$$w(\mathbf{A}) = c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}^n = -\frac{1}{c_n}\left(c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I}\right)$$

Mnożąc ostatnie równanie obustronnie przez $\mathbf{A}$ i podstawiając go jednocześnie za $\mathbf{A}^n$ dostajemy:

$$\mathbf{A}^{n+1} = \left(\frac{c_{n-1}^2}{c_n^2} - \frac{c_{n-2}}{c_n}\right)\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \left(\frac{c_{n-1}c_1}{c_n^2} - \frac{c_0}{c_n}\right)\mathbf{A} + \frac{c_{n-1}c_0}{c_n^2}\,\mathbf{I}$$

Proces ten może być kontynuowany, co oznacza, że dowolną całkowitą potęgę macierzy stopnia n można zapisać w postaci wielomianu macierzy stopnia co najwyżej $n-1$

Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

<u>Przykład:</u> Znajdź macierz $\mathbf{A}^{100}$ jeśli $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$$w(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda-4)(\lambda+2)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=4,\ \lambda_2=-2$$

A więc wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}^{100}$ są λ_1^{100} i λ_2^{100} czyli spełnione są równania własne:

$$\mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_1=\lambda_1^{100}\vec{\mathbf{x}}_1 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_2=\lambda_2^{100}\vec{\mathbf{x}}_2$$

Z drugiej strony, wiemy na podstawie tw. C-H, że macierz $\mathbf{A}^{100}$ możemy zapisać jako kombinację liniową macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I}$ (ponieważ $\mathbf{A}$ jest stopnia n=2): $\mathbf{A}^{100}=\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{I}$

Stąd mamy:

$$\begin{cases}\mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_1=(\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_1=(\alpha\lambda_1+\beta)\vec{\mathbf{x}}_1\\ \mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_2=(\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_2=(\alpha\lambda_2+\beta)\vec{\mathbf{x}}_2\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda_1^{100}=\alpha\lambda_1+\beta\\ \lambda_2^{100}=\alpha\lambda_2+\beta\end{cases}$$

Rozwiązując układ równań względem α i β otrzymujemy:

$$\alpha=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1^{100}-\lambda_2^{100}\right)=\frac{1}{6}\left(4^{100}-2^{100}\right)$$

$$\beta=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1\lambda_2^{100}-\lambda_2\lambda_1^{100}\right)=\frac{1}{3}\left(4^{100}+2^{101}\right)$$

a więc: $$\mathbf{A}^{100}=\frac{1}{6}\left(4^{100}-2^{100}\right)\mathbf{A}+\frac{1}{3}\left(4^{100}+2^{101}\right)\mathbf{I}$$

Diagonalizacja macierzy kwadratowej

Dana jest macierz $\mathbf{A}_{n\times n}$. Jej wartości własne λ_i i wektory własne $\vec{\mathbf{x}}_i$ spełniają równanie

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda_i \vec{\mathbf{x}}_i \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n$$

Każde z równań własnych osobno można zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i x_{1i} \\ \lambda_i x_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_i x_{ni} \end{pmatrix}$$

Natomiast wszystkie jednocześnie daje się zapisać w zwartej postaci w formie:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy kwadratowej

Wprowadzając oznaczenia

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

możemy powyższe równanie macierzowe zapisać w postaci

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S}\Lambda \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \Lambda$$

Wniosek: Wykorzystując macierz zbudowaną z wektorów własnych można za pomocą transformacji podobieństwa przetransformować macierz $\mathbf{A}$ do postaci diagonalnej w której elementami diagonalnymi są wartości własne macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład: Zdiagonalizuj macierz za pomocą transformacji podobieństwa.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$$

wektory własne: $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy kwadratowej

Po znormalizowaniu wektorów własnych utworzona macierz jest unitarna (ortogonalna)

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Transformację $U^{-1}AU = U^{\dagger}AU = \Lambda$ nazywamy unitarną transformacją podobieństwa.

Przykład: Zdiagonalizuj macierz za pomocą transformacji podobieństwa.

$$A = \begin{pmatrix}4 & 6 & 6\\1 & 3 & 2\\-1 & -5 & -2\end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2$$

Wektory własne: $\lambda_1 = 1: \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix} \qquad \lambda_{2,3} = 2: \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$

Wniosek: Tej macierzy nie da się zdiagonalizować.

Uwaga: Kompletnym układem wektorów własnych macierzy $A_{n\times n}$ nazywamy każdy układ n liniowo niezależnych wektorów własnych tej macierzy. Macierze które nie posiadają kompletnego układu wektorów własnych nazywamy niekompletnymi.

Uwaga: Macierz $A_{n\times n}$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy gdy posiada kompletny układ wektorów własnych.

Macierze hermitowskie i symetryczne

- macierz (anty)hermitowska: $\mathbf{A}^\dagger = \pm\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = \pm a_{ji}^*$
- macierz (anty)symetryczna: $\mathbf{A}^\mathrm{T} = \pm\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = \pm a_{ji}$
- wartości własne macierzy hermitowskiej (lub rz. symetrycznej) są rzeczywiste:

D:
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}} \quad &\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}^\dagger\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} \\ \vec{\mathbf{x}}^\dagger\mathbf{A}^\dagger = \lambda^*\vec{\mathbf{x}}^\dagger \quad &\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}^\dagger\mathbf{A}^\dagger\vec{\mathbf{x}} = \lambda^*\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}^\dagger(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\dagger)\vec{\mathbf{x}} = (\lambda-\lambda^*)\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \quad \Rightarrow \quad (\lambda-\lambda^*)\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} = 0$$
$$\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda^*$$

- wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym macierzy hermitowskiej (lub rz. symetrycznej) są wzajemnie ortogonalne:

D:
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_1 = \lambda_1\vec{\mathbf{x}}_1 \quad &\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}_2^\dagger\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_1 = \lambda_1\vec{\mathbf{x}}_2^\dagger\vec{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_2 = \lambda_2\vec{\mathbf{x}}_2 \quad &\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}_2^\dagger\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_1 = \lambda_2\vec{\mathbf{x}}_2^\dagger\vec{\mathbf{x}}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{0} = (\lambda_1-\lambda_2)\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{x}}$$
$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Definicja: Macierz kwadratową $\mathbf{A}$ nazywamy normalną wtedy i tylko wtedy gdy komutuje ona ze swoim sprzężeniem hermitowskim, tzn. $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$.

Wniosek: Wszystkie macierze (anty) hermitowskie (rz. (anty) symetryczne), unitarne (rz. ortogonalne) są macierzami normalnymi.

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

<u>Twierdzenie:</u> **Macierz hermitowską (lub rz. symetryczną) można zdiagonalizować za pomocą macierzy unitarnej (lub ortogonalnej).**

D: W przypadku wszystkich różnych wartości własnych macierz można zdiagonalizować za pomocą transformacji podobieństwa $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{S} = \Lambda$

Pokażemy, że macierz hermitowską można zdiagonalizować również w przypadku zdegenerowanych wartości własnych.

Niech λ_1 będzie zdegenerowaną wartością własną macierzy hermitowskiej $\mathbf{H}_{n\times n}$ a $\vec{\mathbf{x}}_1$ wektorem własnym do tej wartości własnej.

Konstruujemy układ n ortonormalnych wektorów $\vec{\mathbf{x}}_i$ tak aby pierwszym z nich był $\vec{\mathbf{x}}_1$

Z wektorów tych budujemy unitarną macierz $\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{x}}_1 & \vec{\mathbf{x}}_2 & \ldots & \vec{\mathbf{x}}_n \end{pmatrix}$

Transformacja unitarna $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U}$ ma dokładnie ten sam zestaw wartości własnych co macierz $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{0} = \det\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U} - \lambda\,\mathbf{I}\right) = \det\left(\mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{H} - \lambda\,\mathbf{I}\right)\mathbf{U}\right) = \det\mathbf{U}^{-1}\det\left(\mathbf{H} - \lambda\,\mathbf{I}\right)\det\mathbf{U} =$$

$$= \det\left(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\right)\det\left(\mathbf{H} - \lambda\,\mathbf{I}\right) = \det\left(\mathbf{H} - \lambda\,\mathbf{I}\right)$$

Macierz $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U}$ jest hermitowska:

$$\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U}\right)^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U}$$

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

Mamy:

$$U_1^\dagger H U_1 = \begin{pmatrix} \leftarrow & \vec{x}_1^* & \rightarrow \\ \leftarrow & \vec{x}_2^* & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \vec{x}_n^* & \rightarrow \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & & \vec{x}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} H\vec{x}_1 &= \lambda_1 \vec{x}_1 \\ H\vec{x}_i &\overset{\text{ozn}}{=} \vec{h}_i,\ i \neq 1 \\ \langle \vec{x}_i | \vec{x}_1 \rangle &= \delta_{i1} \end{aligned}}$$

$$= \begin{pmatrix} \leftarrow & \vec{x}_1^* & \rightarrow \\ \leftarrow & \vec{x}_2^* & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \vec{x}_n^* & \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \lambda_1 \vec{x}_1 & \vec{h}_2 & & \vec{h}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

bo jest $U_1^\dagger H U_1$ hermitowska

$$\det(H - \lambda I) = \det\left(U_1^\dagger H U_1 - \lambda I\right) =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \begin{vmatrix} \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

Definiujemy macierz $\mathbf{H}_1$ stopnia $n-1$:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_1^\dagger \mathbf{H} \mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\mathbf{H}_1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Wśród wartości własnych $\mathbf{H}_1$ musi pojawić się λ_1. Konstruujemy układ $n-1$ ortonormalnych wektorów z których pierwszy jest wektorem własnym macierzy H1 do wartości własnej λ_1:

$$\vec{\mathbf{y}}_1 = \begin{pmatrix} y_{22} \\ y_{32} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{y}}_2 = \begin{pmatrix} y_{23} \\ y_{33} \\ \vdots \\ y_{n3} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{\mathbf{y}}_{n-1} = \begin{pmatrix} y_{2n} \\ y_{3n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H}_1 \vec{\mathbf{y}}_1 = \lambda_1 \vec{\mathbf{y}}_1$$

Definiujemy unitarną macierz $\mathbf{U}_2$ stopnia n:

$$\mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

Wówczas unitarna transformacja podobieństwa za pomocą $\mathbf{U}_2$ daje:

$$\mathbf{H}_1\vec{\mathbf{y}}_1 = \lambda_1\vec{\mathbf{y}}_1$$
$$\langle\vec{\mathbf{y}}_i|\vec{\mathbf{y}}_1\rangle = \delta_{i1}$$

$$\mathbf{U}_2^\dagger\left(\mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U}_1\right)\mathbf{U}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22}^* & \cdots & y_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y_{2n}^* & \cdots & y_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \iddots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{H}_1 & \vdots \\ 0 & \iddots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{n3} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

Jeśli λ_1 jest m-krotnie zdegenerowaną wartością własną to powyższy schemat powtarzamy m razy. Pozostała część macierzy może być zdiagonalizowana przez wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym.

Do zdiagonalizowania macierzy stopnia n potrzeba $n-1$ transformacji unitarnych:

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U} = \Lambda \qquad \mathbf{U} = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\cdots\mathbf{U}_{n-1}$$

<u>Wniosek:</u> Każda macierz hermitowska (lub rz. symetryczna) stopnia n posiada n ortogonalnych wektorów własnych bez względu na degeneracje wartości własnych.

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U} = \Lambda \;\Rightarrow\; \mathbf{U}\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U}\right) = \mathbf{U}\Lambda \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{U}\Lambda$$

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

<u>Przykład:</u> Znajdź unitarną macierz U diagonalizującą poprzez transformację podobieństwa macierz hermitowską

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

Wartości własne macierzy H są pierwiastkami jej równania charakterystycznego

$$\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & i & 1 \\ -i & 2-\lambda & i \\ 1 & -i & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

Mamy trzy wartości własne $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 0$

Niech $\vec{\mathbf{v}}_1 = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$ będzie jednym z wektorów własnych do wartości własnej λ_1:

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ -i & -1 & i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 - iv_2 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wybieramy trzy liniowo niezależne wektory

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

Korzystając z metody Grama-Schmidta znajdujemy układ wektorów ortonormalnych:

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \frac{\vec{\mathbf{v}}_1}{|\vec{\mathbf{v}}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{x}}_3' = \vec{\mathbf{v}}_3 - \langle \vec{\mathbf{x}}_1 | \vec{\mathbf{v}}_3 \rangle \vec{\mathbf{x}}_1 - \langle \vec{\mathbf{x}}_2 | \vec{\mathbf{v}}_3 \rangle \vec{\mathbf{x}}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{x}}_3 = \frac{\vec{\mathbf{x}}_3'}{|\vec{\mathbf{x}}_3'|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Unitarna transformacja podobieństwa za pomocą macierzy $\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix}\vec{\mathbf{x}}_1 & \vec{\mathbf{x}}_2 & \vec{\mathbf{x}}_3\end{pmatrix}$

$$\mathbf{U}_1^\dagger \mathbf{H} \mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & i & 1\\ -i & 2 & i\\ 1 & -i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -i\sqrt{2}\\ 0 & i\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

Ponieważ $\mathbf{H}$ i $\mathbf{U}_1^\dagger \mathbf{H} \mathbf{U}_1$ mają te same wartości własne, więc $\lambda = 3$ i $\lambda = 0$ muszą być wartościami własnymi podmacierzy

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Znormalizowane wektory własne macierzy $\mathbf{H}_1$ do wartości własnych $\lambda = 3$ i $\lambda = 0$ to

$$\vec{\mathbf{y}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{y}}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\frac{2}{3}} & i\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

A więc macierz diagonalizująca $\mathbf{U}$ ma postać

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\frac{2}{3}} & i\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -i\sqrt{\frac{2}{3}} & i\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

Rzeczywiście mamy:

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & i\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -i\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & i & 1\\ -i & 2 & i\\ 1 & -i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -i\sqrt{\frac{2}{3}} & i\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Kolumny macierzy $\mathbf{U}$ są ortonormalnymi wektorami własnymi macierzy $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}\vec{\mathbf{u}}_1=\lambda_1\vec{\mathbf{u}}_1:\quad\begin{pmatrix}2 & i & 1\\ -i & 2 & i\\ 1 & -i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}\vec{\mathbf{u}}_2=\lambda_2\vec{\mathbf{u}}_2:\quad\begin{pmatrix}2 & i & 1\\ -i & 2 & i\\ 1 & -i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ -i\sqrt{2}/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{6}\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ -i\sqrt{2}/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}\vec{\mathbf{u}}_3=\lambda_3\vec{\mathbf{u}}_3:\quad\begin{pmatrix}2 & i & 1\\ -i & 2 & i\\ 1 & -i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ i/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ i/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy hermitowskiej

W praktyce korzystamy z udowodnionego twierdzenia. Wektory własne do niezdegenerowanych wartości własnych znajdujemy w zwykły sposób.

Wektory własne do zdegenerowanej wartości własnej λ = 3 muszą spełniać warunek

$$x_1 - ix_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = ix_2 + x_3$$

W ogólności wektory własne dane są więc przez

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} ix_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeden z wektorów własnych znajdujemy wybierając np. x_2 = 0: $\vec{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Drugi wektor wybieramy jako ortogonalny do $\vec{\mathbf{u}}_1$:

$$\langle \vec{\mathbf{u}}_1 | \vec{\mathbf{u}} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ix_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2ix_3$$

Drugi wektor własny do wartości własnej λ =3 to $\vec{\mathbf{u}}_2 = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$

Równoczesna diagonalizacja macierzy

Twierdzenie: Dwie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ można jednocześnie zdiagonalizować poprzez transformację podobieństwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutują tzn. $\mathbf{AB=BA}$.

$D^{(\Rightarrow)}$:

$$\begin{array}{l} \mathbf{D}_1 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} \\ \mathbf{D}_2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BS} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ASS}^{-1}\mathbf{BS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ABS} \\ \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BSS}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BAS} \end{array}$$

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ABS} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BAS} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ABS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BAS} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

$D^{(\Leftarrow)}$: $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{D}_1 \qquad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BS} = \mathbf{B}'$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{ABS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ASS}^{-1}\mathbf{BS} = \mathbf{D}_1\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 b'_{11} & \lambda_1 b'_{12} & \cdots & \lambda_1 b'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n b'_{n1} & \lambda_n b'_{n2} & \cdots & \lambda_n b'_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{BAS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BSS}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{B}'\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 b'_{11} & \lambda_2 b'_{12} & \cdots & \lambda_n b'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 b'_{n1} & \lambda_2 b'_{n2} & \cdots & \lambda_n b'_{nn} \end{pmatrix}$$

Dla $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_1\mathbf{B}' = \mathbf{B}'\mathbf{D}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 b'_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n b'_{nn} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{D}_2$

Równoczesna diagonalizacja macierzy

Dla $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$ mamy

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \ddots & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \lambda & & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \lambda & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow \textit{i}\text{-ty wiersz} \\ \\ \longleftarrow \textit{j}\text{-ty wiersz} \\ \\ \end{array}$$

Ponieważ $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}\right)^\dagger$ więc istnieje unitarna macierz T taka, że:

$$\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}\right)\mathbf{T} = \mathbf{D}_2$$

Z drugiej strony mamy $\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{T} = \mathbf{D}_1\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{D}_1$

A więc istnieje macierz hermitowska $\mathbf{U}=\mathbf{S}\mathbf{T}$ diagonalizująca jednocześnie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.

Uwaga: W mechanice kwantowej operatory które można jednocześnie zdiagonalizować odpowiadają wielkościom fizycznym, których jednoczesny pomiar nie jest ograniczony zasadą nieoznaczoności.

Równoczesna diagonalizacja macierzy

Przykład: Znajdź unitarną macierz U diagonalizującą jednocześnie macierze

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}8 & 7\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\mathbf{BA}$$

Znajdujemy wartości własne i wektory własne macierzy A:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=1 \quad \lambda_2=3$$

$$\vec{\mathbf{v}}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{v}}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

A więc unitarna macierz diagonalizująca to $\mathbf{S}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Rzeczywiście mamy:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{BS}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

Jednocześnie widać, że wartościami własnymi macierzy B są $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=5$