# Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 9

# Podprzestrzenie macierzowe

Definicja: Zakresem macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$ nazywamy podprzestrzeń $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ przestrzeni $\mathcal{R}^m$ generowaną przez zakres funkcji $f(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$: $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^n\} \subseteq \mathcal{R}^m$

Definicja: Zakresem macierzy $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \in \mathcal{R}^{n\times m}$ nazywamy podprzestrzeń $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ przestrzeni $\mathcal{R}^n$ generowaną przez zakres funkcji $f(\vec{\mathbf{y}}) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{y}}$: $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{y}} \mid \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{R}^m\} \subseteq \mathcal{R}^n$

Wszystkie obrazy odwzorowania $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ są liniowymi kombinacjami kolumn macierzy $\mathbf{A}$, tzn, jeśli $\vec{\mathbf{x}} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}_{\bullet 1} \mid \mathbf{A}_{\bullet 2} \mid \ldots \mid \mathbf{A}_{\bullet n}\right)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{A}_{\bullet j}$$

A więc przestrzeń $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ to przestrzeń napięta przez kolumny macierzy $\mathbf{A}$ (przestrzeń kolumnowa), tzn. $\vec{\mathbf{b}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \exists \vec{\mathbf{x}},\ \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$

Podobnie $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ to przestrzeń napięta przez kolumny macierzy $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ czyli wiersze macierzy $\mathbf{A}$ (przestrzeń wierszowa), tzn. $\vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \Leftrightarrow \exists \vec{\mathbf{y}},\ \vec{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}} = \vec{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$

Przykład: Podaj interpretację geometryczną przestrzeni $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ oraz $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = span(\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \mathbf{A}_{\bullet 3}) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{A}) = span\left((1,2)^{\mathrm{T}}\right) \text{ – linia w } \mathcal{R}^2$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = span(\mathbf{A}_{1\bullet}, \mathbf{A}_{2\bullet}) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = span\left((1,2,3)^{\mathrm{T}}\right) \text{ – linia w } \mathcal{R}^3$$

# Podprzestrzenie macierzowe

Twierdzenie: Dla dwóch macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ o tych samych wymiarach zachodzi:

a) $\mathcal{R}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathcal{R}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right) \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B}$ b) $\mathcal{R}\left(\mathbf{A}\right)=\mathcal{R}\left(\mathbf{B}\right) \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{\text{kol}}{\sim} \mathbf{B}$

Dowód:

a) $\mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B} \Rightarrow$ istnieje $\mathbf{P}$ taka że $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$

$$\vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{R}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) \Leftrightarrow \exists \vec{\mathbf{y}} : \vec{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}} = \vec{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \vec{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PA} \overset{\vec{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} \equiv \vec{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{-1}}{\Leftrightarrow} \vec{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}} = \vec{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{R}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\mathcal{R}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathcal{R}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right) \Leftrightarrow span\left(\mathbf{A}_{1\bullet},\mathbf{A}_{2\bullet},\dots,\mathbf{A}_{m\bullet}\right) = span\left(\mathbf{B}_{1\bullet},\mathbf{B}_{2\bullet},\dots,\mathbf{B}_{m\bullet}\right) \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B}$$

b) dowód przebiega analogicznie jak w (a) zastępując odpowiednio $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ przez $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.

Przykład: Czy następujące zbiory wektorów napinają tą samą podprzestrzeń $\mathcal{R}^n$:

$$\mathcal{A} = \left\{(1,2,2,3)^{\mathrm{T}},(2,4,1,3)^{\mathrm{T}},(3,6,1,4)^{\mathrm{T}}\right\} \qquad \mathcal{B} = \left\{(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}\right\}$$

Konstruujemy macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, których wierszami są wektory ze zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\mathbf{A}} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\mathbf{B}}$$

$span(\mathbf{A}) = span(\mathbf{B})$ ponieważ niezerowe wiersze w macierzach $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$ i $\mathbf{E}_{\mathbf{B}}$ są takie same.

# Podprzestrzenie macierzowe

**Twierdzenie:** Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą o wymiarach $m \times n$, a $\mathbf{U}$ dowolną macierzą w postaci schodkowej otrzymaną z macierzy $\mathbf{A}$:

(a) niezerowe wiersze macierzy $\mathbf{U}$ napinają przestrzeń wierszową $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$,

(b) kolumny podstawowe w macierzy $\mathbf{A}$ napinają przestrzeń kolumnową $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

D: a) $\mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{U} \;\Rightarrow\; \mathcal{R}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)$

b) Niech $b_1, b_2, \ldots, b_r$ oraz $n_1, n_2, \ldots, n_t$ oznaczają odpowiednio podstawowe i niepodstawowe kolumny macierzy $\mathbf{A}$. Macierz $\mathbf{Q}_1$ niech będzie macierzą permutacji przestawiającą kolumny podstawowe na lewą stronę, tak że $\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_{m\times r} & \mathbf{N}_{m\times t}\end{pmatrix}$

Kolumny niepodstawowe są liniowymi kombinacjami kolumn podstawowych i mogą być wyzerowane za pomocą operacji elementarnych na kolumnach macierzy $\mathbf{A}\mathbf{Q}_1$:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_{m\times r} & \mathbf{N}_{m\times t}\end{pmatrix}\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \exists \mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 : \mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} \overset{\text{kol}}{\sim} \begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

**Przykład:** Znajdź zbiory napinające przestrzenie $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ i $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$, jeśli:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1 & 3\\ 3 & 6 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad \mathcal{R}(\mathbf{A}) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \mathcal{R}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

# Podprzestrzenie macierzowe

Definicja: Jądrem odwzorowania $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ nazywamy zbiór $\mathcal{N}(f) = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$

Twierdzenie: $\mathcal{N}(f)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{R}^n$.

D: $(\mathrm{A1}):\ \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{N}(f) \ \Rightarrow\ f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{0} \ \Rightarrow\ \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \mathcal{N}(f)$

$(\mathrm{M1}):\ \vec{x} \in \mathcal{N}(f)\ i\ \alpha \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) = \vec{0} \ \Rightarrow\ \alpha\vec{x} \in \mathcal{N}(f)$

Definicja: Przestrzenią zerową (jądrem) macierzy $\mathbf{A}_{m\times n}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\vec{x}_{n\times 1} \mid \mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathcal{R}^n$$

Definicja: Lewostronną przestrzenią zerową (lewostronnym jądrem) macierzy $\mathbf{A}_{m\times n}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \{\vec{y}_{m\times 1} \mid \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{y} = \vec{0}\} \subseteq \mathcal{R}^m$$

Przykład: Znajdź zbiór napinający przestrzeń $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ gdzie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Poszukiwany zbiór to ogólne rozwiązanie równania $\mathbf{A}\vec{x} = 0$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\mathrm{A}} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv x_2\vec{h}_1 + x_3\vec{h}_2$$

A więc $\mathcal{N}(\mathrm{A}) = span(\vec{h}_1, \vec{h}_2)$

# Podprzestrzenie macierzowe

Wniosek: Aby znaleźć zbiór napinający przestrzeń $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ gdzie rz$(\mathbf{A}_{m\times n}) = r$ należy zredukować $\mathbf{A}$ do postaci schodkowej $\mathbf{U}$, a następnie rozwiązać równanie $\mathbf{U}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ wyrażając zmienne podstawowe przez zmienne swobodne i znajdując w ten sposób ogólne rozwiązanie równania $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ w postaci $\vec{\mathbf{x}} = x_{f_1}\vec{\mathbf{h}}_1 + x_{f_2}\vec{\mathbf{h}}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\vec{\mathbf{h}}_{n-r}$

Zbiór wektorów $\mathcal{H} = \left\{\vec{\mathbf{h}}_1, \vec{\mathbf{h}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{h}}_{n-r}\right\}$ napina przestrzeń i jest niezależny od postaci $\mathbf{U}$.

Twierdzenie: Jeśli macierz $\mathbf{A}$ ma wymiar $m\times n$ to zachodzi:

$a)$ $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow rz(\mathbf{A}) = n$ $\quad$ $b)$ $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow rz(\mathbf{A}) = m$

Dowód:

(a) Wiemy, że rozwiązanie zerowe $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy $\mathbf{A}$ jest równy liczbie zmiennych.

(b) Podobnie, że rozwiązanie zerowe $\vec{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $\mathbf{A}^T\vec{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy rz$(\mathbf{A}^T) = m$. Ale zachodzi rz$(\mathbf{A}^T)$ = rz$(\mathbf{A})$

Twierdzenie: Dwie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ o tych samych wymiarach mają jednakowe przestrzenie zerowe gdy:

a) $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{B}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B}$ $\quad$ b) $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) = \mathcal{N}(\mathbf{B}^T) \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{\text{kol}}{\sim} \mathbf{B}$

# Podprzestrzenie macierzowe

Twierdzenie: Jeśli rz($\mathbf{A}_{m\times n}$) = $r$ oraz $\mathbf{PA} = \mathbf{U}$, gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą nieosobliwą, a $\mathbf{U}$ jest macierzą w postaci schodkowej, wtedy ostatnie $m-r$ wierszy macierzy $\mathbf{P}$ napina lewo-stronną przestrzeń zerową macierzy $\mathbf{A}$. Tzn. jeśli $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$ gdzie $\mathbf{P}_2$ ma wymiar $(m\text{-}r)\times m$ wtedy $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{P}_2^{\mathrm{T}}\right)$

Dowód: (trudny)

Przykład: Znajdź zbiór napinający przestrzeń $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ gdzie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Szukamy macierzy $\mathbf{P}$, takiej, że $\mathbf{PA} = \mathbf{E_A}$:

Dygresja: Jeśli $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_k$ są macierzami elementarnymi opowiadającymi kolejnym operacjom wierszowym w redukcji $\left[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}\right] \to \left[\mathbf{B}\,|\,\mathbf{P}\right]$ wtedy

$$\mathbf{G}_k \ldots \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1\left[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}\right] = \left[\mathbf{G}_k \ldots \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{G}_k \ldots \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1\right] = \left[\mathbf{B}\,|\,\mathbf{P}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix}$$

A więc: $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = span\left\{\left(1/3 \;\; -5/3 \;\; 1\right)^{\mathrm{T}}\right\}$

# Kombinacja liniowa wektorów

Definicja: Wektor $\vec{\mathbf{v}}$ z przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nazywamy liniową kombinacją wektorów $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_k \in \mathcal{V}$ jeśli daje się przedstawić w postaci:

$$\vec{\mathbf{v}} = c_1\,\vec{\mathbf{u}}_1 + c_2\,\vec{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_k\,\vec{\mathbf{u}}_k$$

Przykład: W zbiorze $S$ wektorów z przestrzeni $\mathcal{M}_{2\times 2}$ wektor $\vec{\mathbf{v}}_4$ jest kombinacją liniową pozostałych wektorów

$$S = \left\{ \vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Szukamy takich stałych $c_i$ aby zachodziło $\vec{\mathbf{v}}_4 = c_1\,\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\,\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3\,\vec{\mathbf{v}}_3$

$$\begin{cases} \quad\; - c_2 - 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 \qquad\;\; = 8 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ \qquad 2c_2 + 3c_3 = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\vec{\mathbf{v}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

# Liniowa niezależność wektorów

Definicja: Zbiór $S=\{\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,...,\vec{\mathbf{v}}_k\}$ wektorów z przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nazywamy liniowo niezależnymi jeśli równanie wektorowe: $c_1\,\vec{\mathbf{v}}_1+c_2\,\vec{\mathbf{v}}_2+...+c_k\,\vec{\mathbf{v}}_k=\vec{\mathbf{0}}$ ma jedynie rozwiązanie trywialne $c_1=0,\ c_2=0\ ,...,\ c_k=0.$

Jeśli istnieją rozwiązania nietrywialne, to wektory ze zbioru $S$ są liniowo zależne.

Twierdzenie: Dowolny układ wektorów $\vec{\mathbf{e}}_1,\vec{\mathbf{e}}_2,...,\vec{\mathbf{e}}_n$ z przestrzeni $\mathcal{C}^n$ lub $\mathcal{R}^n$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy macierz $\mathbf{A}=\left[\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2...\vec{\mathbf{e}}_n\right]$ której kolumnami są te wektory, jest nieosobliwa.

Wniosek: Aby sprawdzić czy wektory są liniowo niezależne należy zbudować z nich macierz i sprawdzić rząd tej macierzy, który określa liczbę liniowo niezależnych wektorów w danym zbiorze.

Twierdzenie: Jeżeli pewien podukład $m<n$ wektorów z układu wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,...,\vec{\mathbf{v}}_n$ jest liniowo zależny, to cały układ jest też liniowo zależny.

# Baza w przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$

Definicja: Zbiór liniowo niezależnych wektorów $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ należących do przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nazywamy bazą, jeśli dowolny wektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ może być zapisany jako:

$$\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{\mathbf{e}}_i$$

Liczbę $n$ nazywamy wymiarem przestrzeni $\mathcal{V}$ i oznaczamy $dim\mathcal{V}$.

Twierdzenie: Rozkład wektora na składowe w ustalonej bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n\}$ jest jednoznaczny.

Dowód: Niech wektor $\vec{\mathbf{x}}$ ma w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ dwa zestawy współrzędnych $x_i$ oraz $y_i$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\mathbf{e}}_i \\ \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\mathbf{e}}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\vec{\mathbf{e}}_i = \vec{0} \qquad \Rightarrow \quad x_i = y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, ..., n$$

Uwaga: dowolny zbiór $n$ liniowo niezależnych wektorów tworzy bazę w $n$ wymiarowej przestrzeni wektorowej. W nowej bazie zmieniają się współrzędne wektorów: $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{\mathbf{e}}_i'$

Twierdzenie: W $n$ wymiarowej przestrzeni wektorowej, każdy układ $s$ wektorów $n$ wymiarowych dla $s > n$ jest układem wektorów liniowo zależnych.

# Baza w przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$

**Dowód:** Niech zbiór wektorów $S=\{\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\dots,\vec{\mathbf{v}}_n\}$ będzie bazą w przestrzeni $\mathcal{V}$.

Chcemy pokazać, że zbiór $S_1=\{\vec{\mathbf{u}}_1,\vec{\mathbf{u}}_2,\dots,\vec{\mathbf{u}}_m\}$ wektorów z przestrzeni $\mathcal{V}$ *gdzie* $m>n$ jest liniowo zależny, tzn. istnieją stałe $k_1, k_2, \dots, k_m$ (nie wszystkie równe zero) takie, że:

$$k_1\vec{\mathbf{u}}_1+k_2\vec{\mathbf{u}}_2+\dots+k_m\vec{\mathbf{u}}_m=\vec{\mathbf{0}}$$

Ponieważ $S$ jest bazą, więc:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{u}}_1 &= c_{11}\vec{\mathbf{v}}_1+c_{21}\vec{\mathbf{v}}_2+\dots+c_{n1}\vec{\mathbf{v}}_n\\
\vec{\mathbf{u}}_2 &= c_{12}\vec{\mathbf{v}}_1+c_{22}\vec{\mathbf{v}}_2+\dots+c_{n2}\vec{\mathbf{v}}_n\\
&\ \vdots\\
\vec{\mathbf{u}}_m &= c_{1m}\vec{\mathbf{v}}_1+c_{2m}\vec{\mathbf{v}}_2+\dots+c_{nm}\vec{\mathbf{v}}_n
\end{aligned}$$

$$d_1\vec{\mathbf{v}}_1+d_2\vec{\mathbf{v}}_2+\dots+d_n\vec{\mathbf{v}}_n=\vec{\mathbf{0}}$$

gdzie $d_i=c_{i1}k_1+c_{i2}k_2+\dots+c_{im}k_m$

Ponieważ $\vec{\mathbf{v}}_i$ tworzą zbiór wektorów liniowo niezależnych więc wszystkie $d_i=0$, czyli

$$\begin{aligned}
c_{11}k_1+c_{12}k_2+\dots+c_{1m}k_m &= 0\\
c_{21}k_1+c_{22}k_2+\dots+c_{2m}k_m &= 0\\
\vdots\qquad\qquad &\ \ \vdots\\
c_{n1}k_1+c_{n2}k_2+\dots+c_{nm}k_m &= 0
\end{aligned}$$

Ponieważ w powyższym układzie jednorodnym mamy mniej równań niż zmiennych $k_i$, więc musi posiadać on nietrywialne rozwiązanie, a więc zbiór $S_1$ jest liniowo zależny.

# Zbiór wektorów tworzących bazę

Math Player

Przykład: Sprawdzić czy następujące wektory z przestrzeni $\mathcal{R}^3$ tworzą bazę:

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Sprawdzamy czy te wektory są liniowo niezależne:

$$\sum_{i=1}^{3} c_i \vec{\mathbf{e}}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + \phantom{2}c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ det $\mathbf{A}$ = 1, więc układ ma tylko rozwiązanie zerowe $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, a więc wektory są liniowo niezależne.

Aby przekonać się, że wektory $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ tworzą bazę w $\mathcal{R}^3$ należy pokazać, że dowolny wektor $\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$ można jednoznacznie przedstawić jako ich kombinację liniową:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{\mathbf{e}}_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 + v_2 + \phantom{2}v_3 = a \\ 2v_1 + v_2 + 3v_3 = b \\ v_1 - v_2 + 2v_3 = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a - 3b + 2c \\ -a + b - c \\ -3a + 2b - c \end{pmatrix}$$

Uwaga: $a$, $b$, $c$ to współrzędne wektora w bazie naturalnej: $\{(1,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,0)^{\mathrm{T}}, (0,0,1)^{\mathrm{T}}\}$

$v_1$, $v_2$, $v_3$ to współrzędne tego samego wektora w bazie $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$

# Macierz przejścia pomiędzy bazami w $\mathcal{R}^n$

**Niech będą dane dwie dowolne bazy w $\mathcal{R}^n$ : $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ oraz $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$, $i = 1,\dots,n$. Szukamy macierzy przejścia pomiędzy tymi bazami, takiej że (k numeruje elementy wektorów $e_i$ i $e_i$'):**

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\vec{\mathbf{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}'_{k1} = c_{11}\mathbf{e}_{k1} + c_{21}\mathbf{e}_{k2} + \dots + c_{n1}\mathbf{e}_{kn} \\ \mathbf{e}'_{k2} = c_{12}\mathbf{e}_{k1} + c_{22}\mathbf{e}_{k2} + \dots + c_{n2}\mathbf{e}_{kn} \\ \dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}'_{kn} = c_{1n}\mathbf{e}_{k1} + c_{2n}\mathbf{e}_{k2} + \dots + c_{nn}\mathbf{e}_{kn} \end{cases}$$

**W zapisie macierzowym mamy ($\mathbf{E}$ i $\mathbf{E}$' to macierze, których kolumnami są wektory baz):**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{11} & \mathbf{e}'_{12} & \cdots & \mathbf{e}'_{1n} \\ \mathbf{e}'_{21} & \mathbf{e}'_{22} & \cdots & \mathbf{e}'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}'_{n1} & \mathbf{e}'_{n2} & \cdots & \mathbf{e}'_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \cdots & \mathbf{e}_{1n} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} & \cdots & \mathbf{e}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{n1} & \mathbf{e}_{n2} & \cdots & \mathbf{e}_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'$$

**Macierz transformacji pomiędzy bazami $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ oraz $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ dana jest za pomocą macierzy:**

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'$$

# Transformacje współrzędnych wektora

Niech będą dane dwie dowolne bazy w $\mathcal{R}^n$ : $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ oraz $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$, $i$=1,...,n. Szukamy macierzy przejścia pomiędzy współrzędnymi dowolnego wektora w tych bazach:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{\mathbf{e}}'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{i,j=1}^{n} x'_i c_{ji} \vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\mathbf{e}}_j \qquad \Rightarrow \qquad x_j = \sum_{i=1}^{n} x'_i c_{ji}$$

W zapisie macierzowym mamy: $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}' \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{C}^{-1}\vec{\mathbf{x}}$

A więc macierz transformacji współrzędnych $\mathbf{O}$ dana jest przez:

$$\mathbf{O} \equiv \mathbf{C}^{-1} = \left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'\right)^{-1} = \mathbf{E}'^{-1}\mathbf{E}$$

Math Player

<u>Twierdzenie:</u> Macierz transformacji współrzędnych pomiędzy bazami ortonormalnymi, jest ortogonalna.

$$\mathbf{O}^{-1} = \left(\mathbf{E}'^{-1}\mathbf{E}\right)^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}' = \left\| \begin{matrix} \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{E}'^{-1} = \mathbf{E}'^{\mathrm{T}} \end{matrix} \right\| = \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{E}'^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{E}'^{-1}\mathbf{E}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$$

<u>Uwaga:</u> Macierz której kolumny (lub wiersze) są wzajemnie ortogonalnymi wektorami o jednostkowej długości, jest ortogonalna.