# Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 1

# Literatura


- Matematyka dla przyrodników i inżynierów, D.A. McQuarrie, PWN, 2008.
- Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki, A. Lenda, AGH, 2004.
- Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki. Rozwiązane problemy. A. Lenda, B. Spisak, AGH, 2006.
- Complex Variables with Applications, S. Ponnusamy, H. Silverman, Birkhauser, 2006.
- Mathematical Methods for Physics and Engineering, K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, Cambridge, 2006.
- Advanced Engineering Mathemathics, A. Jeffrey, Academic Press, 2001.
- Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide, G.B. Arfken, H.J. Weber, F.E. Harris, Academic Press, 2012.
- Advanced Modern Engineering Mathematics, G. James, Pearson, 2011.
- Physical Mathematics, K. Cahill, Cambridge, 2013.
- Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields, S. Hassani, Springer, 2008.
- Fundamentals of Differential Equations, R.K. Nagle, E.B. Saff, A.D. Snider, Pearson, 2011.


⇒ http://home.agh.edu.pl/mariuszp

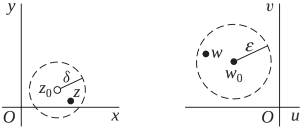
# Funkcja zmiennej zespolonej

Definicja: $z = x + iy$ nazywamy zmienną zespoloną gdy jej części rzeczywista oraz urojona są zmiennymi rzeczywistymi.

Definicja: Funkcją zmiennej zespolonej nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb zespolonych i o wartościach z tego zbioru: $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$

Definicja: Mówimy, że $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ jeśli dla każdej dodatniej liczby $\epsilon$ istnieje taka dodatnie liczba $\delta$, że

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{gdy} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$




Uwaga: Jeśli granica funkcji $f(z)$ istnieje w $z_0$, to jest ona jednoznaczna.

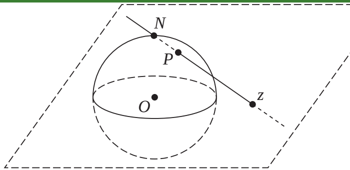
Twierdzenie: Niech $f(z)$ będzie funkcją zespoloną natomiast $z_0 = x_0 + iy_0$ oraz $w_0 = u_0 + iv_0$, wtedy:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \ \text{ oraz } \ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

Twierdzenie: Niech $\lim_{z \to z_0} f_1(z) = w_1$ oraz $\lim_{z \to z_0} f_2(z) = w_2$, wtedy

$$\lim_{z \to z_0} [f_1(z) + f_2(z)] = w_1 + w_2, \quad \lim_{z \to z_0} f_1(z) f_2(z) = w_1 w_2, \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{w_1}{w_2}, \ \text{gdy } w_2 \neq 0$$

# Granica funkcji zmiennej zespolonej w nieskończoności




Definicja: Rzutem stereograficznym nazywamy odwzorowanie płaszczyzny zespolonej na sferę Riemana o jednostkowym promieniu. Płaszczyzna zespolona leży w płaszczyźnie równikowej sfery, a środek sfery pokrywa się z początkiem układu.

W szczególności wszystkie punkty leżące na zewnątrz okręgu $|z| > 1/\varepsilon$ odpowiadają punktom na sferze leżącym w pobliżu bieguna północnego, $N$. Zbiór $|z| > 1/\varepsilon$ nazywamy otoczeniem nieskończoności.

Jeśli więc $z_0$ lub $w_0$ w definicji granicy $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ zastąpimy punktem w nieskończoności, to odpowiednie otoczenia punktów $z_0$ i/lub $w_0$ należy zastąpić otoczeniami nieskończoności.

Twierdzenie: Niech $f(z)$ będzie funkcją zespoloną, a $z_0$ i $w_0$ punktami na płaszczyznach zespolonych, odpowiednio, $z$ i $w$, wtedy:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Dowód: Punkt $w = f(z)$ leży w otoczeniu $\infty$ tzn. $|w| = |f(z)| > 1/\varepsilon$ zawsze gdy punkt $z$ leży w otoczeniu $z_0$, $0 < |z - z_0| < \delta$, co można inaczej zapisać

$$\left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{zawsze gdy} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

# Ciągłość funkcji zespolonej

Twierdzenie cd: Niech $f(z)$ będzie funkcją zespoloną, a $z_0$ i $w_0$ punktami na płaszczyznach zespolonych, odpowiednio, $z$ i $w$, wtedy:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to 0} f(1/z) = w_0$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

Dowody przebiegają analogicznie jak wyżej (zastępujemy $z$ przez $1/z$).

Definicja: Funkcja $f(z)$ jest ciągła w punkcie $z_0$ gdy $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, tzn. gdy dla każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ istnieje taka dodatnia liczba $\delta$, że

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{zawsze gdy} \quad |z - z_0| < \delta$$

Funkcja zespolona jest ciągła w obszarze $R$ jeśli jest ciągła w każdym punkcie należącym do $R$.

Twierdzenie: Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

D: $|g[f(z)] - g[f(z_0)]| < \varepsilon \;$ gdy $\; |f(z) - f(z_0)| < \gamma \;$ gdy $\; |z - z_0| < \delta$

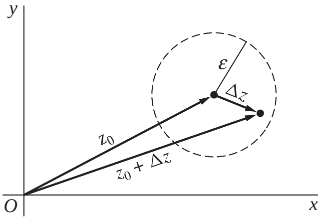
Twierdzenie: Jeśli funkcja $f(z)$ jest ciągła i niezerowa w punkcie $z_0$, wtedy $f(z) \neq 0$ w pewnym otoczeniu tego punktu.

# Pochodna funkcji zmiennej zespolonej

Pochodna funkcji zespolonej ($\Delta z = z - z_0$):

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}$$




Przykład: Oblicz, korzystając z definicji, pochodną funkcji:

- $f(z) = z^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$
- $f(z) = z^\star \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{(z+\Delta z)^\star - z^\star}{\Delta z} = \dfrac{(\Delta z)^\star}{\Delta z}$

Jeśli granica istnieje, to powinna być niezależna od sposobu w jaki $\Delta z$ dąży do zera. W szczególności jeśli dążymy do 0 wzdłuż osi $x$ lub $y$ wtedy:

$$(\Delta x, 0) \to 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta z)^\star = (\Delta x + i0)^\star = \Delta x - i0 = \Delta x + i0 = \Delta z$$

$$(0, \Delta y) \to 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta z)^\star = (0 + i\Delta y)^\star = 0 - i\Delta y = -(0 + i\Delta y) = -\Delta z$$

A więc granica, a w konsekwencji pochodna funkcji $f(z) = z^\star$, nie istnieje.

# Warunki Cauchy-Riemanna

Niech $F(z) \equiv u(x,y) + iv(x,y)$. Aby pochodna $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z$ była jednoznaczna, granica musi być niezależna od sposobu w jaki $\Delta z$ dąży do zera, czyli granice

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}\right] = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}\right] = -i\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

muszą istnieć i być sobie równe.

Warunek Cauchy-Riemanna (istnienia pochodnej funkcji $F(z)$): $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -i\dfrac{\partial F}{\partial y}$

co można zapisać za pomocą funkcji $u(x,y)$ i $v(x,y)$ w postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Przykład: Warunki CR dla funkcji $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$$u_x = 2x = v_y, \qquad u_y = -2y = -v_x \qquad \Rightarrow \qquad f'(z) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

Przykład: Pochodna funkcji $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i0$:

CR: $u_x = 2x = 0 = v_y, \quad u_y = 2y = 0 = -v_x$

A więc pochodna funkcji $f(z) = |z|^2$ istnieje tylko w punkcie $z_0 = (0,0)$.

# Warunki CR we współrzędnych biegunowych

Znane relacje: $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$

Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Warunki Cauchy-Riemanna przyjmują postać:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -i\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Jeśli $F(z)$ spełnia warunki CR w pewnym obszarze zawierającym punkt $z$, to jej pochodna może być wyrażona przez

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{lub} \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = -i\frac{\partial F}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

We współrzędnych biegunowych dostajemy:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\,\frac{\partial F}{\partial \theta} = \mathrm{e}^{-i\theta}\frac{\partial F}{\partial r} = -i\mathrm{e}^{-i\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

lub za pomocą funkcji $u(x,y)$ i $v(x,y)$:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right] = -i\mathrm{e}^{-i\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]$$

# Warunki C-R we współrzędnych biegunowych

Przykład: Rozważmy funkcję $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta), \quad z \neq 0$

Warunki Cauchy-Riemanna są spełnione:

$$ru_r = -\frac{\cos\theta}{r} = v_\theta \quad \text{oraz} \quad u_\theta = -\frac{\sin\theta}{r} = -rv_r$$

Pochodna funkcji $f(z)$ dla $z \neq 0$ jest równa:

$$f'(z) = \mathrm{e}^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} = \mathrm{e}^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = -\mathrm{e}^{-i\theta}\frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{r^2} = -\frac{1}{(r\mathrm{e}^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}$$

Uwaga: Relacje C-R stanowią warunek konieczny istnienia pochodnej funkcji.

Twierdzenie (warunenk wystarczający istnienia pochodnej): Niech funkcja $f(z) = u + iv$ będzie zdefiniowana w pewnym otoczeniu $\varepsilon$ punktu $z_0 = x_0 + iy_0$ oraz niech w tym otoczeniu istnieją pochodne funkcji $u$ i $v$ spełniające warunki C-R i bedące ciągłe w $z_0$. Wówczas istnieje pochodna funkcji $f'(z_0)$.

Dowód:

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(dx + i dy) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dz \end{aligned}$$

# Postać zespolona warunków C-R

Przykład: Pochodna funkcji $f(z) = \begin{cases} (z^\star)^2/z & \text{dla } z \neq 0 \\ 0 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$ w $z_0 = (0,0)$

$$f(z) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y^3 - 3x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Warunki C-R w $z = (0,0)$ są spełnione $u_x = 1 = v_y, \quad u_y = -2 = -v_y$.
Granice $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ w punkcie $z_0 = (0,0)$ wzdłuż osi układu są obie równe 1.
Ale granica dla $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ wzdłuż prostej $y = x$ wynosi -1.

Postać zespolona warunków Cauchy-Riemanna:

Dla dowolnego $z$ mamy: $x = \frac{1}{2}(z + z^\star)$ oraz $y = \frac{1}{2i}(z - z^\star)$

Stąd wynika, że: $$\frac{\partial F}{\partial z^\star} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^\star} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^\star} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

Dla dowolnej funkcji $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ której części rzeczywista i urojona spełniaja warunki C-R otrzymujemy:

$$\frac{\partial f}{\partial z^\star} = \frac{1}{2}\left[u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right] = \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)\right] = 0$$

# Funkcje analityczne

Definicja: Funkcję $F(z)$ nazywamy analityczną w punkcie $z_0$ jeśli $F(z)$ oraz wszystkie jej pochodne spełniają warunki Cauchy-Riemanna w pewnym otoczeniu punktu $z_0$.

Przykład: $F(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x \left(\cos y + i \sin y\right)$

Funkcja $\mathrm{e}^z$ spełnia warunki C-R:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy}\right) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^z = \ldots = -i\frac{\partial F}{\partial y}$$

a więc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$ i widać, że $\mathrm{e}^z$ jest funkcją analityczną.

Przykład: $F(z) = z^n = r^n \mathrm{e}^{in\theta} = r^n \left[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right]$

Funkcja $F(z)$ spełnia warunki C-R dla $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= r^n \cos(n\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r} = n r^{n-1} \cos(n\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ v(r,\theta) &= r^n \sin(n\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial r} = n r^{n-1} \sin(n\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

a więc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^n = \mathrm{e}^{-i\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^n \cos(n\theta)\right) + i\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^n \sin(n\theta)\right)\right] = n z^{n-1}$

Widać, że $z^n$ jest funkcją analityczną dla $n \geqslant 0$.

# Funkcje analityczne

Definicja: Funkcję $F(z)$ która jest analityczna dla wszystkich skończonych wartości zmiennej $z$ nazywamy funkcją całkowitą.

Uwaga: Pochodną funkcji $F(z)$ w punkcie $z_0$, która jest analityczna w pewnym obszarze zawierającym ten punkt, obliczamy analogicznie jak pochodną funkcji zmiennej rzeczywistej.

Uzasadnienie: jeśli $F(z)$ jest analityczna $z$ to spełnione są relacje:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$$

Różniczka $F(z)$ jest efektywnie różniczką funkcji pojedynczej zmiennej:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$$

Przykład: Funkcja $F(z) = z^{3/2} = (x+iy)^{3/2}$ nie jest analityczna w $z = 0$.

Warunki C-R są spełnione dla $F(z)$, bo $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{3}{2}(x+iy)^{1/2} = -i\frac{\partial F}{\partial y}$

Stosując warunki C-R do $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z$ otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3}{2}(x+iy)^{1/2}\right] = \frac{3}{2}\frac{1}{2}(x+iy)^{-1/2} = -i\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{3}{2}(x+iy)^{1/2}\right]$$

które nie jest określone dla $z = 0$, więc funkcja $z^{3/2}$ nie jest analityczna w $z = 0$.

# Równanie Laplace'a dla funkcji analitycznych

Jeśli $F(z)$ jest analityczna w obszarze $R$ zawierającym punkt $z$, czyli spełnione są warunki C-R: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ to wówczas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla^2 u = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla^2 v = 0$$

czyli funkcje $u(x,y)$ oraz $v(x,y)$ spełniają równanie Laplace'a w obszarze $R$. Taką parę funkcji nazywamy funkcjami harmonicznymi.

Jeśli funkcja $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ jest analityczna w pewnym obszarze $D$ nie zawierającym początku układu, to funkcje $u$ oraz $v$ spełniają równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych:

$$\nabla^2 u(r,\theta) \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u(r,\theta) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \nabla^2 v(r,\theta) = 0$$

Jeśli tylko część $u(x,y)$ lub $v(x,y)$ funkcji analitycznej $F(z)$ jest znana, to warunki C-R można wykorzystać do znalezienia nieznanej części:

Np. gdy znane jest $u(x,y)$ wtedy: $\displaystyle \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}y + A(x)$

# Znajdowanie funkcji analitycznych

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial u}{\partial y} - \int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad A(x) = -\int \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + C$$

$$v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \int \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + C$$

Przykład: Znajdź funkcję analityczną, której część rzeczywista $u(x,y) = x^2y^2$

$$A(x) = -\int \left[\frac{\partial u}{\mathrm{d}y} + \int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = -\int \left[2x^2y + \frac{2}{3}y^3\right]\mathrm{d}x$$

Ponieważ $A(x)$ zależy bezpośrednio także od $y$, więc oznacza to, że nie istnieje funkcja analityczna, której część rzeczywista ma postać $u(x,y) = x^2y^2$.

Przykład: Znajdź funkcję analityczną w której $u(x,y) = \sin x \cosh y$

Ponieważ $\quad A(x) = -\int \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = 0$

więc $\quad v(x,y) = \cos x \sinh y + C$

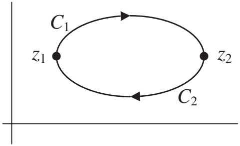
i ostatecznie znajdujemy funkcję $F(z)$ która jest analityczna:

$$F(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y + C = \sinh z + C$$

# Całkowanie funkcji analitycznych

Rozważmy całkę funkcji $F(z)$ wzdłuż pewnego konturu $C$ na płaszczyźnie zespolonej:

$$\int_C F(z)\mathrm{d}z$$




Istnieje nieskończenie wiele dróg całkowania pomiędzy zadanymi punktami $z_1$ i $z_2$. W ogólności wynik całki zależy od drogi całkowania.

W przypadku gdy wartość całki jednak nie zależy od drogi całkowania, wtedy:

$$\int_{z_1,\,C_1}^{z_2} F(z)\mathrm{d}z - \int_{z_1,\,C_2}^{z_2} F(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{z_1,\,C_1}^{z_2} F(z)\mathrm{d}z + \int_{z_2,\,C_2}^{z_1} F(z)\mathrm{d}z = 0$$

Jeśli więc wartość całki nie zależy od drogi całkowania, wtedy: $\oint_C F(z)\mathrm{d}z = 0$

Jakie warunki musi spełniać funkcja $F(z)$ w obszarze ograniczonym konturem $C$ aby spełniony był powyższy warunek?

Aby znaleźć odpowiedź, skorzystamy z twierdzenia Greena:

$$\oint_C (G\mathrm{d}x + H\mathrm{d}y) = \iint_R \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

# Całkowanie funkcji analitycznych

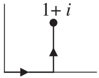
$$\oint_C F(z)\mathrm{d}z = \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = 0$$

$$\oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

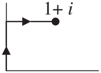
$$\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

A więc całka po konturze zamkniętym z funkcji analitycznej w obszarze objętym konturem, jest równa zero.

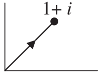
Przykład: Oblicz całkę $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2\mathrm{d}z = \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3$




$$I_a = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+iy)^2 i\mathrm{d}y = \frac{1}{3}(1+i)^3$$




$$I_b = \int_0^1 (iy)^2 i\mathrm{d}y + \int_0^1 (x+i)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+i)^3$$




$$I_c = \int_0^1 (1+i)^2 x^2 (1+i)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+i)^3$$