

Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 12

Zmienne położenie punktów końcowych

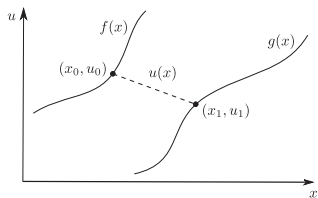
W niektórych zastosowaniach granice przedziału nie są określone i muszą być wyznaczone wraz ze stacjonarną funkcją (np. odległość pomiędzy krzywymi).

$$\text{Niech } J[u] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u') dx$$

$$\text{oraz } u_0 = u(x_0) = f(x_0) \quad \text{i} \quad u_1 = u(x_1) = g(x_1)$$

Można pokazać, że rozwiązaniem tego problemu jest r. E-L uzupełnione o następujące dwa warunki:

$$\left[F + (f' - u') \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=x_0} = \left[F + (g' - u') \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=x_1} = 0$$



Przykład: Znajdź najmniejszą odległość pomiędzy $f(x) = x - 3$ i $g(x) = e^x$

Jak już wiemy dla funkcjonału odległości $I[u] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (u')^2} dx$ funkcją stacjonarną na płaszczyźnie jest linia prosta $u(x) = c_1 x + c_2$.

Dodatkowe warunki prowadzą do równań:

$$\left. \begin{aligned} (1 + c_1^2) + (c_1 - c_1^2) &= 0 \\ c_1 e^{x_1} &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = -1, x_1 = \ln 1 = 0 \Rightarrow u(x_1) = g(x_1) = 1$$

$$(x_1, u(x_1)) = (0, 1) \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow u(x) = -x + 1$$

$$\text{Ponieważ } (x_0, u_0) = (2, -1) \Rightarrow I[u] = \int_2^0 \sqrt{1 + (u')^2} dx = -2\sqrt{2}$$

Funkcjonał zawierający pochodne wyższych rzędów

Rozważmy funkcjonal $I[u] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', u'') dx$

Odpowiadające mu równanie E-L ma postać: $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0$

Jest to zwyczajne równanie różniczkowe czwartego rzędu, a więc potrzebne są cztery warunki brzegowe wynikające ze znikania wariacji $\delta u = 0$ oraz $\delta u' = 0$ na krańcach przedziału całkowania w punktach x_1 i x_2 .

Naturalne warunki brzegowe w tym wypadku mają postać:

$$\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) - \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=x_1, x_2} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial u''} \Big|_{x=x_1, x_2} = 0$$

W ogólnym przypadku mamy: $I[u] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) dx$

Równanie E-L ma postać: $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \right) = 0$

Jest to zwyczajne równanie różniczkowe rzędu $2n$, wymagające $2n$ warunków brzegowych wynikających ze znikania wariacji $\delta u = 0$, $\delta u' = 0$, ..., $\delta u^{(n-1)} = 0$ na krańcach przedziału całkowania w punktach x_1 i x_2 .

Funkcjonały z dwiema zmiennymi niezależnymi

Rozważmy funkcjonal w którym funkcja $u(x, y)$ zależy od dwóch zmiennych niezależnych x oraz y :

$$I[u] = \iint_A F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$$

Żądamy aby wariacja funkcjonału zniknęła ($\delta x = \delta y = 0$):

$$\iint_A \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y \right] dx dy = 0$$

Korzystając z przemienności operacji wariacji i różniczkowania, oraz pochodnej iloczynu funkcji, mamy:

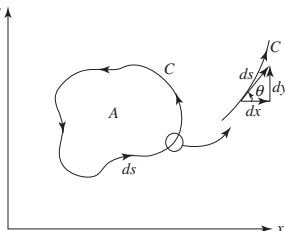
$$\iint_A \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \delta u + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \delta u \right] dx dy = 0$$

Korzystając z twierdzenia Greena, $\iint_A (P_x + Q_y) dx dy = \oint_C (P dy - Q dx)$, możemy powyższe równanie przepisać w postaci:

$$\iint_A \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right] \delta u dx dy + \oint_C \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y} \frac{dx}{ds} \right] \delta u ds = 0$$

$$\text{Równanie E-L: } \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0$$

z warunkiem brzegowym $u(x, y) = u_0(x, y)$ na konturze C jeśli $\delta u = 0$.



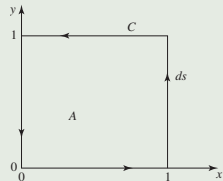
Funkcjonały z dwiema zmiennymi niezależnymi

Jeśli $\delta u \neq 0$ na C , wtedy NWB na C ma postać:
$$\frac{\partial F}{\partial u_x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y} \frac{dx}{ds} = 0$$

Przykład: Znajdź równanie E-L dla funkcji stacjonarnej $u(x, y)$ funkcjonału
$$\iint_A \frac{1}{2} (u_x^2 + u_x u_y + u^2 + 2xu) dx dy,$$
 gdzie obszar A to kwadrat $0 \leq x, y \leq 1$. Warunki brzegowe są zadane przez $u(0, y) = 3y$, $u(x, 0) = 2x$ oraz jako NWB dla $x = 1$ lub $y = 1$.

Równanie E-L przyjmuje postać:

$$u + x - \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x + \frac{1}{2} u_y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} u_x \right) = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u = x$$



Warunki brzegowe: zadane w postaci $u(0, y) = 3y$, $u(x, 0) = 2x$ oraz NWB:

$$\begin{cases} x = 1 : dx = 0, dy = ds, \frac{dx}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u_x} = 0 \Rightarrow u_x + \frac{1}{2} u_y = 0 \\ y = 1 : dx = -ds, dy = 0, \frac{dy}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0 \Rightarrow u_x = 0 \end{cases}$$

Minimalne powierzchnie - problem Plateau

W wielu problemach fizyki energia potencjalna jest proporcjonalna do powierzchni. Zastosowania m. in. w inżynierii molekularnej czy fizyce czarnych dziur.

Przykład: Najmniejsza powierzchnia rozpostarta na drucie opisanym funkcją $u(x, y) = g(x, y)$, którego rzut na płaszczyznę (x, y) jest krzywą C .

Chcemy zminimalizować funkcjonal powierzchni:

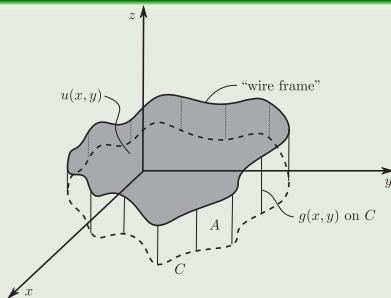
$$I[u] = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

przy warunku brzegowym $u(x, y) = g(x, y)$ na konturze C .

Równanie E-L przyjmuje postać:

$$0 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-1/2} (2u_x) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-1/2} (2u_y) \right] = 0$$

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$$



Równania Eulera dla wielu zmiennych zależnych

Rozważamy sytuację w której F na postać $F\{x, y_i(x), y_i'(x)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Wprowadzając funkcje $y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha \eta_i(x)$ oraz postępując identycznie jak w przypadku jednej zmiennej zależnej, otrzymujemy:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) \eta_i(x) dx$$

Ponieważ poszczególne funkcje $\eta_i(x)$ są niezależne, więc warunkiem zerowania się powyższej całki, jest niezależne zerowanie się wszystkich współczynników w sumie, czyli:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Jeśli funkcją F jest lagrangian układu, $L = T - V$, to zasada wariacyjna prowadzi do wniosku, że całka po czasie z lagrangianu układu musi w ruchu rzeczywistym przyjmować wartość ekstremalną (zasada Hamiltona). Kiedy siły działające w układzie są zachowawcze to wówczas r. E-L przyjmują postać:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$i = 1, \dots, n$, gdzie n jest liczbą stopni swobody, a q_i to współrzędne uogólnione.

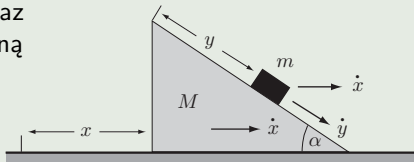
Zastosowania równań Lagrange'a

Przykład: Blok zsuwający się bez tarcia po równi, która także może się poruszać bez tarcia po poziomej powierzchni.

Jako współrzędne uogólnione wybieramy x oraz y jak na rysunku. Obliczamy energie kinetyczną i potencjalną układu:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha)$$

$$V = -mgy \sin\alpha$$



Obliczamy wielkości potrzebne do równań Lagrange'a:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m \cos\alpha \dot{y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m \cos\alpha \dot{x} + m\dot{y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -mg \sin\alpha.$$

Równania Lagrange'a przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} [(M + m)\dot{x} + m \cos\alpha \dot{y}] - 0 = 0$$

$$\frac{d}{dt} [m \cos\alpha \dot{x} + m\dot{y}] - 0 = mg \sin\alpha$$

Po zróżniczkowaniu i rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$\ddot{x} = \frac{mg \sin\alpha \cos\alpha}{M + m \sin^2\alpha} \quad \ddot{y} = \frac{(M + m)g \sin\alpha}{M + m \sin^2\alpha}$$

Przykład - dwie funkcje zależne

Przykład: Znajdź funkcje stacjonarne $u(x)$ i $v(x)$ funkcjonału:

$$I[u, v] = \int_0^{\pi/4} (v'^2 + v'u' + u^2) dx$$

z warunkami brzegowymi $u(0) = 1$, $v(0) = 3/2$, $u(\pi/4) = 2$.

Równania E-L i ich rozwiązania:

$$\left. \begin{array}{l} v'' - 2u = 0 \\ u'' + 2v'' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u'' + 4u = 0 \Rightarrow u(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

Z warunków brzegowych mamy: $u(x) = \cos(2x) + 2 \sin(2x)$

Wstawiając do pierwszego z r. E-L otrzymujemy:

$$v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) - \sin(2x) + c_3 x + c_4$$

Z warunku brzegowego $v(0) = 3/2$ otrzymujemy $c_4 = 2$.

Ponieważ nie jest podany warunek brzegowy dla $v(\pi/4)$, więc stosujemy NWB:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial v'} \right|_{x=\pi/4} = 0 \Rightarrow [u' + 2v']_{x=\pi/4} = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

Ostatecznie mamy: $v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) - \sin(2x) + 2$

Równania E-L z więzami - więzy całkowe

Rozważmy funkcjonal $I[u] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u') dx$, oraz załóżmy, że funkcja $u(x)$ podlega dodatkowemu ograniczeniu (więzowi) w postaci całki oznaczonej:

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x, u, u') dx = K \equiv \text{const}$$

Do znalezienia r. E-L wykorzystamy metodę współczynników Lagrange'a:

$$\delta \left\{ \Lambda \left[\int_{x_1}^{x_2} G(x, u, u') dx - K \right] \right\} = \delta \left\{ \Lambda \int_{x_1}^{x_2} G(x, u, u') dx \right\} = 0$$

Łącząc ten wynik z wariacją funkcjonału $I[u]$ otrzymujemy:

$$\delta \left[\int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u') dx + \Lambda \int_{x_1}^{x_2} G(x, u, u') dx \right] \equiv \delta \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}(\Lambda, x, u, u') dx = 0$$

Rozszerzony funkcjonal $\tilde{F} \equiv F + \Lambda G$ spełnia standardowe r. E-L, przy czym współczynnik Lagrange'a Λ jest dodatkowym parametrem, który musi być wyznaczony z warunków początkowych $u(x_1) = u_1$, $u(x_2) = u_2$ oraz r. więzów.

Więzy w postaci całkowej

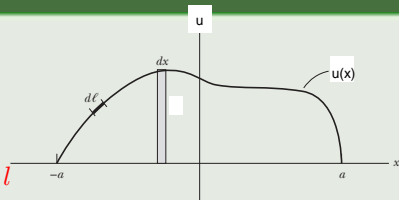
Przykład: Szukamy równania krzywej o zadanej długości l , która przechodząc przez punkty $(-a, 0)$ oraz $(a, 0)$ ogranicza wraz z odcinkiem osi x obszar o maksymalnej powierzchni.

Szukamy wartości stacjonarnej funkcjonału:

$$I[u] = \int F(x, u, u') dx = \int_{-a}^a u dx$$

z więzom w postaci całkowej:

$$\int G(x, u, u') dx = \int_{-a}^a [1 + u'^2]^{1/2} dx = l$$



Równanie E-L dla $\tilde{F} = F + \Lambda G$ przyjmuje postać:

$$1 - \Lambda \frac{d}{dx} \left[\frac{u'}{(1 + u'^2)^{1/2}} \right] = 0 \quad \int dx \quad \frac{\Lambda u'}{(1 + u'^2)^{1/2}} = x - C_1$$

Po kolejnym przekształceniu i scałkowaniu otrzymujemy:

$$u(x) = \pm \sqrt{\Lambda^2 - (x - C_1)^2} + C_2 \Rightarrow (x - C_1)^2 + (u - C_2)^2 = \Lambda^2$$

Stałe C_1 , C_2 i Λ wyznaczamy z warunków narzuconych przez więzy:

$$C_1 = C_2 = 0, \quad \Lambda = a \text{ oraz } a = l/\pi.$$

Więzy algebraiczne i różniczkowe

Poszukujemy funkcji stacjonarnych $u(x)$ i $v(x)$ funkcjonału:

$$I[u, v] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, v, u', v') dx$$

podlegających więzom algebraicznym w postaci: $\phi(u, v) = 0$

lub więzom w postaci równania różniczkowego: $\phi(u, v, u', v') = 0$

Zasadniczą różnicą pomiędzy więzami w postaci całkowej i różniczkowej (algebraicznej) jest to, że te pierwsze charakteryzują cały przedział (x_1, x_2) , a te ostatnie zależą od każdego punktu wewnątrz tego przedziału.

W związku z czym w metodzie mnożników Lagrange'a, Λ jest efektywnie funkcją $\Lambda(x)$. Prowadzi to do funkcji rozszerzonej w postaci $\tilde{F} = F + \Lambda(x)\phi$

Z warunku znikania wariacji funkcjonału $\delta I[u, v] = 0$ otrzymujemy r. E-L dla funkcji $u(x)$ i $v(x)$.

Wariacja funkcji więzów daje: $\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\phi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial\phi}{\partial v'}\delta v' = 0$

Mnożąc $\delta\phi$ przez $\Lambda(x)$ i całkując w zakresie od x_1 do x_2 , otrzymujemy:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Lambda(x) \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\phi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial\phi}{\partial v'}\delta v' \right) dx = 0$$

Więzy algebraiczne i różniczkowe

Całkując przez części dwa ostatnie wyrazy otrzymujemy:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Lambda(x) \frac{\partial \phi}{\partial u'} \delta u' dx = \left[\Lambda(x) \frac{\partial \phi}{\partial u'} \delta u \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\Lambda \frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) \delta u dx = 0$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \Lambda(x) \frac{\partial \phi}{\partial v'} \delta v' dx = \left[\Lambda(x) \frac{\partial \phi}{\partial v'} \delta v \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\Lambda \frac{\partial \phi}{\partial v'} \right) \delta v dx = 0$$

Łącząc powyższe z $\delta I = \delta \int F dx = 0$, otrzymujemy:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\Lambda \frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) \right] \delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) + \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\Lambda \frac{\partial \phi}{\partial v'} \right) \right] \delta v \right\} dx = 0$$

A stąd otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\Lambda \frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'} \right) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) + \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\Lambda \frac{\partial \phi}{\partial v'} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial v'} \right) = 0$$

Korzystając z powyższych r. E-L oraz z r. więzów wyznaczamy: $u(x)$, $v(x)$, $\Lambda(x)$.

Uwaga: Ponieważ $\Lambda(x)$ także podlega wariacjom, więc w ogólności należałoby

uwzględnić r. E-L dla $\Lambda(x)$:
$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \Lambda} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \Lambda'(x)} \right) = 0$$

Jednak $\partial \tilde{F} / \partial \Lambda' = 0$, i dlatego powyższe r. E-L sprowadza się do r. więzów $\phi = 0$.

W ogólnym przypadku n funkcji zależnych ($u_i(x)$, $i = 1, \dots, n$) oraz m więzów postaci ($\phi_j(u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n) = 0$, $j = 1, \dots, m$) mamy $n + m$ równań:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad \phi_j = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

gdzie
$$\tilde{F} = F + \sum_{j=1}^m \Lambda_j(x) \phi_j$$

Z równań tych oraz z warunków brzegowych wyznaczamy nieznanne funkcje stacjonarne $u_i(x)$ oraz mnożniki Lagrange'a $\Lambda_j(x)$.

Równania E-L z więzami

Przykład: Znajdź funkcje stacjonarne dla funkcjonału:

$$I[u, v] = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} [(u')^2 + (v')^2] + uv \right\} dx$$

podlegające więzowi w postaci $\phi(u, v') = v' - u = 0$, przy warunkach brzegowych: $u(0) = 0, u(1) = 0, v(0) = 0, v(1) = 0$.

Funkcja rozszerzona ma postać:

$$\tilde{F}(\Lambda, x, u, v, u', v') = F + \Lambda(x)\phi = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) + uv + \Lambda(x)(v' - u)$$

R. E-L dla funkcji $u(x)$ i $v(x)$ przyjmują postać:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I: } v - \Lambda - \frac{d}{dx}(u') = 0 \Rightarrow u'' - v = -\Lambda \\ \text{II: } u - \frac{d}{dx}(v' + \Lambda) = 0 \Rightarrow v'' - u = -\Lambda' \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{I-II}]{\text{I'}} u''' - v' = v'' - u$$

Korzystając z równania więzów, $v' - u = 0$, otrzymujemy: $u''' - u' = 0$

Rozwiązanie ma postać: $u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3$

Z równania więzów znajdujemy: $v(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x + c_4$

Stałe $c_1 - c_4$ wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$c_1 = e/(e-3), \quad c_2 = 1/(e-3), \quad c_3 = -(e+1)/(e-3), \quad c_4 = (e-1)/(e-3)$$

Równania E-L z więzami

Przykład: Dysk toczący się bez poślizgu po statycznej równi pochyłej.

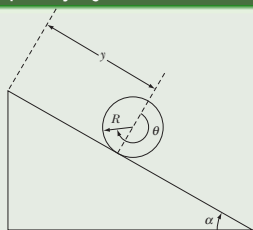
Jako zmienne służące do opisu ruchu wybieramy y oraz θ .

Warunek toczenia się bez poślizgu zapiszemy jako więź:

$$y = R\theta \quad \Rightarrow \quad \phi(y, \theta) = y - R\theta = 0$$

Energia kinetyczna i potencjalna toczącego się dysku:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2, \quad V = -mgy \sin \alpha$$



$$\tilde{F} = T - V + \Lambda(t)\phi = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy \sin \alpha + \Lambda(t)(y - R\theta)$$

Równania E-L przyjmują postać:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I: } mg \sin \alpha + \Lambda - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \Rightarrow m\ddot{y} - mg \sin \alpha = \Lambda \\ \text{II: } -R\Lambda - \frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow I\ddot{\theta} = -R\Lambda \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{I+II}]{\text{I} \cdot R} \left\{ \ddot{y} = R\ddot{\theta} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(mR + \frac{I}{R}\right) \ddot{y} = mgR \sin \alpha \Rightarrow \ddot{y} = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad \ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R}, \quad \Lambda(t) = -\frac{1}{3}mg \sin \alpha$$