

Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 2

Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej

Wiele twierdzeń dotyczących rachunku różniczkowego i całkowego zmiennej rzeczywistej stosuje się także do funkcji o wartościach zespolonych zmiennej rzeczywistej.

$$\text{Niech } w(t) = u(t) + iv(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w'(t) = u'(t) + iv'(t) \\ \int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \end{cases}$$

Przykład: Pochodna funkcji $w(t) = e^{z_0 t} = e^{x_0 t} e^{iy_0 t}$, $t \in \mathcal{R}$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{z_0 t} &= \frac{d}{dt} (e^{x_0 t} \cos y_0 t + i e^{x_0 t} \sin y_0 t) = \\ &= (x_0 + iy_0)(e^{x_0 t} \cos y_0 t + i e^{x_0 t} \sin y_0 t) = (x_0 + iy_0)e^{x_0 t} e^{iy_0 t} = z_0 e^{z_0 t} \end{aligned}$$

Przykład: Oblicz całkę $\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$

$$\int_0^{\pi/4} e^{it} dt = -ie^{it} \Big|_0^{\pi/4} = -ie^{i\pi/4} + i = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ale, np. dla funkcji zespolonej $w(t)$, $a \leq t \leq b$ nie są w ogólności spełnione twierdzenia o wartości średniej dla pochodnej i całki:

$$w'(c) = \frac{w(b) - w(a)}{b - a} \quad \text{oraz} \quad \int_a^b w(t)dt = w(c)(b - a)$$

Przykład: $w(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow |w'(t)| = |ie^{it}| = 1$, $w(0) = w(2\pi) = 1$

Całkowanie funkcji zespolonych po konturze

Całki funkcji zespolonych zmiennej zespolonej są zdefiniowane wzdłuż zadanych krzywych (konturów) na płaszczyźnie zespolonej.

Niech $z(t)$, $a \leq t \leq b$, będzie równaniem parametrycznym konturu C , rozciągającego się od $z_1 = z(a)$ do $z_2 = z(b)$.

Zakładając, że funkcja $f(z(t))$ jest odcinkami ciągła na przedziale $a \leq t \leq b$, definiujemy całkę liniową (wzdłuż konturu C) jako:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

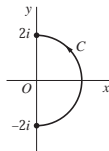
Uwaga: Długość konturu to $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^b |z'(t)| dt$

Przykład: Oblicz całkę $I = \int_C z^* dz$ gdzie C jest prawą częścią okręgu $|z| = 2$.

$$z(\theta) = 2e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2e^{i\theta})^* (2e^{i\theta})' d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = 4\pi i$$

Ponieważ $zz^* = |z|^2 = 4$ więc widać, że $\int_C \frac{dz}{z} = \pi i$.



Całkowanie funkcji zespolonych po konturze

Twierdzenie: Niech $w(t)$ będzie odcinkami ciągłą funkcją o wartościach zespolonych określoną na przedziale $a \leq t \leq b$, wtedy: $\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt$

Dowód: Twierdzenie jest w oczywisty sposób prawdziwe gdy całka po lewej stronie jest równa zero. Załóżmy więc, że jest różną od zera liczbą zespoloną:

$$\begin{aligned} \int_a^b w(t) dt = r_0 e^{i\theta_0} \quad \Rightarrow \quad r_0 &= \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t) dt = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t) dt = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta_0} w(t)] dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta_0} w(t)| dt = \int_a^b |w(t)| dt \end{aligned}$$

Twierdzenie: Niech C oznacza kontur o długości L oraz załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest odcinkami ciągła na C . Jeśli M jest stałą taką, że $|f(z)| \leq M$ dla wszystkich punktów z na konturze C , wtedy $|\int_C f(z) dz| \leq ML$.

Dowód: Niech $z(t)$, $a \leq t \leq b$ będzie parametryzacją konturu C , wtedy

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt = \\ &= \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML \end{aligned}$$

Osobliwości funkcji zespolonych

Funkcja $F(z)$ która nie spełnia warunków C-R w otoczeniu punktu z_0 , a więc nie jest w tym punkcie analityczna, mówimy że ma w punkcie z_0 **osobliwość**.

Przykład: $F(z) = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{(x + iy)^2} = -\frac{1}{z^2} \quad -i \frac{\partial F}{\partial y} = -i \left[\frac{-i}{(x + iy)^2} \right] = -\frac{1}{z^2}$$

Warunki C-R są spełnione na całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem punktu $z_0 = 0$, a więc funkcja $F(z) = 1/z$ ma osobliwość w tym punkcie.

Dla funkcji $F(z)$ osobliwej w punkcie z_0 najczęściej istnieje pewna najmniejsza nieujemna liczba k dla której $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^k F}{dz^k} = \infty$ (patrz przykłady $z^{3/2}$, $1/z$).

Osobliwość funkcji $F(z)$ w punkcie z_0 nazywamy **osobliwością usuwalną** jeśli istnieje dodatnia liczba rzeczywista p taka, że

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p \frac{d^k F}{dz^k} \neq \infty$$

Gdy taka liczba p nie istnieje to osobliwość nazywamy **nieusuwalną**.

Osobliwości usuwalne i nieusuwalne

Przykład: Osobliwość funkcji $F(z) = z^{3/2}$ w punkcie $z_0 = 0$ jest usuwalna:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} z^{3/2} = \frac{3}{4} \lim_{z \rightarrow 0} z^{-1/2} = \infty \quad \text{ale} \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^{k+1/2} \left(\frac{d^{2+k}}{dz^{2+k}} z^{3/2} \right) \neq \infty$$

Przykład: Funkcja $F(z) = e^{1/z}$ jest osobliwa w $z = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z} &= \infty && \text{dla } z \rightarrow 0 \text{ wzdłuż dodatniej osi rzeczywistej} \\ \lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z} &= 0 && \text{dla } z \rightarrow 0 \text{ wzdłuż ujemnej osi rzeczywistej} \\ \lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z} &= e^{\pm i\infty} && \text{dla } z \rightarrow 0 \text{ wzdłuż ujemnej lub dodatniej osi urojonej} \end{aligned}$$

a więc funkcja $e^{1/z}$ nie jest jednoznacznie określona w $z = 0$ i dlatego jest osobliwa w $z = 0$. Jest to osobliwość nieusuwalna, ponieważ nie istnieje potęga z która usunęłaby tę osobliwość.

Uwaga: Tylko funkcje posiadające usuwalne osobliwości są całkowalne.

Istnieją dwa typy osobliwości usuwalnych: **bieguny** oraz **punkty rozgałęzienia**.

Osobliwości biegunowe

Definicja: Mówimy, że funkcja $F(z)$ posiada **biegun rzędu N** w punkcie z_0 jeśli $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \infty$ oraz $R(z) \equiv (z - z_0)^N F(z)$ jest analityczna w pewnym otoczeniu punktu z_0 oraz $R(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^N F(z) \neq 0$ i skończona. Gdy $N = 1$, biegun nazywamy **prostym**, a wartość $R(z_0)$ nosi nazwę **residuum**.

Przykład: Funkcja $F(z) = \frac{1}{z}$ ma biegun prosty w punkcie $z = 0$:

$$R(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z} = 1 \quad - \text{skończona i niezerowa w } z = 0$$

Przykład: Funkcja $F(z) = \frac{\sin(z+1)}{z^3}$ ma biegun trzeciego rzędu w $z = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = \infty \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^3 F(z) = \sin(1) \neq 0$$

Przykład: Funkcja $F(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ ma biegun drugiego rzędu w $z = 0$:

$$R(z) = z^3 F(z) = \sin z \quad \Rightarrow \quad R(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin z = 0$$

$$\sin z \approx z \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin z}{z^3} \approx \frac{1}{z^2} \quad \Rightarrow \quad R(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z^2} = 1 \neq 0$$

Twierdzenie Cauchy'ego o reszduach

Chcemy obliczyć całkę wzdłuż zamkniętego konturu C_a z funkcji analitycznej (w obszarze w którym leży kontur) $F(z)$, która ma biegun prosty w punkcie z_0 .

Całka wzdłuż konturu C_b jest równa zero, ponieważ kontur ten nie obejmuje bieguna:

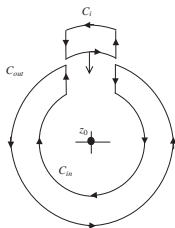
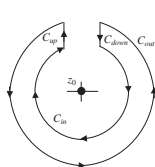
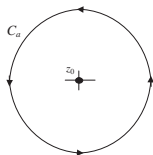
$$\oint_{C_b} F(z) dz = \int_{C_{out}} F(z) dz + \int_{C_{down}} F(z) dz + \int_{C_{in}} F(z) dz + \int_{C_{up}} F(z) dz = 0$$

Domykamy kontur za pomocą konturu C_i , wówczas mamy:

$$\oint_{C_b} F(z) dz = \oint_{C_a} F(z) dz + \oint_{C_{in}} F(z) dz = 0$$

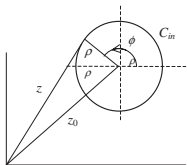
Zmieniamy kierunek obiegu konturu C_{in} na przeciwny do ruchu wskazówek zegara (*pdrwz*):

$$\oint_{C_a} F(z) dz = \oint_{C_{in}} F(z) dz$$



Twierdzenie Cauchy'ego o residuach

Ten sam rezultat można otrzymać inaczej. Ponieważ z_0 jest jedyną osobliwością funkcji $F(z)$ objętą konturem C_{in} , więc kontur ten można zdeformować do okręgu o środku w punkcie $z = z_0$, nie zmieniając przy tym wartości całki liczonej wzdłuż C_{in} .



$$\text{Ponieważ } z = z_0 + \rho e^{i\phi} \Rightarrow dz = i\rho e^{i\phi} d\phi = i(z - z_0)d\phi$$

$$\text{więc } \oint_{C_{in}} F(z)dz = i \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} (z - z_0)F(z)d\phi$$

Przechodząc do okręgu o infinitezymalnie małym promieniu oraz korzystając z definicji residuum, mamy:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{C_{in}} F(z)dz = \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)F(z)id\phi = 2\pi i R(z_0)$$

$$\text{A więc ostatecznie mamy: } \oint_{C_a} F(z)dz = 2\pi i R(z_0)$$

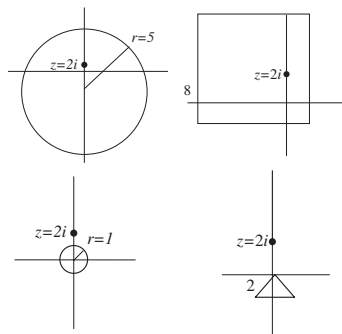
Twierdzenie Cauchy'ego o residuach

Przykład: Oblicz całkę $I \equiv \oint \frac{e^z \sin z}{(z - 2i)} dz$ po zadanym konturze.

Funkcja podcałkowa jest analityczna wszędzie z wyjątkiem punktu $z_0 = 2i$, więc

$$\oint_{C_1} \frac{e^z \sin z}{(z - 2i)} dz = 2\pi i R(2i) = -2\pi e^{2i} \sinh(2)$$

$$\oint_{C_2} \frac{e^z \sin z}{(z - 2i)} dz = 0$$



Modyfikacja konturu całkowania nie wpływa na wartość całki o ile da się go zdeformować w sposób ciągły nie przechodząc przez osobliwość.

A więc całka po kwadracie jest równa całce po okręgu o promieniu $r = 5$, a całka po trójkącie jest równa całce po okręgu o promieniu $r = 1$.

Twierdzenie Cauchy'ego o residuach

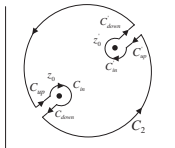
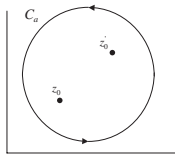
Twierdzenie Cauchy'ego w przypadku większej liczby biegunów prostych

Rozważmy dwa bieguny z_0 i z'_0 wewnątrz konturu C_a :

$$\oint_{C_a} F(z)dz = \oint_{C_{in}} F(z)dz + \oint_{C'_{in}} F(z)dz = 2\pi i R(z_0) + 2\pi i R(z'_0)$$

Dla większej liczby biegunów prostych mamy:

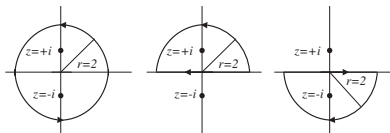
$$\oint_C F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N R(z_k)$$



Przykład: Oblicz całkę $I \equiv \oint \frac{e^z}{(z^2+1)} dz$ po zadanych konturach.

$$R(i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^z}{(z - i)(z + i)} = \frac{e^i}{2i}$$

$$R(-i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{e^z}{(z - i)(z + i)} = \frac{e^{-i}}{-2i}$$



$$I_a = 2\pi i \left[\frac{e^i - e^{-i}}{2i} \right]$$

$$I_b = 2\pi i R(i) = \pi e^i$$

$$I_c = 2\pi i R(-i) = \pi e^{-i}$$

Reprezentacja całkowa Cauchy'ego

Twierdzenie Cauchy'ego w przypadku biegunów wyższych rzędów

Jeśli funkcja $f(w)$ jest analityczna wewnątrz i na pewnym konturze, to funkcja $F(w) \equiv \frac{f(w)}{(w-z)}$ ma biegun prosty dla $w = z$, czyli

$$\oint_C F(w)dw = \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)}dw = 2\pi i \lim_{w \rightarrow z} (w-z) \frac{f(w)}{(w-z)} = 2\pi i f(z)$$

Stąd otrzymujemy **reprezentację całkową Cauchy'ego** funkcji analitycznej:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)}dw$$

Niech $f(z)$ będzie analityczna we wszystkich punktach z obszaru R . Wówczas istnieje pochodne:

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw, \quad \frac{d^2f}{dz^2} = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw, \quad \dots, \quad \frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

Powyższa reprezentacja całkowa Cauchy'ego pochodnych jest również słuszna dla $n = 0$, czyli samej funkcji $f(z)$.

Reprezentacja całkowa Cauchy'ego

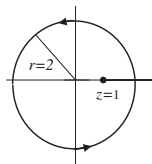
Reprezentacja całkowa Cauchy'ego pochodnej dostarcza metody obliczenia całki w której funkcja podcałkowa ma biegun dowolnego rzędu:

$$\oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{2\pi i}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n f(z)}{dz^n} \equiv \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Przykład: Oblicz całkę $I \equiv \oint \frac{ze^z}{(z-1)^3} dz$ wokół okręgu o promieniu 2 i środku w początku układu.

Funkcja podcałkowa ma biegun trzeciego rzędu w $z = 1$:

$$\oint \frac{ze^z}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} (ze^z) = 3\pi i e$$



Całki z dwoma biegunami wyższych rzędów:

$$I \equiv \oint_C \frac{g(z)}{(z - z_1)^{m+1} (z - z_2)^{n+1}} dz$$

gdzie $g(z)$ jest analityczna we wszystkich punktach wewnątrz i na konturze C , natomiast z_1 i z_2 leżą wewnątrz konturu.

Reprezentacja całkowa Cauchy'ego

Rozpatrując oddzielnie części funkcji podcałkowej analityczne odpowiednio w z_1 i z_2 otrzymujemy:

$$\oint_C \frac{g(z)}{(z-z_1)^{m+1}(z-z_2)^{n+1}} dz =$$
$$= 2\pi i \left[\frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} \left(\frac{g(z)}{(z-z_2)^{n+1}} \right) \Bigg|_{z=z_1} + \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{g(z)}{(z-z_1)^{m+1}} \right) \Bigg|_{z=z_2} \right]$$

Przykład: Oblicz całkę $I \equiv \oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2 z^3 (z-2)} dz$ wokół okręgu o promieniu $3/2$ i środka w początku układu.

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2 z^3 (z-2)} dz =$$
$$= 2\pi i \left[\frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{z^3(z-2)} \right) \Bigg|_{z=1} + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{(z-1)^2(z-2)} \right) \Bigg|_{z=0} \right] = 2\pi i \left(e - \frac{29}{8} \right)$$

Szereg Taylora

Rozważamy funkcję $F(z)$ analityczną we wszystkich punktach obszaru R oraz punkt z_0 i kontur C w postaci okręgu o środku w z_0 . Reprezentacja całkowa Cauchy'ego w dowolnym punkcie z wewnątrz konturu ma postać:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(w)}{(w-z)} dw$$

Niech $\Delta \equiv z - z_0$, wówczas:

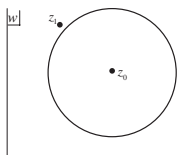
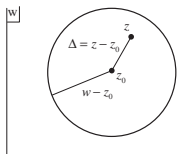
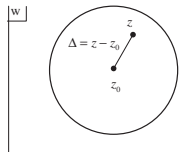
$$F(z) = F(z_0 + \Delta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(w)}{(w - z_0 - \Delta)} dw$$

Korzystając z sumy szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{(1-t)} = 1 + t + t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1$$

mamy

$$\frac{1}{(w - z_0 - \Delta)} = \frac{1}{(w - z_0)} \frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta}{(w - z_0)}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$



Szereg Taylora

Funkcję $F(z)$ można więc zapisać w postaci (tzw. rozwinięcie w **szereg Taylora** wokół z_0):

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{2\pi i} \oint_C \frac{F(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Rozwinięcie MacLaurina (wokół $z_0 = 0$): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n$

Uwaga: szereg Taylora jest zbieżny w kole o promieniu $|z_1 - z_0|$, gdzie z_1 jest najbliższą osobliwością funkcji $F(z)$.

Przykład: Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $F(z) = \frac{1}{(1-z)}$ wokół $z_0 = \frac{1}{4}$

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \Big|_{z=1/4} = n! \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \left(z - \frac{1}{4}\right)^n$$

Przykład: Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $e^z = e^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!}$