Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 3

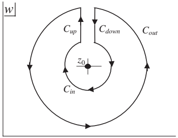
Szereg Laurenta

Przykład: Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $F(z) = \sin z$

$$F(0) = \sin z|_{z=0} = 0, \quad F'(0) = \cos z|_{z=0} = 1, \quad F''(0) = -\sin z|_{z=0} = 0, \ldots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

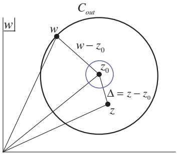
Uwaga: Funkcji, która ma osobliwość w punkcie z_0 nie można rozwinąć w szereg Taylora wokół tego punktu.



Niech $\Delta = z - z_0$,

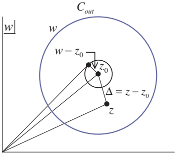
$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(w)}{(w - z_0 - \Delta)} \mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{C_{out}} \frac{F(w)}{(w - z_0 - \Delta)} \mathrm{d}w - \oint_{C_{in}} \frac{F(w)}{(w - z_0 - \Delta)} \mathrm{d}w \right]$$



$$\frac{1}{(w - z_0 - \Delta)} = \frac{1}{(w - z_0)} \frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta}{(w - z_0)}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(w - z_0 - \Delta)} = -\frac{1}{\Delta} \frac{1}{\left(1 - \frac{(w - z_0)}{\Delta}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{\Delta^{n+1}}$$



Szereg Laurenta

Reprezentacja całkowa funkcji $F(z)$ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n \oint_{C_{out}} \frac{F(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Delta^{n+1}}\oint_{C_{in}} F(w)(w-z_0)^n\mathrm{d}w\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n \oint_{C_{out}} \frac{F(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w + \sum_{n=-\infty}^{-1}\Delta^n\oint_{C_{in}} \frac{F(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta^n \oint_{C_{out}} \frac{F(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Otrzymujemy rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji osobliwej w z_0:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z_0)(z-z_0)^n \quad \text{gdzie} \quad a_n(z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w$$

Dla funkcji analitycznej w całym obszarze ograniczonym konturem C mamy:

$$a_n(z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C F(w)(w-z_0)^{|n|-1}\mathrm{d}w = 0, \quad \text{dla } n \leqslant -1$$

$$a_n(z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \text{dla } n \geqslant 0 \quad \text{- czyli szereg Taylora}$$

Szereg Laurenta dla funkcji z biegunem rzędu M

Niech funkcja $F(w)$ ma biegun rzędu M. Dla $L \geqslant 1$ mamy:

$$a_{-(M+L)}(z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(w)(w - z_0)^{M+L-1} \mathrm{d}w = 0$$

Ponieważ czynnik $(w - z_0)^{M+L-1}$ usuwa osobliwość funkcji $F(w)$, więc funkcja podcałkowa jest analityczna wewnątrz i na konturze C, i stąd:

$$a_{-(M+1)}(z_0) = a_{-(M+2)}(z_0) = \ldots = 0$$

a szereg Laurenta funkcji posiadającej biegun rzędu M ma postać:

$$\begin{aligned} F(z) \; = \; & \frac{a_{-M}(z_0)}{(w - z_0)^M} + \frac{a_{-(M-1)}(z_0)}{(w - z_0)^{M-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}(z_0)}{(w - z_0)} + \\ & + a_0(z_0) + a_1(z_0)(z - z_0) + a_2(z_0)(z - z_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Przykład: Rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji $F(z) = z^n \mathrm{e}^{1/z}$

$$\begin{aligned} z^n \mathrm{e}^{1/z} \; & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-k}}{k!} = \sum_{l=-\infty}^{n} \frac{z^l}{(n-l)!} = \\ & = \ldots + \frac{z^{-2}}{(n+2)!} + \frac{z^{-1}}{(n+1)!} + \ldots + \frac{z^{n-2}}{2!} + \frac{z^{n-1}}{1!} + z^n \end{aligned}$$

Szereg Laurenta dla funkcji z biegunem rzędu M

Przykład: Rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji $F(z) = \dfrac{\sin z}{z^n}$ można otrzymać wykorzystując rozwinięcie funkcji sinus w szereg MacLaurina:

$$\frac{\sin z}{z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1-n}}{(2k+1)!} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=-\frac{n}{2}}^{\infty} (-1)^{m+\frac{n}{2}} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1+n)!} & n \text{ parzyste} \\ \displaystyle\sum_{m=-\frac{1}{2}(n-1)}^{\infty} (-1)^{m+\frac{(n-1)}{2}} \frac{z^{2m}}{(2m+n)!} & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Przykład: Funkcja $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2}$ jest podana od razu w postaci szeregu Laurenta wokół $z_0 = i$, czyli

$$\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < \infty$$

gdzie $c_{-2} = 1$, a pozostałe współczynniki są równe zero.

Dodatkowo widać, że

$$c_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^{n+3}} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 2\pi i, & n = -2 \\ 0, & n \neq -2 \end{cases}$$

Mnożenie szeregów potęgowych

Niech funkcje $f(z)$ oraz $g(z)$ będą analityczne w obszarze $|z - z_0| < R$, a więc mają rozwinięcia w szereg Taylora zbieżne w okręgu $z - z_0 = R$. Wówczas ich iloczyn $f(z) \cdot g(z)$ jest również funkcją analityczną w obszarze $|z - z_0| < R$ i ma rozwinięcie w szereg Taylora:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

gdzie współczynniki c_n mają postać:

$$c_n = \frac{[f(z_0)g(z_0)]^{(n)}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Przykład: $\dfrac{e^z}{1+z} = \left(1 + z + \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{6}z^3 + ...\right)(1 - z + z^2 - z^3 + ...)$

$$\begin{array}{l} 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + ... \\ \quad - z - \quad z^2 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{6}z^4 - ... \\ \qquad\qquad z^2 + \quad z^3 + \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + ... \\ \qquad\qquad\quad - \quad z^3 - \quad z^4 - \frac{1}{2}z^5 - \frac{1}{6}z^6 - ... \end{array}$$

A więc: $\quad \dfrac{e^z}{1+z} = 1 + \dfrac{1}{2}z^2 - \dfrac{1}{3}z^3 + ... \qquad (|z| < 1)$

Dzielenie szeregów potęgowych

Niech funkcje $f(z)$ oraz $g(z)$ mają rozwinięcia w szereg Taylora w pewnym obszarze $|z - z_0| < R$ oraz niech $g(z) \neq 0$ w tym obszarze. Wówczas $f(z)/g(z)$ jest analityczna w obszarze $|z - z_0| < R$ i ma rozwinięcie w szereg Taylora.

Przykład:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^2(z + z^3/3! + z^5/5! + ...)} = \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + ...}\right)$$

$$\begin{array}{lcl}
 & & 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right]z^4 + ... \\
\hline
1 + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + ... & | & 1 \\
 & (-) & 1 + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + ... \\
\hline
 & & -\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + ... \\
 & (-) & -\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{(3!)^2}z^4 + ... \\
\hline
 & & \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right]z^4 + ... \\
 & (-) & \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right]z^4 + ... \\
\hline
\end{array}$$

Całka po konturze z funkcji posiadającej biegun rzędu M

Niech jedyną osobliwością funkcji $F(z)$ będzie biegun rzędu M, wówczas

$$F(z) = \sum_{k=1}^{M} \frac{a_{-k}(z_0)}{(z-z_0)^k} + \Phi_A(z), \qquad \text{gdzie} \qquad \Phi_A(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

Ponieważ $\Phi_A(z)$ jest analityczna w całym obszarze, więc całka z funkcji $F(z)$ po konturze zamkniętym jest równa

$$\oint_C F(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{M} a_{-k}(z_0) \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^k} + \oint_C \Phi_A(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{M} a_{-k}(z_0) \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^k}$$

Wybierając kontur w postaci okręgu o promieniu ρ i środku z_0 mamy

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^k} = \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} \frac{i\rho \mathrm{e}^{i\phi}}{\rho^k \mathrm{e}^{ik\phi}} \mathrm{d}\phi = i\rho^{-(k-1)} \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} \mathrm{e}^{-i(k-1)\phi} \mathrm{d}\phi$$

Dla $k \neq 1$ wartość całki jest równa zero, natomiast dla $k = 1$ mamy

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)} = i \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi i \qquad \Rightarrow \qquad \oint_C F(z)\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}(z_0)$$

Residuum

Dla bieguna prostego ($M = 1$) mamy

$$F(z) = \frac{a_{-1}(z_0)}{(z - z_0)} + \Phi_A(z) \qquad \Rightarrow \qquad R(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)F(z) = a_{-1}(z_0)$$

$a_{-1}(z_0)$ nazywamy residuum bieguna dowolnego rzędu.

Metody znajdowania residuum:

❶ współczynnik w rozwinięciu w szereg Laurenta w wyrazie $1/(z - z_0)$

❷ metoda pochodnej:

$$\begin{aligned}(z - z_0)^M F(z) \;&=\; a_{-M}(z_0) + a_{-(M-1)}(z_0)(z - z_0) + \ldots + a_{-1}(z_0)(z - z_0)^{M-1} + \\ &\quad + (z - z_0)^M \Phi_A(z)\end{aligned}$$

$$a_{-1}(z_0) = \frac{1}{(M-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{M-1}}{\mathrm{d}z^{M-1}} \left[(z - z_0)^M F(z)\right]$$

Niech funkcja $F(z)$ posiada biegun rzędu M, wówczas

$$\begin{aligned}\oint_C F(z)\mathrm{d}z \;&=\; \oint_C \frac{G(z)}{(z - z_0)^M}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(M-1)!} \frac{\mathrm{d}^{M-1}G(z)}{\mathrm{d}z^{M-1}}\bigg|_{z=z_0} = \\ &= \frac{2\pi i}{(M-1)!} \frac{\mathrm{d}^{M-1}}{\mathrm{d}z^{M-1}} \left[(z - z_0)^M F(z)\right]_{z=z_0} = 2\pi i a_{-1}(z_0)\end{aligned}$$

Metody znajdowania residuum

W ogólnym przypadku wielu biegunów różnych rzędów mamy:

$$\oint_C \frac{G(z)}{(z-z_0)^M (z-z_1)^N ... (z-z_l)^P} \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=0}^{l} a_{-1}(z_k)$$

gdzie residuum każdego z biegunów zawiera pochodną części funkcji podcałkowej analitycznej w tym biegunie, np.:

$$a_{-1}(z_0) = \frac{1}{(M-1)!} \frac{\mathrm{d}^{M-1}}{\mathrm{d}z^{M-1}} \left[\frac{G(z)}{(z-z_1)^N ... (z-z_l)^P} \right]_{z=z_0}$$

❸ metodę stosunku stosujemy gdy funkcję posiadającą biegun rzędu M można przedstawić w postaci stosunku funkcji analitycznych $F(z) = P(z)/Q(z)$.

Dowolną funkcję $R(z)$ analityczną w z_0 i spełniającą warunki

$$R(z_0) = R'(z_0) = ... = R^{(M-1)}(z_0) = 0, \quad \text{oraz} \quad R^{(M)}(z_0) \neq 0$$

można zapisać w postaci szeregu Taylora:

$$R(z) = \frac{R^{(M)}(z_0)}{M!} (z-z_0)^M + \mathcal{O}\left[(z-z_0)^{M+1}\right]$$

gdzie $\mathcal{O}\left[(z-z_0)^q\right] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-z_0)^{q+m}$

Metody znajdowania residuum

Biegun prosty funkcji $F(z)$ wynika z zera rzędu M funkcji $P(z)$ oraz zera rzędu $(M+1)$ funkcji $Q(z)$ w z_0:

$$F(z) = \frac{\frac{P^{(M)}(z_0)}{M!}(z-z_0)^M + \mathcal{O}\left[(z-z_0)^{M+1}\right]}{\frac{Q^{(M+1)}(z_0)}{(M+1)!}(z-z_0)^{M+1} + \mathcal{O}\left[(z-z_0)^{M+2}\right]}$$

Dla takiej funkcji mamy: $a_{-1}(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}\left[(z-z_0)F(z)\right] = (M+1)\dfrac{P^{(M)}(z_0)}{Q^{(M+1)}(z_0)}$

Przykład: Dla $P(z_0) \neq 0,\ Q(z_0) = 0$ oraz $Q'(z_0) \neq 0$ (biegun prosty, $M = 0$):

$$a_{-1}(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\left[\frac{P(z_0) + \mathcal{O}\left[(z-z_0)\right]}{Q'(z_0)(z-z_0) + \mathcal{O}\left[(z-z_0)^2\right]}\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Biegun drugiego rzędu funkcji $F(z)$ wynika z zera rzędu M funkcji $P(z)$ oraz zera rzędu $(M+2)$ funkcji $Q(z)$ w z_0. Można pokazać, że wówczas mamy:

$$\begin{aligned} a_{-1}(z_0) &= \lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-z_0)^2F(z)\right] = \\ &= \frac{M+2}{M+3}\left[\frac{(M+3)P^{(M+1)}(z_0)Q^{(M+2)}(z_0) - (M+1)P^{(M)}(z_0)Q^{(M+3)}(z_0)}{\left(Q^{(M+2)}(z_0)\right)^2}\right] \end{aligned}$$

Metody znajdowania residuum

Metodę stosunku można zastosować również w przypadku funkcji, która da się zapisać w postaci stosunku dwóch funkcji z biegunami $F(z) = R(z)/S(z)$:

$$P(z) \equiv (z - z_0)^{M+N} R(z) \qquad Q(z) \equiv (z - z_0)^{M+N} S(z)$$

$$R(z) = \sum_{k=-(M+N)}^{\infty} r_k (z - z_0)^k \qquad S(z) = \sum_{k=-M}^{\infty} s_k (z - z_0)^k$$

Rozwinięcia w szereg Taylora mają postać:

$$\begin{aligned} P(z) &= r_{-(M+N)}(z_0) + r_{-(M+N-1)}(z_0)(z - z_0) + \ldots \\ Q(z) &= s_{-M}(z_0)(z - z_0)^N + s_{-(M-1)}(z_0)(z - z_0)^{N+1} + \ldots \end{aligned}$$

Jeśli funkcja $F(z)$ posiada biegun prosty, wówczas $N = 1$ oraz

$$a_{-1}(z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{r_{-(M+1)}(z_0)}{s_{-M}(z_0)}$$

W przypadku bieguna rzędu drugiego, residuum ma postać:

$$a_{-1}(z_0) = \frac{r_{-(M+1)}(z_0) s_{-M}(z_0) - r_{-(M+2)}(z_0) s_{-(M-1)}(z_0)}{\left[s_{-M}(z_0)\right]^2}$$

Metody znajdowania residuum

Przykład: Znajdź residuum funkcji $F(z) = \dfrac{e^z}{z(z+2)^2}$

❶ metoda rozwinięcia w szereg Laurenta:

Rozwijamy w szereg MacLaurina ($z_0 = 0$) funkcje e^z oraz $\frac{1}{(z+2)^2}$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

$$\frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{z}{2}\right)^{-1}\right]^2 = \frac{1}{4}\left(1 - z + \frac{3}{4}z^2 - \ldots\right) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(m+1)\left(\frac{z}{2}\right)^m$$

$$\frac{e^z}{z(z+2)^2} = \frac{1}{4z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 - z + \frac{3}{4}z^2 - \ldots\right) = \frac{1}{4z} + \frac{z}{16} + \ldots$$

Widać więc, że $a_{-1}(0) = \frac{1}{4}$

Rozwijamy w szereg Laurenta wokół $z_0 = -2$:

$$e^z = e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{n!} = e^{-2}\left(1 + (z+2) + \frac{(z+2)^2}{2!} + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}(z+2)}\right) = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z+2)^m}{2^{m+1}} = -\frac{1}{2} - \frac{(z+2)}{4} - \frac{(z+2)^2}{8} - \frac{(z+2)^3}{16} - \ldots$$

Metody znajdowania residuum

$$\frac{\mathrm{e}^z}{z(z+2)^2} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}\left[\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(z+2)} + \frac{5}{4} + \ldots\right]$$

Widać więc, że $a_{-1}(-2) = -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2}$

❷ metoda pochodnych:

$$\begin{aligned} a_{-1}(0) &= \lim_{z\to 0}\left[z\frac{\mathrm{e}^z}{z(z+2)^2}\right] = \frac{1}{4} \\ a_{-1}(-2) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to -2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z+2)^2\frac{\mathrm{e}^z}{z(z+2)^2}\right] = -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

❸ metoda stosunku:

W przypadku bieguna $z = 0$ mamy:

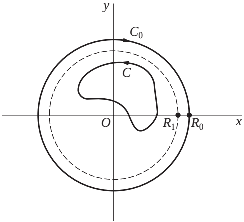
$$P(z) = \mathrm{e}^z, \quad Q(z) = z(z+2)^2 \quad \Rightarrow \quad a_{-1}(0) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1}{4}$$

W przypadku bieguna $z = -2$ mamy:

$$a_{-1}(z_0) = \frac{2}{3}\left[\frac{3P'(-2)Q''(-2) - P(-2)Q^{(3)}(-2)}{\left(Q''(-2)\right)^2}\right] = -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2}$$

Residuum w nieskończoności

Niech funkcja $f(z)$ będzie analityczna na płaszczyźnie zespolonej, z wyjątkiem skończonej liczby punktów osobliwych leżących wewnątrz konturu C, który w całości leży wewnątrz okręgu $|z| = R_1$. Funkcja $f(z)$ jest więc analityczna w całym obszarze $R_1 < |z| < \infty$, a punkt w nieskończoności nazywamy izolowanym punktem osobliwym.



Niech kontur C_0 oznacza okrąg $|z| = R_0$ gdzie $R_0 > R_1$ zorientowany *zzrwz*.
Residuum funkcji $f(z)$ w nieskończoności definiujemy jako:

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

Funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze pomiędzy konturami C i C_0, stąd:

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{-C_0} f(z)\mathrm{d}z = -\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

Rozwijamy funkcję $f(z)$ w szereg Laurenta w obszarze $(R_1 < |z| < \infty)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{-C_0} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{-C_0} f(z)\mathrm{d}z$$

Residuum w nieskończoności

Zastępując z przez $1/z$ oraz mnożąc przez $1/z^2$ mamy $(0 < |z| < 1/R_1)$:

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{z^n}, \quad \Rightarrow \quad c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

Mamy więc

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

Twierdzenie: Jeśli funkcja $f(z)$ jest analityczna wszędzie na płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem skończonej liczby punktów osobliwych leżących wewnątrz konturu C, wtedy:

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

Przykład: Oblicz całkę z funkcji $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$ wzdłuż okręgu $|z| = 2$.

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5-2z}{z(1-z)} = \frac{5-2z}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\frac{5}{z} - 2\right)(1+z+z^2+\ldots) = \frac{5}{z}+3+3z+\ldots$$

A więc $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i(5) = 10\pi i$