Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 5

Szeregi Fouriera

Rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Fouriera na przedziale $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ ma postać:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Każdą funkcję można zapisać jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej:

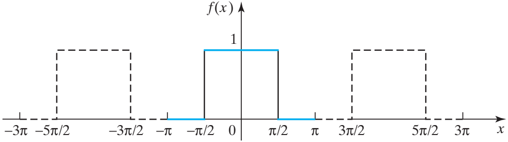
$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)), \qquad -L \leqslant x \leqslant L$$

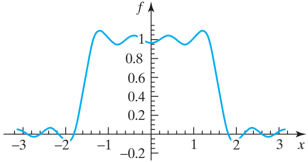
Współczynniki w rozwinięciu w szereg Fouriera wyznaczamy korzystając z ortogonalności funkcji $\sin nx$ oraz $\cos nx$ (formuły Eulera):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

Przykład: Rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji impulsu prostokątnego:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \ldots\right]$$





Rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera - przykład

Przykład: Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & -\pi < x < -\pi/2 \\ 0, & -\pi/2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \sin 2x, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} \sin 2x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} \sin 2x\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x\cos nx\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{-2[1+\cos(n\pi/2)]}{\pi(n^2-4)}, \quad n \neq 2$$

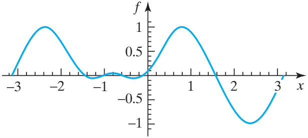
$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} \sin 2x\cos 2x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x\cos 2x\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} \sin 2x\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x\sin nx\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi(n^2-4)}, \quad n \neq 2$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} \sin^2 2x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 2x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{3}\cos x - \frac{2}{5}\cos 3x - \frac{1}{3}\cos 4x - \ldots\right)$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{3}\sin x + \frac{3\pi}{4}\sin 2x - \frac{2}{5}\sin 3x + \ldots\right)$$



Rozwinięcie w szereg Fouriera na przedziale $-L \leqslant x \leqslant L$

Funkcje $1, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, \ldots$ są ortogonalne dla $-L \leqslant x \leqslant L$:

$$\int\limits_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int\limits_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \neq 0 \\ 2L, & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

Rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Fouriera na przedziale $-L \leqslant x \leqslant L$ ma postać:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Współczynniki w rozwinięciu w szereg Fouriera wyznaczamy korzystając z ortogonalności funkcji $\sin\frac{n\pi x}{L}$ oraz $\cos\frac{n\pi x}{L}$ (formuły Eulera):

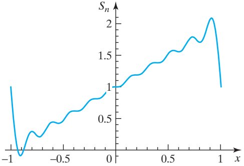
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

Przykład: Szereg Fouriera dla $f(x) = x + 1,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$

$$a_0 = 1, \qquad a_n = \int_{-1}^{1}(x+1)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_n = \int_{-1}^{1}(x+1)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$f(x) = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$$



Rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji parzystej ($f(x) = f(-x)$):

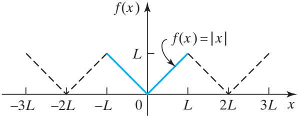
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

Przykład: Szereg Fouriera dla $f(x) = |x|,\ -L \leqslant x \leqslant L$

$$a_0 = \tfrac{1}{L}\int_0^L x\,\mathrm{d}x = \tfrac{L}{2},$$

$$a_n = \tfrac{2}{L}\int_0^L x\cos\tfrac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2L}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1],$$

$$f(x) = \tfrac{L}{2} - \tfrac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)\pi x/L\right)}{(2n-1)^2}$$



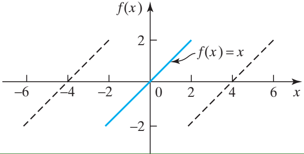
Rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji nieparzystej ($f(x) = -f(-x)$):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

Przykład: Szereg Fouriera dla $f(x) = x,\ -2 \leqslant x \leqslant 2$

$$b_n = \tfrac{2}{L}\int_0^L x\sin\tfrac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi},$$

$$f(x) = \tfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$



Szereg Fouriera na przesuniętym przedziale

Funkcje $1, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, \ldots$ są ortogonalne dla $\quad a - L \leqslant x \leqslant a + L$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą:

$$\int_{a-L}^{a+L} \sin\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_{a-L}^{a+L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \neq 0 \\ 2L, & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{a-L}^{a+L} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

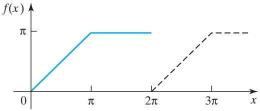
Rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Fouriera na takim przesuniętym przedziale $a - L \leqslant x \leqslant a + L$ ma postać:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Współczynniki w rozwinięciu w szereg Fouriera wyznaczamy korzystając z ortogonalności funkcji $\sin\frac{n\pi x}{L}$ oraz $\cos\frac{n\pi x}{L}$ (formuły Eulera):

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{a-L}^{a+L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{a-L}^{a+L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{a-L}^{a+L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

Przykład: Szereg Fouriera dla $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \pi, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$



$$a_0 = \frac{3\pi}{4}, \qquad a_{2n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)^2}, \qquad a_{2n} = 0, \qquad b_n = -\frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Zespolone szeregi Fouriera

Wstawiając $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ oraz $\sin x = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$ do rozwinięcia funkcji w szereg Fouriera otrzymujemy:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{in\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-in\pi x/L}$$

Zespolona postać rozwinięcia w szereg Fouriera na przedziale $-L \leqslant x \leqslant L$ to:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\pi x/L}, \quad c_0 = a_0, \ \ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \ \ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Ze względu na ortogonalność funkcji $\exp[im\pi x/L]$ oraz $\exp[-in\pi x/L]$ mamy:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\pi x/L}, \qquad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\, \mathrm{d}x, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Uwaga: Ze względu na ortogonalność funkcji $1, \ \sin\frac{n\pi x}{L}, \ \cos\frac{n\pi x}{L}, \ n = 1, 2, \ldots$ na przedziale $a - L \leqslant x \leqslant a + L$ rozwinięcie w zespolony szereg Fouriera na takim przesuniętym przedziale ma postać:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\pi x/L}, \qquad c_n = \frac{1}{2L} \int\limits_{a-L}^{a+L} f(x) e^{-in\pi x/L}\, \mathrm{d}x, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Widmo amplitudowe i częstościowe funkcji

Rozważmy zastosowanie szeregu Fouriera do zjawisk periodycznych o okresie $T = 2L$. Definiując częstość kołową jako $\omega_0 = 2\pi/T$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x\right) \end{aligned}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos n\omega_0 x\;\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\omega_0 x\;\mathrm{d}x$$

Definiując amplitudę $A_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ oraz fazę $\delta_n = \mathrm{arc\,tg}\,(-b_n/a_n)$ mamy:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\omega_0 x + \delta_n\right)$$

Liczby $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0...$ oraz $A_0, A_1, A_2...$ nazywamy odpowiednio widmem częstościowym i amplitudowym funkcji $f(x)$.

Funkcję $\cos\left(n\omega_0 x + \delta_n\right)$ nazywamy n-tą harmoniczną funkcji $f(x)$.

Liczby $n\omega_0$ oraz δ_n nazywamy odpowiednio n-tą częstością harmoniczną oraz n-tym kątem fazowym.

Widmo amplitudowe i częstościowe funkcji

Przykład: Znajdź widmo amplitudowe funkcji $f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \pi - x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

Mamy: $L = \pi,\ T = 2L = 2\pi,\ \omega_0 = 2\pi/T = 1$, a więc szereg Fouriera:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \cos nx \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi n^2}[1-(-1)^n] \quad \Rightarrow \quad a_{2n} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \sin nx \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{n}$$

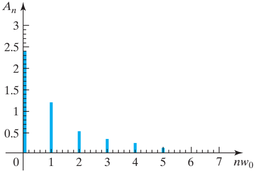
$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$$

$$A_0 = \frac{3\pi}{4}, \qquad A_1 = \left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + (-1)^2\right]^{1/2}, \qquad A_2 = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \left[\left(\frac{2}{9\pi}\right)^2 + (-\tfrac{1}{3})^2\right]^{1/2}, \qquad A_4 = \frac{1}{4},$$

$$A_5 = \left[\left(\frac{2}{25\pi}\right)^2 + (-\tfrac{1}{5})^2\right]^{1/2}, \ldots$$

$$A_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)}\left[\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} + 1\right]^{1/2} \qquad A_{2n} = \frac{1}{2n}$$



Twierdzenie Parsevala

Twierdzenie (Parsevala): Niech $f(t)$ będzie funkcją okresową o okresie $2L$. Wówczas

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

gdzie a_n i b_n są współczynnikami w rozwinięciu funkcji $f(t)$ w szereg Fouriera.

Dowód: Niech $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{i(n\pi/L)t}$ gdzie $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{e}^{-i(n\pi/L)t}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{i(n\pi/L)t}\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\mathrm{e}^{i(n\pi/L)t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{-n} = \\
&= \left\{ c_{-n} = c_n^{\star},\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \right\} = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)
\end{aligned}$$

Obliczanie sum odwrotności potęg liczb całkowitych

Przykład: Niech $f(x) = \begin{cases} -k & \text{dla } -\pi < x < 0 \\ k & \text{dla } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

Rozwinięcie w szereg Fouriera ma postać: $f(x) = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin{(2n-1)x}$

Widać, że dla $x = \pi/2$ mamy: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Czyli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

Dodatkowo z twierdzenia Parsevala otrzymujemy:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t = k^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4k}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Czyli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Podwójne szeregi Fouriera

Szukamy reprezentacji za pomocą szeregu Fouriera funkcji $f(x,y)$ w obszarze $-L_1 \leqslant x \leqslant L_1$ oraz $-L_2 \leqslant y \leqslant L_2$.

W pierwszym kroku zakładamy, że y jest ustalone otrzymując:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m(y)\cos\frac{m\pi x}{L_1} + B_m(y)\sin\frac{m\pi x}{L_1}\right)$$

Następnie rozwijamy współczynniki $A_m(y)$ i $B_m(y)$ w szeregi Fouriera:

$$A_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos\frac{n\pi y}{L_2} + b_{mn}\sin\frac{n\pi y}{L_2}\right)$$
$$B_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{mn}\cos\frac{n\pi y}{L_2} + d_{mn}\sin\frac{n\pi y}{L_2}\right)$$

Rozwinięcie funkcji $f(x,y)$ w szereg Fouriera ma więc postać:

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{L_1}\cos\frac{n\pi y}{L_2} + b_{mn}\cos\frac{m\pi x}{L_1}\sin\frac{n\pi y}{L_2}\right) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{L_1}\cos\frac{n\pi y}{L_2} + d_{mn}\sin\frac{m\pi x}{L_1}\sin\frac{n\pi y}{L_2}\right)$$

Współczynniki $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}$ wyznaczamy korzystając z ortogonalności funkcji $\cos\frac{m\pi x}{L}$ i $\sin\frac{n\pi x}{L}$, np.: $\int\limits_{-L_2}^{L_2}\left[\int\limits_{-L_1}^{L_1} f(x,y)\cos\frac{s\pi x}{L_1}\,\mathrm{d}x\right]\cos\frac{t\pi y}{L_2}\,\mathrm{d}y = a_{st}L_1L_2$

Podwójne szeregi Fouriera

Współczynniki w rozwinięciu w sz. Fouriera funkcji $f(x,y)$ dla $m,n=1,2,...$:

$$a_{mn}=\frac{1}{L_1L_2}\int\limits_{-L_2}^{L_2}\left[\int\limits_{-L_1}^{L_1}f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{L_1}\,\mathrm{d}x\right]\cos\frac{n\pi y}{L_2}\mathrm{d}y$$

$$b_{mn}=\frac{1}{L_1L_2}\int\limits_{-L_2}^{L_2}\left[\int\limits_{-L_1}^{L_1}f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{L_1}\,\mathrm{d}x\right]\sin\frac{n\pi y}{L_2}\mathrm{d}y$$

$$c_{mn}=\frac{1}{L_1L_2}\int\limits_{-L_2}^{L_2}\left[\int\limits_{-L_1}^{L_1}f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{L_1}\,\mathrm{d}x\right]\cos\frac{n\pi y}{L_2}\mathrm{d}y$$

$$d_{mn}=\frac{1}{L_1L_2}\int\limits_{-L_2}^{L_2}\left[\int\limits_{-L_1}^{L_1}f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{L_1}\,\mathrm{d}x\right]\sin\frac{n\pi y}{L_2}\mathrm{d}y$$

gdy któryś z indeksów jest równy zero, należy ten indeks wyzerować przed całkowaniami, np.:

$$a_{00}=\frac{1}{4L_1L_2}\int\limits_{-L_2}^{L_2}\int\limits_{-L_1}^{L_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$a_{m0}=\frac{1}{2L_1L_2}\int\limits_{-L_2}^{L_2}\int\limits_{-L_1}^{L_1}f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{L_1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$b_{0n}=\frac{1}{2L_1L_2}\int\limits_{-L_2}^{L_2}\int\limits_{-L_1}^{L_1}f(x,y)\cos\frac{n\pi y}{L_2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

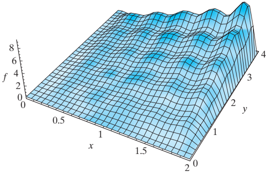
Podwójne szeregi Fouriera

Gdy funkcja $f(x,y)$ ma ustaloną parzystość w którejś ze zmiennych, wówczas w rozwinięciu w szereg Fouriera przeżywają tylko wyrazy mające tą samą parzystość co funkcja.

Np. gdy funkcja jest nieparzysta w obu zmiennych (tzn. $f(-x,y) = -f(x,y)$ i $f(x,-y) = -f(x,y)$) wtedy mamy:

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}$$

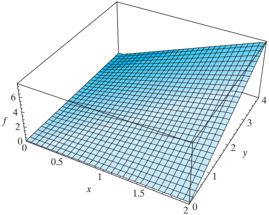
$$d_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_2} \left[\int_0^{L_1} f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{L_1}\, \mathrm{d}x \right] \sin \frac{n\pi y}{L_2} \mathrm{d}y$$



Przykład: Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x,y) = xy,\ -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -4 \leqslant y \leqslant 4.$

$$d_{mn} = \frac{4}{8} \int_0^4 \int_0^2 xy \sin \frac{m\pi x}{2} \sin \frac{n\pi y}{4}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (-1)^{m+n} \frac{32}{mn\pi^2}$$

$$f(x,y) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn} \sin \frac{m\pi x}{2} \sin \frac{n\pi y}{4}$$



Uwaga: Funkcję $f(x,y)$ określoną w obszarze $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$ można rozszerzyć do obszaru $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ tak aby była parzysta lub nieparzysta w obu zmiennych i następnie rozwinąć ją w szereg cosinusowy lub sinusowy.