Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 7

Zwyczajne równania różniczkowe

Zwyczajnym równaniem różniczkowym rzędu n nazywamy równanie postaci $F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}) = 0$ gdzie $y^{(k)} = \mathrm{d}^k y/\mathrm{d}x^k$.

Równaniem różniczkowym liniowym rzędu n nazywamy równanie:

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n(x)y = f(x)$$

gdzie $a_i(x)$ to współczynniki równania oraz zachodzi $a_0(x) \neq 0$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Rozróżniamy równania homogeniczne ($f(x) = 0$) oraz niehomogeniczne.

Równania mogą być o stałych ($a_i(x) \equiv const$) i zmiennych współczynnikach.

Przykład: przykłady równań liniowych i nieliniowych:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = \sin x, \qquad (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + k\sin\theta = 0, \qquad k\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \left[1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2\right]^{3/2}$$

Wygodny zapis operatorowy:

$$L[y] = f(x) \quad \text{gdzie} \quad L[\cdot] \equiv a_0(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_n(x)$$

Rozwiązanie równania niehomogenicznego ma postać: $y(x) = y_g(x) + y_p(x)$ gdzie $y_g(x)$ to ogólne rozwiązanie równania homogenicznego, a $y_p(x)$ to szczególne rozwiązanie równania niehomogenicznego (bez dowolnych stałych).

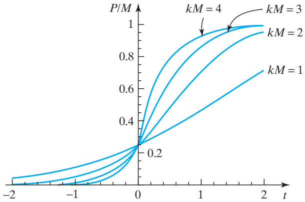
Równaniem różniczkowym pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie postaci (rozwiązanie poprzez całkowanie stronami):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) = F(x)G(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{G(y)}\,\mathrm{d}y = F(x)\mathrm{d}x, \;\; G(y) \neq 0$$

Przykład: Równanie logistyczne (prey-predator problem): $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP(M-P)$

$$\frac{\mathrm{d}P}{P(M-P)} = k\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{P}{M-P}\right| = kMt + C$$

$$P = \frac{MA}{A+\exp(-kMt)}, \;\; \text{gdzie } A = const$$



Zakładając warunki początkowe w postaci $P(t=0) = P_0$ otrzymujemy:

$$P = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)\exp(-kMt)}$$

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu postaci $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ nazywamy równaniem zupełnym jesli istniej funkcja $F(x,y)$ taka, że

$$\mathrm{d}[F(x,y)] = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Warunek zupełności: Równanie jest zupełne gdy $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$

Równanie liniowe pierwszego rzędu, czynnik całkujący

Przykład: Sprawdź zupełność i rozwiąż równanie:

$$\left(3x^2 + 2y + 2\cosh(2x+3y)\right)\mathrm{d}x + \left(2x + 2y + 3\cosh(2x+3y)\right)\mathrm{d}y = 0$$

Zupełność: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2 + 6\sinh(2x+3y)$

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) &= \textstyle\int M(x,y)\,\mathrm{d}x = x^3 + 2xy + \sinh(2x+3y) + f(y) + C \\ F(x,y) &= \textstyle\int N(x,y)\,\mathrm{d}y = 2xy + y^2 + \sinh(2x+3y) + g(x) + D \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f(y) &= y^2 \\ g(x) &= x^3 \\ C &= D \end{aligned}$$

A więc ogólnym rozwiązaniem jest $x^3 + 2xy + y^2 + \sinh(2x+3y) = C$

Równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Czynnik całkujący $\mu(x)$: $\mu\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mu P(x)y = \mu Q(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}(\mu y)}{\mathrm{d}x} = \mu Q(x)$

Ogólne rozwiązanie przyjmuje postać: $y(x) = \dfrac{C}{\mu(x)} + \dfrac{1}{\mu(x)}\displaystyle\int \mu(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$

gdzie $\mu(x) = \exp\left\{\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}x\right\}$

Czynnik całkujący - przykład

Przykład: Rozwiąż równanie $\cos x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \sin x$ z warunkiem pocz. $y(0) = 2$

Przepisujemy równanie w postaci: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\cos x} y = \operatorname{tg} x$

Czynnik całkujący: $\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\right\} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

Rozwiązujemy wyjściowe równanie pomnożone przez czynnik całkujący:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) y(x)\right] = \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\operatorname{tg} x$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) y(x) &= \int \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x + C = \\ &= \frac{1+\sin x}{\cos x} - x + C\end{aligned}$$

A więc ogólne rozwiązanie ma postać: $y(x) = \frac{C\ \cos x}{1 + \sin x} + 1 - \frac{x \cos x}{1 + \sin x}$

Z warunku początkowego mamy:

$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 + \frac{(1 - x)\cos x}{1 + \sin x}$

Równania Bernoulliego i Ricattiego

Rownanie Bernoulliego to nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu postaci:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 1$$

Rozwiązanie poprzez podstawienie $u = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u = Q(x)$

Rownanie Ricattiego to nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu postaci:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y + R(x)y^2 = Q(x)$$

Trudno znaleźć ogólny sposób rozwiązania r. Ricattiego.

Podstawienie $y = \frac{1}{R(x)z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ redukuje r. R. do liniowego r. drugiego stopnia:

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} + \left\{P(x) - \frac{R'(x)}{R(x)}\right\}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - R(x)Q(x)z = 0$$

Gdy znane jest rozwiązanie szczególne $y_1(x)$ r. R. to:

- stosując podstawienie $y = y_1 + 1/u$, r. R. redukuje sie do liniowego r. pierwszego rzędu,
- stosując podstawienie $y = y_1 + u$, r. R. redukuje się do r. Bernoulliego.

Równania różniczkowe stopnia drugiego

Homogeniczne równanie różniczkowe liniowe stopnia drugiego o stałych współczynnikach:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + By = 0$$

Jeśli $y_1(x)$ orz $y_2(x)$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami powyższego równania, to rozwiązanie ogólne ma postać:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Szukamy rozwiązań w postaci $y(x) = c\,\exp(\lambda x)$.

Wstawiając tego typu rozwiązanie do wyjściowego równania otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$

Rozróżniamy następujące typy rozwiązań w zależności od wartości pierwiastków r. charakterystycznego:

1. (pierwiastki rzeczywiste i różne, λ_1, λ_2) $y(x) = c_1\,\exp(\lambda_1 x) + c_2\,\exp(\lambda_2 x)$
2. (pierwiastki zespolone sprzężone $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$)
   $y(x) = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right]$
3. (równe pierwiastki rzeczywiste, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)
   $y(x) = (c_1 + c_2 x)\exp(\lambda x)$

Równania różniczkowe wyższego stopnia

Homogeniczne równanie różniczkowe liniowe stopnia n o stałych współczynnikach ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0$$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_n = 0$ ma n pierwiastków λ_1, λ_2, ..., λ_n, przy czym każdemu odpowiada rozwiązanie $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$.

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jest liniową kombinacją n niezależnych rozwiązań $y_i(x)$, $i = 1, ..., n$:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$$

przy czym:

❶ pierwiastkowi rzeczywistemu $\lambda = \alpha$ o krotności r odpowiada r niezależnych rozwiązań:

$$e^{\alpha x}, \ \ x e^{\alpha x}, \ ..., \ x^{r-1} e^{\alpha x}$$

❷ parze sprzężonych pierwiastków zespolonych o krotności s odpowiada $2s$ rozwiązań:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, \ x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, ..., x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Równania różniczkowe - przykłady

Przykład: Rozwiązać równanie: $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 1$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -2$

Rozwiązanie ogólne: $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$

Warunki początkowe: $y(0) = 3 \ \Rightarrow \ c_1 = 3, \qquad y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 7$

Rozwiązanie problemu początkowego: $y(x) = (3 + 7x)e^{-2x}$

Przykład: Rozwiązać równanie: $y'' + 2y' + 17y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(\pi/4) = 0$

Równanie charakterystyczne:
$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 + 4i,\ \lambda_2 = -1 - 4i$

Rozwiązanie ogólne: $y(x) = e^{-x}[c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)]$

Warunki początkowe: $y(0) = 1 \ \Rightarrow \ c_1 = 1, \qquad y'(\pi/4) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \dfrac{1}{4}$

Rozwiązanie problemu brzegowego:
$y(x) = e^{-x}[\cos 4x + \dfrac{1}{4}\sin 4x] \quad \text{dla} \ \ 0 < x < \pi/4$

Przykład: Rozwiązać równanie: $y^{(4)} + y'' - 2y = 0$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^4 + \lambda^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1,\ \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$

Rozwiązanie ogólne: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x\sqrt{2}) + c_4 \sin(x\sqrt{2})$

Równania różniczkowe wyższego stopnia

Niehomogeniczne równanie różniczkowe liniowe stopnia n o stałych współczynnikach ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = f(x)$$

Ogólne rozwiązanie powyższego równania jest sumą rozwiązania ogólnego odpowiadającego mu równania homogenicznego $y_g(x)$ i rozwiązania szczegolnego równania niehomogeniznego $y_p(x)$, tzn. $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

Dla pewnych funkcji $f(x)$ postać rozwiązania $y_p(x)$ można zgadnąć, a następnie wykorzystać metodę współczynników nieoznaczonych do znalezienia brakujących stałych multiplikatywnych.

Przykład: Rozwiązać równanie: $y'' + 5y' + 6y = 4e^{-x} + 5\sin x$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3$

Rozwiązanie ogólne równania homegenicznego: $y_g(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

Rozwiązanie szczególne równania niehomogenicznego:
$y_p(x) = Ae^{-x} + B\sin x + C\cos x$, gdzie A, B, C to współczynniki nieoznaczone, które należy wyznaczyć wstawiając $y_p(x)$ do wyjściowego równania niehomogenicznego i porównując współczynniki przy tych samych funkcjach po lewej i prawej stronie równania ($A = 2,\ B = 1/2,\ C = -1/2$).

Współczynniki nieoznaczone

Rozwiązanie ogólne r.n.h.: $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + 2e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

W metodzie współczynników nieoznaczonych, w zależności od funkcji $f(x)$ rozwiązania szczególnego szukamy w postaci:

❶ gdy $f(x) = constant \quad \Rightarrow \quad y_p(x)$ powinno zawierać stałą K,

❷ $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m \;\Rightarrow\; y_p(x) = x^s (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_m)$

gdzie s jest najniższym rzędem pochodnej $\mathrm{d}^s y/\mathrm{d}x^s$ występującej po lewej r.n.h.

❸ gdy $f(x) = Pe^{\alpha x}$

- jeśli rozwiązanie ogólne (r.o.) nie zawiera $e^{\alpha x}$ to $y_p(x) = Be^{\alpha x}$
- jeśli r.o. zawiera $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, ..., $x^m e^{\alpha x}$ to $y_p(x) = Bx^{m+1} e^{\alpha x}$

❹ gdy $f(x)$ zawiera wyrazy $\cos px$ i/lub $\sin px$

- jeśli r.o. nie zawiera $\cos px$ i/lub $\sin px$ to $y_p(x) = P\cos px + Q\sin px$
- jeśli r.o. zawiera $x^s \cos px$ i/lub $x^s \sin px$ to $y_p(x) = x^{s+1}(P\cos px + Q\sin px)$

❺ gdy $f(x)$ zawiera $e^{px}\cos qx$ i/lub $e^{px}\sin qx$

- jeśli r.o. nie zawiera $e^{px}\cos qx$ i/lub $e^{px}\sin qx$ to
  $y_p(x) = e^{px}(R\cos qx + S\sin qx)$
- jeśli r.o. zawiera $x^s e^{px}\cos qx$ i/lub $x^s e^{px}\sin qx$ to
  $y_p(x) = x^{s+1} e^{px}(R\cos qx + S\sin qx)$

Równanie Cauchy'ego-Eulera

Równaniem Cauchy'ego-Eulera nazywamy homogeniczne równanie drugiego stopnia o zmiennych współczynnikach postaci:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a_1x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_2y=0$$

Szukamy rozwiązania w postaci: $y(x)=Ax^m$

Wstawiając do wyjsciowego równania, otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$m(m-1)+a_1m+a_2=0$$

1. gdy istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste $m_1=\alpha$ i $m_2=\beta$, wtedy

$$y(x)=C_1x^\alpha+C_2x^\beta$$

2. gdy istnieje podwójny pierwiastek rzeczywisty $m_{1,2}=\mu$ wtedy:

$$y(x)=C_1x^\mu+C_2x^\mu\ln|x|$$

3. gdy istnieją sprzeżone pierwiastki zespolone $m_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, wtedy:

$$y(x)=C_1x^\alpha\cos\left(\beta\ln|x|\right)+C_2x^\alpha\sin\left(\beta\ln|x|\right)$$

Wariacja parametrów

Metoda wariacji parametrów służy do znalezienia rozwiązania szczególnego równania niehomogenicznego, gdy znane jest rozwiązanie ogólne odpowiadającego mu równania homogenicznego (jednorodnego).

Niech rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego odpowiadającego równaniu $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + b(x)y = f(x)$ będzie $y_g(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.
Metoda wariacji parametrów polega na zastąpieniu stałych w rozwiązaniu ogólnym przez funkcje i poszukiwaniu rozwiązania szczególnego równania niehomogenicznego w postaci:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Nieznane funkcje $u_1(x)$ i $u_2(x)$ wyznaczamy z następujących warunków:

❶ żądamy aby funkcje $u_1(x)$ i $u_2(x)$ spełniały warunek

$$y_p'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) + u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

czyli $u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$

❷ drugie równanie wynika z żądania aby powyższa funkcja $y_p(x)$ była rozwiązaniem wyjściowego równania niehomogenicznego, co prowadzi do:

$$u_1(x)\left[y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1\right] + u_2(x)\left[y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2\right] + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x)$$

Wariacja parametrów - przykład

czyli $u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x)$

Funkcje $u_1(x)$ i $u_2(x)$ wyznaczamy z powyższego układu równań:

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x \qquad \text{oraz} \qquad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x$$

gdzie $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ jest Wronskianem.

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma więc postać:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x$$

Przykład: Rozwiąż równanie: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ w przedziale w którym $x \neq n\pi$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego: $y_g(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Wronskian: $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Rozwiązanie szczególne r.n.h.:

$$y_p(x) = -\cos x \int \mathrm{d}x + \sin x \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x \, \ln|\sin x|$$

Metoda redukcji rzędu równania

Niech będzie dane równanie jednorodne w postaci: $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + b(x)y = 0$

Zakładając, że znane jest jedno rozwiązanie $y_1(x)$ chcemy znaleźć drugie, liniowo niezależne, rozwiązanie.

Metoda redukcji rzędu polega na poszukiwaniu drugiego rozwiązania w postaci: $y_2(x) = u(x)y_1(x)$

Wstawiając to rozwiązanie do wyjściowego równania otrzymujemy:

$$y_1 u'' + (2y_1' + ay_1)u' + (y_1'' + ay_1' + by_1)u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + a(x)\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

Stosując podstawienie $v = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + a(x)\right)v \quad \Rightarrow \quad v(x) = C\,\frac{\exp\left[-\int a(x)\mathrm{d}x\right]}{y_1^2(x)}$$

A stąd $u(x) = C\int\left[\frac{\exp\left[-\int a(x)\mathrm{d}x\right]}{y_1^2(x)}\right]\mathrm{d}x + D$

gdzie stałe można przyjąć odpowiednio równe $C = 1,\ D = 0$.

Redukcja równania do postaci standardowej

Przykład: Wiedząc, że jednym z rozwiązań równania $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, dla $x > 0$, jest funkcja $y_1(x) = x^2$, znajdź drugie, liniowo niezależne, rozwiązanie.

$$u(x) = \int \frac{\exp\left[-\int(-3/x)\,\mathrm{d}x\right]}{x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x$$

A więc: $y_2(x) = x^2 \ln x \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2(C_1 + C_2 \ln x)$

Czasem może okazać się przydatne aby zapisać (zredukować) równanie $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ do tzw. postaci standardowej $u'' + f(x)u = 0$.

Można to osiągnąć poszukując rowiązania równania w postaci $y(x) = u(x)v(x)$ a następnie wybrać $v(x)$ tak, aby zniknął wyraz proporcjonalny do u'.

Otrzymujemy kolejno:

$$u''v + (2v' + av)u' + (v'' + av' + bv)u = 0$$

$$2v' + av = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int a(x)\mathrm{d}x\right]$$

Równanie przyjmuje więc następującą postać standardową:

$$u'' + \left[-\frac{1}{2}a'(x) - \frac{1}{4}a^2(x) + b(x)\right]u = 0$$