Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 7

Metoda szeregów potęgowych

Rozwiązania większości równań różniczkowych nie da się zapisać za pomocą funkcji elementarnych (sin, cos, exp, ln, ...).

Rozwiązania wielu równań można znaleźć w postaci szeregów potęgowych.

Rozważmy rówanie: $y' + p(x)y = r(x)$, gdzie $y(x_0) = y_0$.

Szukamy rozwiązania w postaci: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0)$

Bezpośrednio z równania znajdujemy: $y^{(1)}(x_0) = r(x_0) - p(x_0)y_0$

Różniczkując wyjściowe równanie otrzymujemy:

$$y^{(2)}(x) + p^{(1)}(x)y(x) + p(x)y^{(1)}(x) = r^{(1)}(x)$$

a stąd: $y^{(2)}(x_0) = r^{(1)}(x_0) - p^{(1)}(x_0)y_0 - p(x_0)[r(x_0) - p(x_0)y_0]$

Analogicznie można wyznaczyć wyższe pochodne $y^{(n)}(x_0)$.

Przykład: Znajdź pięć pierwszych wyrazów szeregu potęgowego będącego rozwiązaniem równania: $y' + 4xy = 3e^{x-1}$ z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

Szukamy rozwinięcia w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 1$.
Bezpośrednio z równania mamy: $y(1) = 1,\ \ y^{(1)}(1) = -1$
Różniczkując otrzymujemy: $y^{(2)} + 4y + 4xy^{(1)} = 3e^{x-1} \quad \Rightarrow \quad y^{(2)}(1) = 3$
Podobnie znajdujemy dwa kolejne wyrazy. Ostatecznie mamy:

$$y(x) = 1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{29}{24}(x-1)^4 + \ldots$$

Metoda szeregów potęgowych

Rozważmy jednorodne równanie różniczkowe drugiego stopnia:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

Szukamy rozwiązania w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy wokół zera:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Przykład: Znajdź zależność rekurencyjną jaką powinny spełniać współczynniki szeregu potęgowego będącego rozwiązaniem równania:

$$y'' + 2xy' + (1+x^2)y = 0, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = -1$$

Wstawiając rozwinięcie w szereg do równania otrzymujemy:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Wciągając współczynniki pod sumy dostajemy:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

Metoda szeregów potęgowych

Kolejnym krokiem jest zmiana indeksów tak aby w każdej sumie zmienna x występowała w potędze n:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=0$$

Wyodrębniając wyrazy odpowiadające $n=0$ i $n=1$ mamy:

$$2a_2+a_0+(6a_3+3a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(2n+1)a_n+a_{n-2}]x^n=0$$

Żądamy aby współczynniki przy każdej potędze x były niezależnie równe zero:

$$\begin{aligned}
2a_2+a_0=0 &\qquad\Rightarrow\qquad a_2=-\tfrac{1}{2}a_0\\
6a_3+3a_1=0 &\qquad\Rightarrow\qquad a_3=-\tfrac{1}{2}a_1\\
(n+2)(n+1)a_{n+2}+(2n+1)a_n+a_{n-2}=0 &\qquad\Rightarrow\qquad a_{n+2}=-\tfrac{(2n+1)a_n+a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Korzystając z powyższych zależności znajdujemy rozwiązanie ogólne:

$$y(x)=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+...\right)+a_1\left(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{48}x^7+...\right)$$

Warunki początkowe prowadzą do: $a_0=3$ oraz $a_1=-1$.

Równanie Legendre'a

Równanie Legendre'a ma postać:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \qquad \alpha \geqslant 0$$

Szukamy rozwiązania w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy wokół zera:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Grupując wyrazy i przesuwając indeksy otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Przyrównując współczynniki kolejnych potęg x do zera, mamy:

$$\begin{aligned}
x^0: &\quad 2a_2 + \alpha(\alpha+1)a_1 = 0 &\quad \Rightarrow &\quad a_2 = -\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+1)a_0 \\
x^1: &\quad 6a_3 - 2a_1 + \alpha(\alpha+1)a_1 = 0 &\quad \Rightarrow &\quad a_3 = \tfrac{1}{6}[2-\alpha(\alpha+1)]a_1
\end{aligned}$$

Dla x^n, $n \geqslant 2$ mamy

$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \alpha(\alpha+1)a_n = 0$

czyli $a_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n \geqslant 2$

Widać, że współczynniki parzyste są wielokrotnością a_0, a nieparzyste a_1.

Wielomiany Legendre'a

Ogólne rozwiązanie równania Legendre'a to $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ gdzie:

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 - ...$$
$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 - ...$$

Dla α będącego nieujemną liczbą całkowitą ($\alpha = n$) jeden z szeregów jest skończonym wielomianem Legendre'a:

$$P_{2n}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(4n-2r)!}{2^{2n} r!(2n-r)!(2n-2r)!} x^{2n-2r}$$
$$P_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(4n-2r+2)!}{2^{2n+1} r!(2n-r+1)!(2n-2r+1)!} x^{2n-2r+1}$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Wygodną formułą do znalezienia wielomianów Legendre'a jest:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

Równanie Chebysheva

Równanie Chebysheva ma postać:

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha y = 0, \qquad \alpha \geqslant 0$$

Szukamy rozwiązania w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy wokół zera:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Co prowadzi do następujących zależności rekurencyjnych:

$$a_2 = -\frac{\alpha}{2!}a_0, \qquad a_3 = \frac{(1-\alpha)}{3!}a_1, \qquad a_{n+2} = \frac{(n^2-\alpha)}{(n+1)(n+2)}a_n, \; n = 2, 3, \ldots$$

Ogólne rozwiązanie równania Legendre'a to $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ gdzie:

$$y_1(x) = 1 - \tfrac{\alpha}{2!}x^2 - \tfrac{\alpha(2^2-\alpha)}{4!}x^4 - \tfrac{\alpha(2^2-\alpha)(4^2-\alpha)}{6!}x^6 - \ldots$$

$$y_2(x) = x + \tfrac{(1-\alpha)}{3!}x^3 + \tfrac{(1-\alpha)(3^2-\alpha)}{5!}x^5 - \ldots$$

Dla α będącego nieujemną liczbą całkowitą ($\alpha = n$) jeden z szeregów jest skończonym wielomianem Chebysheva.

Wygodną formułą do znalezienia wielomianów Chebysheva jest:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

Punkty osobliwe liniowych równań różniczkowych

Zapiszmy równanie $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ w postaci:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, \;\; Q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

Punkty w których $P(x)$ oraz $Q(x)$ są analityczne nazywamy regularnymi.

Punkty w których co najmniej jedna z tych funkcji nie jest analityczna nazywamy osobliwymi.

Punkt x_0 w którym $(x - x_0)P(x)$ oraz $(x - x_0)^2 Q(x)$ są analityczne nazywamy regularnym punktem osobliwym. W przeciwnym wypadku punkt x_0 nazywamy nieregularnym punktem osobliwym.

Przykład: W przypadku równania Legendre'a mamy:

$$P(x) = -2x/(1 - x^2) \quad \text{oraz} \quad Q(x) = \alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$$

Obie funkcje nie są analityczne w $x_0 = \pm 1$, a więc punkty te są punktami osobliwymi równania Legendre'a. Ponieważ jednak funkcje

$$(x - 1)P(x) = 2x/(1 + x) \quad \text{oraz} \quad (x - 1)^2 Q(x) = \alpha(\alpha + 1)(x - 1)/(1 + x)$$

są analityczne w $x_0 = 1$, więc jest to punkt osobliwy regularny.
Podobnie widać, że $x_0 = -1$ jest również regularnym punktem osobliwym.

Metoda Frobeniusa

Metoda Frobeniusa pozwala na znalezienie rozwiązania równania:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

w postaci szeregu potęgowego wokół regularnych punktów osobliwych.

Twierdzenie Frobeniusa: Niech x_0 będzie regularnym punktem osobliwym powyższego równania różniczkowego. Wówczas w pewnym przedziale $0 < x - x_0 < d$ równanie posiada co najmniej jedno rozwiązanie w postaci:

$$y(x) = (x - x_0)^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

gdzie $a_0 \neq 0$ oraz c jest liczbą zespoloną. Istnieje drugie, liniowo niezależne rozwiązanie o podobnej postaci, które może zawierać dodatkowy człon logarytmiczny, i posiada inne wartości parametru c oraz współczynników w szeregu potęgowym.

Rozważymy mniej ogólną postać równania w którym $a(x) = x^2$:

$$x^2 y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'' + \frac{p(x)}{x} y' + \frac{q(x)}{x^2} y = 0$$

Zakładając, że $p(x) = xP(x)$ i $q(x) = x^2 Q(x)$ są analityczne w $x = 0$, rozważamy więc równanie posiadające regularne punkty osobliwe w zerze.

Metoda Frobeniusa

Szukamy rozwiązania w postaci szeregu potęgowego: $y(x) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Wstawiając to rozwiązanie do wyjściowego równania oraz rozwijając w szereg potęgowy funkcje $p(x)$ i $q(x)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & x^{c-2}[c(c-1)a_0 + (c+1)ca_1 x + ...]+ \\ & \quad +(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + ...)x^{c-2}(ca_0 + (c+1)a_1 x + ...)+ \\ & \quad +x^{c-2}(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + ...)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...) = 0 \end{aligned}$$

Przyrównując współczynnik przy najniższej potędze zmiennej x, czyli x^{c-2}, do zera otrzymujemy równanie charakterystyczne, z którego wyznaczamy c:

$$[c(c-1) + p_0 c + q_0]a_0 = 0 \quad \underset{a_0 \neq 0}{\Rightarrow} \quad c(c-1) + p_0 c + q_0 = 0$$

Ponieważ $p_0 = \lim_{x\to 0}[xP(x)]$ oraz $q_0 = \lim_{x\to 0}[x^2 Q(x)]$, więc powyższe równanie można zapisać bez konieczności wstawiania rozwinięcia w szereg do wyjściowego równania różniczkowego.

Uwaga: W ogólnym przypadku gdy $a(x) \neq x^2$ równanie charakterystyczne przyjmuje inną postać i musi być wyznaczone niezależnie.

W zależności od wartości pierwiastków równania charakterystycznego metoda Frobeniusa daje różne postacie niezależnych rozwiązań wyjściowego równania.

Metoda Frobeniusa

Przypadek I: pierwiastki rzeczywiste $c_1 > c_2$ oraz $c_1 - c_2 \notin \mathcal{Z}$.

W przedziałach $-d < x < 0$ oraz $0 < x < d$ r. różniczkowe ma dwa niezależne rozwiązania:

$$y_1(x) = |x|^{c_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right] \quad \text{oraz} \quad y_2(x) = |x|^{c_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right]$$

Przykład: Rozwiąż równanie $2xy'' + (x+1)y' + y = 0$ dla $0 < x < d$.

Równanie charakterystyczne: $c(c-1) + \frac{1}{2}c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0,\ c = \frac{1}{2}$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)(n+c-1)a_n x^{n+c-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+c)a_n x^{n+c} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}(n+c)a_n x^{n+c-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c} = 0$$

przesuwając indeks i grupując wyrazy, otrzymujemy:

$$\sum_{n=-1}^{\infty}[2(n+c+1)(n+c) + (n+c+1)]a_{n+1}x^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+c+1)a_n x^{n+c} = 0$$

wyodrębniając człon odpowiadający $n = -1$ mamy:

$$[2c(c-1) + c]\, a_0 x^{c-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{[2(n+c+1)(n+c) + (n+c+1)]a_{n+1} + (n+c+1)a_n\right\} x^{n+c} = 0$$

Metoda Frobeniusa

Współczynnik przy x^{c-1} daje równanie charakterystyczne: $2c^2 - c = 0$

Przyrównując do zera współczynnik przy x^{n+c} dostajemy (dla $n + c + 1 \neq 0$) zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{2n + 2c + 1}$$

W szczególności dla $c = 0$ mamy $a_{n+1} = -\frac{a_n}{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 2^n n!}{(2n+1)!} a_0$

A więc dla pewnego $d_1 > 0$ rozwiązanie szczególne r. różniczkowego ma postać (wybieramy $a_0 = 1$):

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n n!}{(2n+1)!} x^{n+1}$$

Podobnie dla $c = \frac{1}{2}$ mamy: $a_{n+1} = -\frac{a_n}{2n+2} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} a_0$

A więc dla pewnego $d_2 > 0$ drugie niezależne rozwiązanie ma postać ($a_0 = 1$):

$$y_2(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n = x^{1/2} e^{-x/2}$$

Rozwiązanie ogólne r. różniczkowego ma postać: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Ponieważ promienie zbieżności $R_1 = R_2 = \infty$, więc rozwiązanie jest dla $x > 0$.

Metoda Frobeniusa

Przypadek II: pierwiastki rzeczywiste $c_1 > c_2$ oraz $c_1 - c_2 \in \mathcal{Z}$.

W przedziałach $-d < x < 0$ oraz $0 < x < d$ r. różniczkowe ma dwa niezależne rozwiązania:

$$y_1(x) = |x|^{c_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right] \quad \text{oraz} \quad y_2(x) = A y_1(x)\ln|x| + |x|^{c_2}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n$$

Przykład: Rozwiąż równanie $x^2 y'' + x(2+x)y' - 2y = 0$ dla $0 < x < d$.

Równanie charakterystyczne: $c(c-1) + 2c - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2,\ c_2 = 1$

Wstawiając do równania rozwiązanie w postaci szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c}$ mamy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)(n+c-1)a_n x^{n+c} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)a_n x^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+c)a_n x^{n+c+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+c}$$

Wyodrębniamy wyraz przy najniższej potędze x^c oraz przesuwamy indeks:

$$a_0(c^2 + c - 2)x^c + \sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+c)(n+c+1) - 2]a_n + (n+c-1)a_{n-1}\}x^{n+c} = 0$$

Przyrównując współczynniki do zera otrzymujemy zależność rekuremncyjną:

$$a_n = \frac{(n+c-1)}{[2 - (n+c)(n+c+1)]}a_{n-1}, \quad n = 1, 2, ...$$

A więc dla pewnego $d_1 > 0$ rozwiązanie szczególne dla $c = 1$ ma postać (wybieramy $a_0 = 1$):

$$y_1(x) = x\left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4\cdot 5} - \frac{x^3}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} - ...\right)$$

Poszukujemy drugiego rozwiązania w postaci (dla $c = -2$):

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2}$$

Wstawiając to rozwiązanie do wyjściowego równania wyznaczamy nieznane współczynniki:

$$C[x^2 y_1''(x) + x(2+x)y_1'(x) - 2y_1(x)]\ln x + C[y_1(x) + xy_1(x) + 2xy_1'(x)] +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-2)b_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n-2)b_n x^{n-2} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n-2)b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}2b_n x^{n-2} = 0$$

Współczynnik w wyrazie logarytmicznym znika, bo $y_1(x)$ spełnia równanie.

Metoda Frobeniusa

Wyrazy odpowiadające $n = 0$ kasują się wzajemnie i w rezultacie mamy:

$$C[y_1(x) + xy_1(x) + 2xy_1'(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} (n-3)(nb_n + b_{n-1})x^{n-2} = 0$$

Korzystając z jawnej postaci pierwszego rozwiązania $y_1(x)$ dostajemy:

$$\left(3Cx - \tfrac{Cx^2}{4} + \tfrac{Cx^3}{10} - \tfrac{Cx^4}{40} + \ldots\right) - (2b_1 + 2b_0)\tfrac{1}{x} - (2b_2 + b_1) + (4b_4 + b_3)x^2 +$$
$$+(10b_5 + 2b_4)x^3 + (18b_6 + 3b_5)x^4 + (28b_7 + 4b_6)x^5 + \ldots = 0$$

Przyrównując współczynniki do zera mamy: $b_1 = -b_0, \;\; b_2 = -\frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}b_0,$
$C = 0, \;\; b_4 = -\frac{1}{4}b_3, \;\; b_5 = -\frac{1}{5}b_4 = \frac{1}{4\cdot5}b_3, \;\; b_6 = -\frac{1}{6}b_5 = -\frac{1}{4\cdot5\cdot6}b_3, \ldots$

A więc drugie rozwiązanie ma postać:

$$y_2(x) = b_0\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) + b_3x\left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4\cdot5} - \frac{x^3}{4\cdot5\cdot6} + \frac{x^4}{4\cdot5\cdot6\cdot7} - \ldots\right)$$

Widać, że drugie rozwiązanie zawiera w sobie rozwiązanie $y_1(x)$.

A więc drugim liniowo niezależnym rozwiązaniem jest $y_2(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}$

Rozwiązanie ogólne ma postać: $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \quad x > 0$

Metoda Frobeniusa

Przypadek III: pierwiastki rzeczywiste $c_1 = c_2$.

W przedziałach $-d < x < 0$ oraz $0 < x < d$ r. różniczkowe ma dwa niezależne rozwiązania:

$$y_1(x) = |x|^{c_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right] \quad \text{oraz} \quad y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x|^{c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$$

Przykład: Rozwiąż równanie $x^2 y'' + (x^2 - x) y' + y = 0$ dla $0 < x < d$.

Równanie charakterystyczne: $c(c-1) - c + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{1,2} = 1$

Wstawiając do równania rozwiązanie w postaci szeregu otrzymujemy:

$$a_0[c(c-1)-c+1]x^c + \sum_{n=1}^{\infty} \{[(n+c)(n+c-2)+1]a_n + (n+c-1)a_{n-1}\} x^{n+c} = 0$$

Przyrównując współczynniki do zera dla $c = 1$ otrzymujemy zależność:

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} = \frac{(-1)^n}{n!} a_0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

A więc dla pewnego $d_1 > 0$ rozwiązanie szczególne r. różniczkowego ma postać (wybieramy $a_0 = 1$):

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} = x e^{-x}$$

Metoda Frobeniusa

Szukamy drugiego rozwiązania w postaci:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2}$$

Wstawiając $y_2(x)$ do wyjściowego równania, korzystając z faktu że $y_1(x)$ jest rozwiązaniem równania oraz przesuwając indeks, otrzymujemy:

$$2xy_1'(x) + xy_1(x) - 2y_1(x) + b_0x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)[(n+1)b_n + b_{n-1}]x^{n+2} = 0$$

Korzystając z postaci $y_1(x)$ otrzymujemy:

$$(-x^2 + x^3 - x^4/2 + x^5/6 - ...) + b_0x^2 + 2(2b_1 + b_0)x^3$$
$$+3(3b_2 + b_1)x^4 + 4(4b_3 + b_2)x^5 + 5(5b_4 + b_3)x^6 + ... = 0$$

Przyrównując współczynniki do zera znajdujemy:

$b_0 = 1,\ b_1 = -3/4,\ b_2 = 11/36, ...$

Drugie niezależne rozwiązanie ma więc postać:

$$y_2(x) = xe^{-x}\ln x + \left(x^2 - \frac{3x^3}{4} + \frac{11x^4}{36} - \frac{25x^5}{288} + ...\right)$$

Metoda Frobeniusa

Przypadek IV: pierwiastki zespolone sprzężone $c_{1,2} = \lambda \pm i\mu$.

W przedziałach $-d < x < 0$ oraz $0 < x < d$ r. różniczkowe ma dwa niezależne rozwiązania będące częścią rzeczywistą i urojoną wyrażenia:

$$y(x) = |x|^{\lambda + i\mu} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right]$$

Przykład: Rozwiąż równanie $x^2 y'' - xy' + 10y = 0$ dla $0 < x < d$.

Równanie charakterystyczne: $c^2 - 2c + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{1,2} = 1 \pm 3i$

Wstawiając do równania rozwiązanie w postaci szeregu otrzymujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n+c)(n+c-2) + 10] a_n x^{n+c} = 0$$

Przyrównując współczynniki do zera otrzymujemy $a_n = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$.
Rozwiązanie ma więc postać:

$$y(x) = a_0 x^{1+3i} = a_0 x \exp\left[\ln x^{3i}\right] = a_0 x [\cos(3 \ln x) + i \sin(3 \ln x)]$$

Ogólne rozwiązanie ma więc postać:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x \cos(3 \ln x) + C_2 x \sin(3 \ln x)$$