Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Wykład 1

Literatura:

- Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, tom I i II, W. Krysicki i in., PWN 2005.
- Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, W. Feller, PWN 2006.
- Zadania z probabilistyki, A. Plucińska, E. Pluciński, PWN 1983.
- Statystyka dla fizyków, R.N. Nowak, PWN, 2002.
- Statystyka dla fizyków. Ćwiczenia, R.N. Nowak, PWN, 2002.
- Analiza danych, S. Brandt, PWN, 1998.
- Wstęp do analizy błędu pomiarowego, R.J. Taylor, PWN, 2001.
- Jak analizować wyniki pomiarów, H. Abramowicz, PWN 1992.
- Probability and Statistical Inference, R.Bartoszyński, M.Niewiadomska-Bugaj, Wiley & Sons, 2007.

- http://home.agh.edu.pl/mariuszp

Statystyka - podstawowe pojęcia

Statystyka – nauka zajmująca się planowaniem badań, a także zbieraniem, organizacją, prezentacją i analizą danych, oraz wyciąganiem wniosków i podejmowaniem decyzji na ich podstawie.

Słowo „statystyka” jest także używane do określenia samych danych i wielkości pochodnych.

Populacja – zbiór wszystkich przedstawicieli posiadających badaną cechę.

Przykład: Badania demograficzne - spis powszechny. Kontrola jakości – zbiór wszystkich urządzeń danego typu produkowanych przez fabrykę.

Próbka losowa – reprezentatywna próbka całej populacji, tzn. taka, która odzwierciedla wszystkie cechy i związki w niej występujące.

Przykład: Próbkami losowymi nie są np. sondaże wśród czytelników dowolnego z czasopism, wśród przechodniów na ulicy, głosowania telewidzów w programach

Mówimy, że próbka jest **prosta** jeśli rezultat wyboru jednego elementu nie ma wpływu na rezultat wyboru innego elementu.

Przykład: Losując bez zwracania kule z urny, która jest wypełniona skończoną liczbą kul białych i czarnych, mamy do czynienia z próbką, która nie jest prosta.

Zdarzenia elementarne

Zachowanie układu, którego nie możemy przewidzieć z całkowitą pewnością, nazywamy przypadkowym. Miarą „przypadkowości" jest prawdopodobieństwo.

Pojęcia pierwotne rachunku prawdopodobieństwa to zdarzenie elementarne i przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω. Dowolny podzbiór $A \subset \Omega$ nazywamy zdarzeniem losowym.

Uwaga: Zdarzenia elementarne muszą być ekskluzywne – dane zdarzenie elementarne nie zawiera w sobie innych zdarzeń elementarnych.

Przykłady:

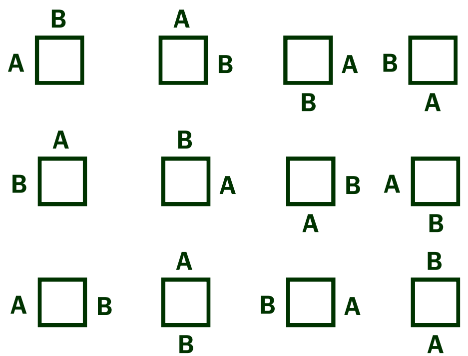
- jednokrotny rzut monetą: „orzeł" (O) i „reszka" (R) to dwa zdarzenia elementarne, które budują całą przestrzeń $\Omega = \{O, R\}$
- rzut dwoma monetami: $\Omega = \{(O,O), (O,R), (R,O), (R,R)\}$
- miesiąc urodzin: Ω = {Sty, Lut, Mar, Kwi, Maj, Cze, Lip, Sie, Wrz, Paź, Lis, Gru}
- czas życia żarówki – zdarzenia elementarne są dowolnymi liczbami dodatnimi, $t>0$, a przestrzeń jest nieskończona; ale może w konkretnym problemie lepiej wybrać $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$ godziny/dni/miesiące.
- liczba wypadków na skrzyżowaniu w ciągu miesiąca: $\Omega = \{1,2,3,\ldots\}$ a może $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ – często prościej rozważyć nieskończony ciąg.
- jądro promieniotwórcze w kolejnych odstępach 1s może się rozpaść (R) lub nie (B). Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest nieskończona: R, BR, BBR, BBBR, ...

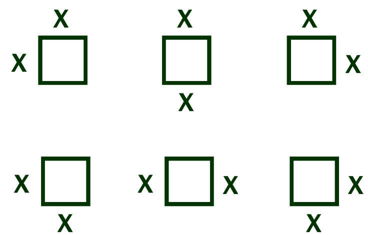
Zdarzenia elementarne - przykłady

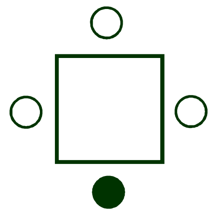
- rzut dwoma kostkami do gry: $\Omega = \{x, y\}$, gdzie $x = 1,\ldots,6$ oraz $y = 1,\ldots,6$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- suma oczek wyrzuconych na dwóch kostkach $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- dwie osoby przy kwadratowym stole – interesuje nas zdarzenie A: „siedzą w rogu”. przykłady różnych wyborów przestrzeni zdarzeń elementarnych:







Pojęcie prawdopodobieństwa

<u>Pewniki rachunku prawdopodobieństwa (Kolmogorov 1933):</u>

1) Każdemu zdarzeniu losowemu $A \subset \Omega$ przypisujemy liczbę P(A), zwaną prawdopodobieństwem tego zdarzenia, taką że $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2) P-two zdarzenia pewnego jest równe jedności $P(\Omega) = 1$.
3) P-two sumy ekskluzywnych zdarzeń losowych A i B, czyli takich że $A \cap B = \emptyset$, jest równe sumie p-tw tych zdarzeń $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

<u>Klasyczna definicja prawdopodobieństwa:</u>

$$P(A) \equiv \frac{n_A}{n} \equiv \frac{\text{liczba zdarzen elementarnych sprzyjajacych zdarzeniu A}}{\text{liczba wszystkich zdarzen elementarnych}}$$

<u>Definicja częstościowa prawdopodobieństwa:</u> Miarą p-twa jest względna częstości występowania zdarzenia A kiedy liczba obserwacji dąży do nieskończoności.

<u>Prawdopodobieństwa subiektywne:</u> (przydatne gdy mamy do czynienia ze zdarzeniami takimi jak np. czy istnieje życie w oceanie pod powierzchnią księżyca Saturna.

- A, B, ... traktujemy jako hipotezy (tzn. stwierdzenia które albo są prawdziwe albo fałszywe); P(A) = miara naszej wiary w to, że A jest prawdziwe

Przykład: wybór pomiędzy otrzymaniem gotówki a udziałem w loterii

Zdarzenia elementarne - przykłady

Przykład: Rozmieszczenie r = 3 kul (rozróżnialnych) w n = 3 komórkach:

1. $\{abc\|-\|-\}$	10. $\{a\|bc\|-\}$	19. $\{-\|a\|bc\}$
2. $\{-\|abc\|-\}$	11. $\{b\|ac\|-\}$	20. $\{-\|b\|ac\}$
3. $\{-\|-\|abc\}$	12. $\{c\|ab\|-\}$	21. $\{-\|c\|ab\}$
4. $\{ab\|c\|-\}$	13. $\{a\|-\|bc\}$	22. $\{a\|b\|c\}$
5. $\{ac\|b\|-\}$	14. $\{b\|-\|ac\}$	23. $\{a\|c\|b\}$
6. $\{bc\|a\|-\}$	15. $\{c\|-\|ab\}$	24. $\{b\|a\|c\}$
7. $\{ab\|-\|c\}$	16. $\{-\|ab\|c\}$	25. $\{b\|c\|a\}$
8. $\{ac\|-\|b\}$	17. $\{-\|ac\|b\}$	26. $\{c\|a\|b\}$
9. $\{bc\|-\|a\}$	18. $\{-\|bc\|a\}$	27. $\{c\|b\|a\}$

$$P(\mathrm{E}_i) = \frac{1}{27}$$
$$i = 1, \ldots, 27$$

- Zdarzenie A: „w jednej z komórek są co najmniej dwie kule” – zdarzenia el. 1–21
- Zdarzenie B: „pierwsza komórka nie jest pusta” – zdarzenia el. 1, 4–15, 22–27
- Zdarzenie C: „zachodzi zarówno A jak i B” – zdarzenia el. 1, 4–15
- Zdarzenie D: „zachodzi A lub B” – zdarzenia el. 1–27 (cała przestrzeń)

Zdarzenia elementarne - przykłady

Przykłady zagadnień typu „r kul w n komórkach”:

- Dni urodzin: r – osób, n = 365 dni
- Wypadki: r – wypadków, n = 7 dni tygodnia
- Strzelanie do celu: r – trafień, n – celów
- Klasyfikacja elementów (np. ludzi) wg. kategorii (wiek): r – elementów, n – kategorii
- Opuszczanie windy przez ludzi: r – pasażerów, n – pięter
- Rzuty kośćmi do gry: r – kości (rzutów), n = 6 możliwych wyników danego rzutu

Przypadek kul nierozróżnialnych:

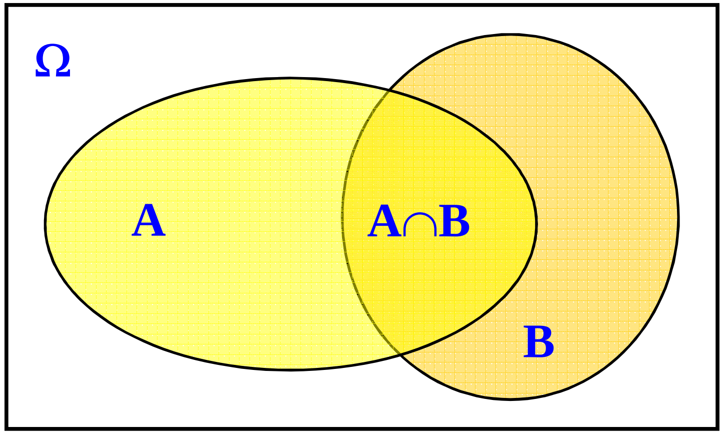
1. $\{\bullet\bullet\bullet|-|-\}$
2. $\{-|\bullet\bullet\bullet|-\}$
3. $\{-|-|\bullet\bullet\bullet\}$
4. $\{\bullet\bullet|\bullet|-\}$
5. $\{\bullet\bullet|-|\bullet\}$
6. $\{\bullet|\bullet\bullet|-\}$
7. $\{\bullet|-|\bullet\bullet\}$
8. $\{-|\bullet\bullet|\bullet\}$
9. $\{-|\bullet|\bullet\bullet\}$
10. $\{\bullet|\bullet|\bullet\}$

- $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{27}$ $\quad P(E_4) = \ldots = P(E_9) = \frac{1}{9}$ $\quad P(E_{10}) = \frac{2}{9}$
- $P(E_i) = \frac{1}{10} \qquad i = 1, \ldots, 10$

Przypadek nierozróżnialnych zarówno kul jak i komórek:

1. $\{\bullet\bullet\bullet|-|-\}$
2. $\{\bullet\bullet|\bullet|-\}$
3. $\{\bullet|\bullet|\bullet\}$

Działania na zbiorach



Prawa de Morgana:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Prawa rozdzielności dla dodawania i mnożenia:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Wniosek z pewnika (3):

Mamy $A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$ **oraz** $B = (A \cap B) \cup (B - A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B) \qquad P(B) = P(A \cap B) + P(B - A \cap B)$$

Odejmując stronami dostajemy: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Przykład:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

P-two zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Formuła włączania-wyłączania

Twierdzenie: Dla n dowolnych zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zachodzi:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j=1}^{n} P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k=1}^{n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)-$$

$$-\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

Dowód (indukcyjny): Oznaczenia $A\equiv\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ oraz $B\equiv A_{n+1}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j=1}^{n} P(A_i\cap A_j)+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)+$$

$$+P(A_{n+1})-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right)$$

Stosując założenie indukcyjne do zdarzeń $A_i\cap A_{n+1},\ i=1,\ldots,n$ i odpowiednio przestawiając wyrazy otrzymujemy tezę.

Dowód (zliczanie): Załóżmy, że określone zdarzenie elementarne występuje w k pierwszych zdarzeniach losowych A_i. Po prawej stronie formuły wł-wył zdarzenie to występuje tylko raz:

$$\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}-\cdots\pm\binom{k}{k}=1-(1+(-1))^k=1$$

Formuła włączania-wyłączania

Przykład: Ile wynosi p-two p_n, że podczas n rzutów kostką do gry, co najmniej jedna ze ścianek kostki nie wypadnie ani raz?

A_i – ścianka i nie wypadła ani raz podczas n rzutów kostką, $i = 1,\ldots, 6$

Obliczamy p-twa ($i < j < k < \ldots$):

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j) = \left(\frac{4}{6}\right)^n, \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_k) = \left(\frac{3}{6}\right)^n, \quad \cdots$$

Szukane p-two wynosi:

$$p_n = \binom{6}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \binom{6}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \binom{6}{3}\left(\frac{3}{6}\right)^n - \binom{6}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^n + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- $p_{10} = 0.73 \quad p_{12} = 0.56 \quad p_{13} = 0.49 \quad p_{15} = 0.36 \quad p_{20} = 0.15 \quad p_{25} = 0.06$
- $1-p_n$ to p-two, że podczas n rzutów wypadnie każda ze ścianek co najmniej raz.

Twierdzenie: Formuła włączania-wyłączania pozwala znaleźć ograniczenia na szukane p-twa. Wprowadzając oznaczenia

$$p_n \equiv \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \mathrm{A}_i\right) \equiv S_1 - S_2 + S_3 - \ldots$$

mamy

$$p_n \le S_1, \quad p_n \ge S_1 - S_2, \quad p_n \le S_1 - S_2 + S_3, \quad \ldots$$

Elementy kombinatoryki

Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona, to obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń będących podzbiorami tej przestrzeni ułatwiają pojęcia i twierdzenia z kombinatoryki.

Reguła iloczynu: **jeśli pewną czynność wykonuje się w k niezależnych etapach, przy czym etap 1 można wykonać na n_1 sposobów, etap 2 na n_2 sposobów, ... , wreszcie etap k-ty na n_k sposobów, to liczba N sposobów jakimi można wykonać tę czynność wynosi:**

$$\mathrm{N} = n_1 n_2 \cdots n_k$$

Rozróżniamy dwa typy losowań:

- **bez powtórzeń – raz wylosowany element nie wraca do populacji,**
- **z powtórzeniami – wylosowany element wraca do populacji przed kolejnym losowaniem.**

Rozróżniamy dwa typy uporządkowania:

- **kolejność losowanych elementów jest istotna (wariacje, permutacje),**
- **kolejność losowanych elementów nie jest istotna (kombinacje).**

Wariacje z powtórzeniami

Losujemy k elementów spośród n elementów przy czym wylosowany element za każdym razem zwracamy do populacji (losowanie ze zwracaniem).
Każdy z elementów możemy wybrać na n sposobów. Oznacza to, że liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego wynosi:

$$\mathrm{W}_n^k = n^k$$

Przykłady:

- Rzucając k kostek do gry uzyskamy jedną z 6^k możliwych konfiguracji. Wśród nich w 5^k przypadkach nie będzie ani jednej jedynki, natomiast w $k \cdot 5^{k-1}$ przypadkach wypadnie dokładnie jedna jedynka.
- Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 można utworzyć 5^3 trzycyfrowych liczb naturalnych, w których każda z cyfr może się powtarzać dowolną ilość razy.
- Jeśli w każdej komórce może znaleźć się dowolna liczba cząstek, to k rozróżnialnych cząstek możemy rozmieścić w n komórkach na n^k sposobów (rozkład Maxwella-Boltzmanna).

Wariacje bez powtórzeń

Losujemy k elementów spośród n elementów przy czym wylosowanego elementu nie zwracamy do populacji (losowanie bez zwracania). Pierwszy element można wybrać na n sposobów, drugi już tylko na $n-1$, trzeci na $n-2$, natomiast k-ty tylko na $n-k+1$ sposobów. Oznacza to, że liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego wynosi:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykłady:

- Mając do dyspozycji sześć pionowych pasów o różnych barwach możemy utworzyć $6!/(6-3)!$ trójkolorowych flag.
- Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 można utworzyć $5!/(5-3)!$ trzycyfrowych liczb naturalnych w których każda z cyfr może wystąpić co najwyżej jeden raz.
- Jeżeli w każdej komórce może znaleźć się tylko jedna kula, to k kul (kule są makroskopowe a więc rozróżnialne) można rozmieścić w nich na $n!/(n-k)!$ sposobów. (Analogia: komórki – piętra budynku, kule – osoby w windzie)

Permutacje bez i z powtórzeniami

Losujemy n elementów spośród n elementów bez zwracania. Pierwszy element można wybrać na n sposobów, drugi już tylko na $n-1$, trzeci na $n-2$, natomiast przedostatni tylko na 2 sposoby. Oznacza to, że liczba permutacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wynosi:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

Przykład: (statystyka Maxwella-Boltzmanna) k cząstek można rozmieścić po jednej w k ustalonych komórkach na $k!$ sposobów.

Jeśli wśród n elementów mamy k różnych elementów, z których pierwszy powtarza się n_1 razy, drugi n_2 razy, ... , k-ty n_k razy ($n_1+n_2+\ldots+n_k=n$), to liczba rozróżnialnych losowań bez zwracania, czyli liczba permutacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego, w którym poszczególne elementy powtarzają się odpowiednio n_1, n_2, ..., n_k razy wynosi:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

Przykład: (statystyka M-B) w pierwszej komórce k_1, w drugiej k_2, ..., w n-tej k_n cząstek można rozmieścić na $P_k(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ sposobów.

Kombinacje bez powtórzeń

Losujemy k elementów spośród n elementów przy czym wylosowanego elementu nie zwracamy do populacji (losowanie bez zwracania). Nie interesuje nas również kolejność wylosowanych elementów. Mamy więc do czynienia z k-elementowymi podzbiorami zbioru n-elementowego.

Liczba k-elementowych kombinacji bez powtórzeń z n-elementowego zbioru wynosi:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykłady:

- Z 10 osób możemy utworzyć trzy zespoły liczące odpowiednio po 5, 3 i 2 osoby na $\binom{10}{5}\binom{5}{3} = \frac{10!}{5!(10-5)!}\frac{5!}{3!(5-3)!} = 2520$ sposobów.
- Na ile sposobów można rozmieścić 20 kul w trzech komórkach, tak aby w pierwszej było ich 10, w drugiej 6, a w trzeciej 4? Odpowiedź: $\binom{20}{10}\binom{10}{6}$
- Jeżeli w każdej komórce może znaleźć się tylko jedna cząstka, to k nierozróżnialnych cząstek można rozmieścić w $n \geqslant k$ komórkach na $\binom{n}{k}$ sposobów (rozkład Fermiego-Diraca).

Kombinacje z powtórzeniami

Rozważmy elementy n różnych rodzajów. Elementy tego samego rodzaju traktujemy jako nierozróżnialne. Każdy zbiór k elementowy ($k \leqslant n$) gdzie każdy element należy do jednego z tych n rodzajów nazywamy k-elementową kombinacją z powtórzeniami z n rodzajów elementów.

Liczba k-elementowych kombinacji z powtórzeniami z elementów n rodzajów jest równa:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

<u>Przykłady:</u>

- Rozpatrzmy rozmieszczenie $k = 8$ nierozróżnialnych kul w $n = 6$ komórkach |●●●|●||||●●●●| - liczba rozróżnialnych rozmieszczeń wynosi $\bar{C}_6^8 = \binom{13}{8} = 1287$
- Rzucając r <u>nierozróżnialnych</u> kostek do gry, otrzymamy $\bar{C}_6^r = \binom{r+5}{r} = \binom{r+5}{5}$ nierozróżnialnych konfiguracji (komórki to liczby oczek, kule to kostki).
- Jeśli w każdej komórce może znaleźć się dowolna liczba cząstek, to k nierozróżnialnych cząstek możemy rozmieścić w n komórkach na $\bar{C}_n^k$ sposobów (rozkład Bosego-Einsteina). Wszystkie komórki będą zajęte w $\bar{C}_n^{k-n}$ przypadkach.

Przykład: mechanika statystyczna

Każdy możliwy stan układu to punkt w przestrzeni fazowej.

- Statystyka M-B(cząstki rozróżnialne, dowolna liczba cząstek w komórce): $W_n^k = n^k$
- Statystyka B-E (cząstki nierozróżnialne, dowolna liczba cząstek w komórce):

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

- Statystyka F-D (cząstki nierozróżnialne, co najwyżej jedna cząstka w komórce):

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- p-two rozmieszczenia k cząstek po jednej w k ustalonych komórkach:

M-B: $p = \frac{k!}{n^k}$ B-E: $p = \frac{1}{\bar{C}_n^k} = \frac{k!(n-1)!}{(n+k-1)!}$ F-D: $p = \frac{1}{C_n^k} = \frac{k!(n-k)!}{n!}$

- Statystyka B-E:

- wszystkie komórki zajęte: $\bar{C}_n^{k-n} = \binom{n+k-n-1}{k-n} = \frac{(k-1)!}{(k-n)!(n-1)!} = \binom{k-1}{n-1}$

- dokładnie m cząstek w ustalonej komórce: $\bar{C}_{n-1}^{k-m} = \binom{n+k-m-2}{k-m}$

- dokładnie m cząstek w jednej z komórek: $n\,\bar{C}_{n-1}^{k-m}$

Prawdopodobieństwo - przykłady

Przykład 1: Winda z 7 pasażerami jedzie przez 10 pięter. Jaka jest szansa, że ludzie będą wysiadali pojedynczo na piętrach?

Analogia: k=7 kul które mamy rozmieścić w n=10 komórkach. Każdy przypadek oddzielnego wysiadania odpowiada losowaniu bez zwracania. Sytuację gdy po kilku pasażerów może wysiąść na jednym z pięter możemy opisać jako losowanie ze zwracaniem. Oczywiście pasażerowie są rozróżnialni i jest istotne to kto wysiądzie na którym piętrze. Szukane prawdopodobieństwo jest więc równe:

$$P = \frac{V_{10}^{7}}{W_{10}^{7}} \cong 0.06$$

Przykład 2: Wyciągamy 5 kart z talii 52 dobrze potasowanych kart. Jakie jest p-two, że są wśród nich a) 4 asy, b) 4 asy i jeden król, c) trzy 10-tki i dwa walety, d) 9-tka, 10-tka, walet, królowa i król, e) trzy są tego samego koloru i dwie inne, f) co najmniej jeden as?

a) $P = \frac{C_4^4 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{54145}$

b) $P = \frac{C_4^4 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{649740}$

d) $P = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{64}{162435}$

c) $P = \frac{C_4^3 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{1}{108290}$

e) $P = \frac{4\,C_{13}^3 \cdot 3\,C_{13}^2}{C_{52}^5} = \frac{429}{4165}$

f) $P = 1 - \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} = 1 - \frac{35673}{54145} = \frac{18482}{54145}$