Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Wykład 11

Rozkład χ^2

Niech zmienna losowa x ma rozkład normalny $\mathcal{N}(x;\ \mu,\sigma)$. Znajdziemy rozkład zmiennej:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{x}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Standaryzując zmienną losową $\mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}-\mu}{\sigma}$ otrzymujemy standaryzowany rozkład Gaussa:

$$\mathcal{N}(\mathbf{x};0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2}\right)$$

Rozkład zmiennej u = x^2 ma więc postać:

$$\mathcal{X}_1(u) = \left(\mathcal{N}\left(-\sqrt{u}\right)+\mathcal{N}\left(\sqrt{u}\right)\right)\left|\frac{dx}{du}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)$$

Rozważmy dwie niezależne zmienne losowe $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ z tego samego rozkładu normalnego, i znajdźmy rozkład zmiennej losowej:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{x}_1-\mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{x}_2-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Szukany rozkład ma postać:

$$\mathcal{X}_2(u) = \int_0^u \mathcal{X}_1(u-t)\mathcal{X}_1(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{t(u-t)}} = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)$$

Rozkład χ^2

Postępując tak dalej znajdujemy rozkład sumy kwadratów *n* niezależnych, standaryzowanych zmiennych losowych każda z rozkładu Gaussa, zwany rozkładem χ^2:

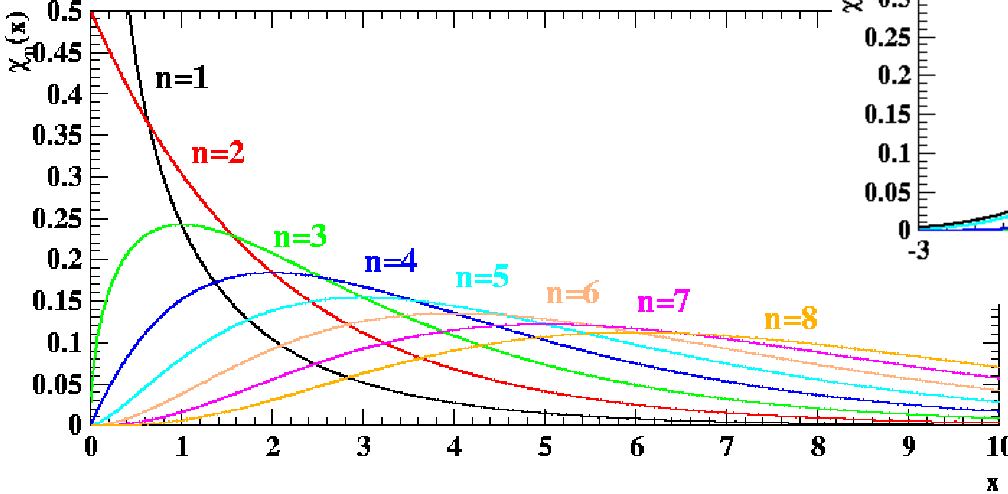
$$\mathcal{X}_n(u) = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} u^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right), \qquad n > 0, \quad u \geq 0$$

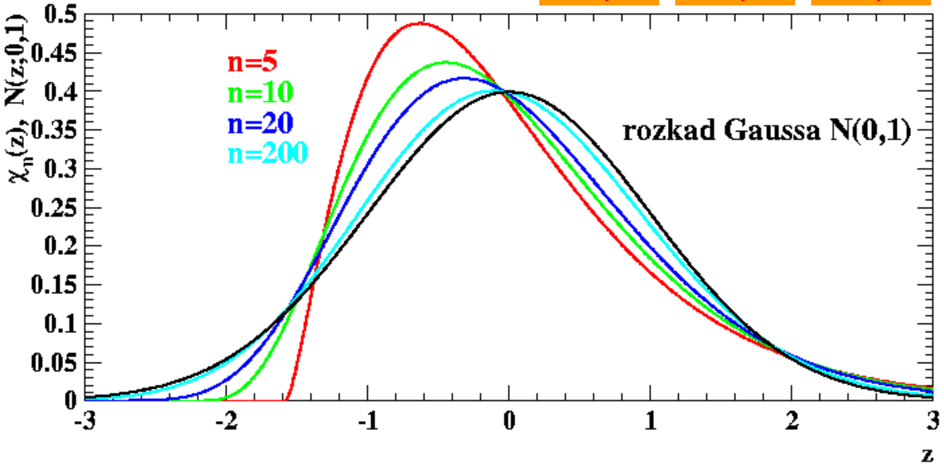
gdzie indeks *n* oznacza liczbę stopni swobody.

Math Player Math Player Math Player

Wartość oczekiwana i wariancja:

$$\mathcal{E}[\mathrm{u}] = n \qquad \mathcal{V}[\mathrm{u}] = 2n$$





Zachowanie dla dużych *n*:

$$\mathrm{z} = \frac{\mathrm{u} - n}{\sqrt{2n}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{u} = n + \mathrm{z}\sqrt{2n}$$

Rozkład χ^2

Jak zmieni się rozkład zmiennej losowej u w przypadku gdy:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{x}_1 - \overline{\mathbf{x}}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{x}_2 - \overline{\mathbf{x}}}{\sigma}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\mathbf{x}_n - \overline{\mathbf{x}}}{\sigma}\right)^2$$

Wychodząc z łącznego rozkładu p-twa zmiennych x_1 , x_2 , ..., x_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}(x_i; \mu, \sigma) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right)$$

można pokazać, że łączny rozkład p-twa zmiennych u oraz $\overline{\mathbf{x}}$ ma postać:

$$g(u, \overline{x}; \mu, \sigma) = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} u^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \exp\left\{-\frac{(\overline{x} - \mu)^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}\right\} = \mathcal{X}_{n-1}(u)\,\mathcal{N}\left(\overline{x}; \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

<u>Wnioski:</u>

1. **Zmienne u i $\overline{\mathbf{x}}$ są statystycznie niezależne.**
2. **Rozkład zmiennej u to rozkład χ^2 o $n-1$ stopniach swobody (użycie średniej zmniejsza liczbę niezależnych składników w sumie).**

Rozkład χ^2

Korzystając z rozkładu zmiennej losowej u znajdujemy rozkład zmiennej:

$$\mathrm{v} \equiv \mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\mathrm{u} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{x}_i - \overline{\mathrm{x}}\right)^2$$

który ma postać:

$$f(v;\sigma,n) = \frac{\frac{n-1}{\sigma^2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}-1}\exp\left(-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right)$$

Wartość oczekiwana zmiennej v: $\mathcal{E}[\mathrm{v}] = \mathcal{E}\left[\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2\right] = \frac{\sigma^2}{n-1}\mathcal{E}[\mathrm{u}] = \frac{\sigma^2}{n-1}(n-1) = \sigma^2$

Wariancja zmiennej v: $\mathcal{V}[\mathrm{v}] = \mathcal{V}\left[\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2\right] = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2\mathcal{V}[\mathrm{u}] = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2 2(n-1) = \frac{2}{n-1}\sigma^4$

Wartość oczekiwana i wariancja estymatora s_{x}:

$$\mathcal{E}[\mathrm{s}_{\mathrm{x}}] \cong \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma \qquad \mathcal{V}[\mathrm{s}_{\mathrm{x}}] \cong \frac{1}{2n}\sigma^2 \qquad \hat{\mathcal{V}}[\mathrm{s}_{\mathrm{x}}] = \frac{1}{2n}\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2$$

Podobna analiza prowadzi do wniosku, że statystyką o n−1 stopniach swobody jest też: $\mathrm{u} = \frac{n(n-1)}{\sigma^2}\mathrm{s}_{\overline{\mathrm{x}}}^2$ gdzie $\mathrm{s}_{\overline{\mathrm{x}}} = \frac{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{x}_i - \overline{\mathrm{x}}\right)^2}$

Rozkład Studenta

Aby uniknąć problemu nieznanej dyspersji rozkładu normalnego w zmiennej typu χ^2, rozważmy statystykę postaci (Studenta):

$$\frac{\overline{\mathrm{x}}-\mu}{\mathrm{s}_{\overline{\mathrm{x}}}} = \left\| \mathrm{s}^2_{\overline{\mathrm{x}}} = \frac{\sigma^2}{n(n-1)}\mathrm{u} \right\| = \frac{\overline{\mathrm{x}}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n(n-1)}\mathrm{u}}} = \frac{\frac{\frac{\overline{\mathrm{x}}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\mathrm{u}}{n-1}}}$$

Uogólnijmy rozważaną zmienną losową na zmienną: $\mathrm{t} = \frac{\frac{\mathrm{x}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\mathrm{u}}{n}}} \rightarrow \mathrm{t} = \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{\frac{\mathrm{u}}{n}}}$

gdzie x jest zmienną z rozkładu normalnego o parametrach μ i σ , a z jest standaryzowaną zmienną gaussowską. Natomiast zmienna u podlega rozkładowi χ^2 o n stopniach swobody.

Łączna gęstość p-twa zmiennych z oraz u ma postać:

$$h_n(z,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}u^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)$$

Rozkład Studenta

W standardowy sposób znajdujemy rozkład zmiennej losowej t:

$$\begin{cases} t = \dfrac{z}{\sqrt{u/n}} \\ v = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = t\sqrt{\dfrac{v}{n}} \\ u = v \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} & \dfrac{\partial u}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\dfrac{v}{n}} & \dfrac{t}{2\sqrt{vn}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\dfrac{v}{n}}$$

Łączny rozkład p-twa zmiennych t oraz v:

$$g_n(t,v) = h_n z\big((t,v),u(t,v)\big)\left|J(t,v)\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{2}\right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} v^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{\frac{v}{n}}\exp\left(-\frac{v}{2}-\frac{t^2 v}{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} v^{\frac{n+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{v}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\right)$$

Rozkład brzegowy zmiennej t:

$$\mathcal{S}_n(t) = \int_0^\infty g_n(t,v)\,dv = \left\| \; q = v\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \; \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^\infty q^{\frac{n+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{q}{2}\right)dq = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Rozkład Studenta

Rozkład Studenta o n stopniach swobody:

$$S_n(t) = \int_0^\infty g_n(t,v)\,dv = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad -\infty < t < \infty$$

Dla n=1 rozkład Studenta przechodzi w rozkład Cauchy'ego: $S(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$

Uwaga: Dla rozkładu Cauchy'ego nie istnieją wartość oczekiwana ani wariancja.

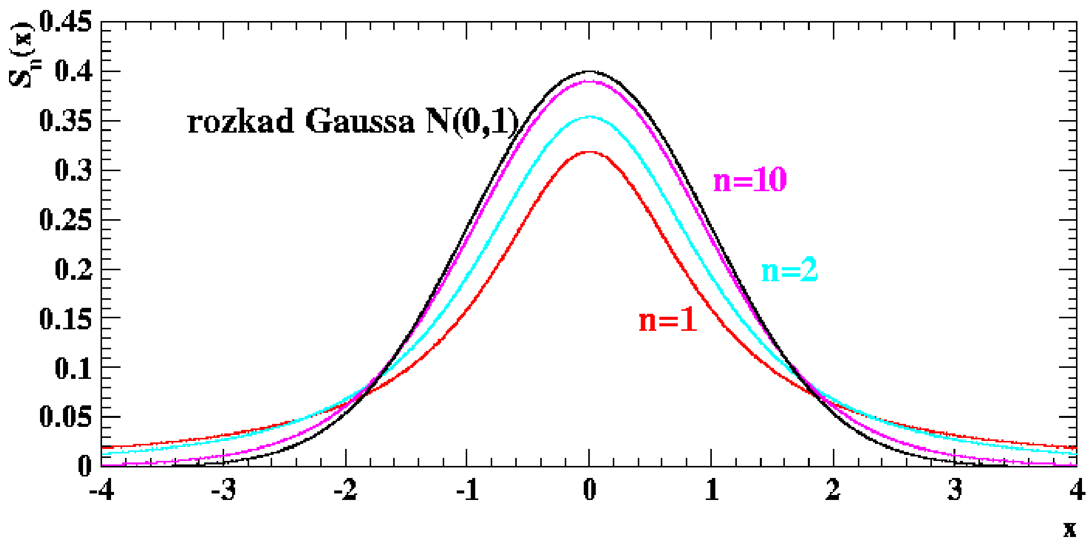
Math Player

Wartość oczekiwana rozkładu Studenta (dla n>1):

$$\mathcal{E}[\mathrm{t}] = \int_{-\infty}^{\infty} t\mathcal{S}_n(t)\,dt = 0$$

Wariancja (dla n>2):

$$\mathcal{V}[\mathrm{t}] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\mathcal{S}_n(t)\,dt = \frac{n}{n-2}$$



Rozkład Studenta

Przykład: Sprawdzamy rzetelność producenta cukru. Ważymy 5 toreb cukru (których waga netto powinna wynosić 1 kg) otrzymując $\bar{x} = 960$ g oraz $s_{\bar{x}} = 10$ g.
Czy producent jest uczciwy w ramach trzech odchyleń standardowych?

Rozkład normalny: $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.9973$

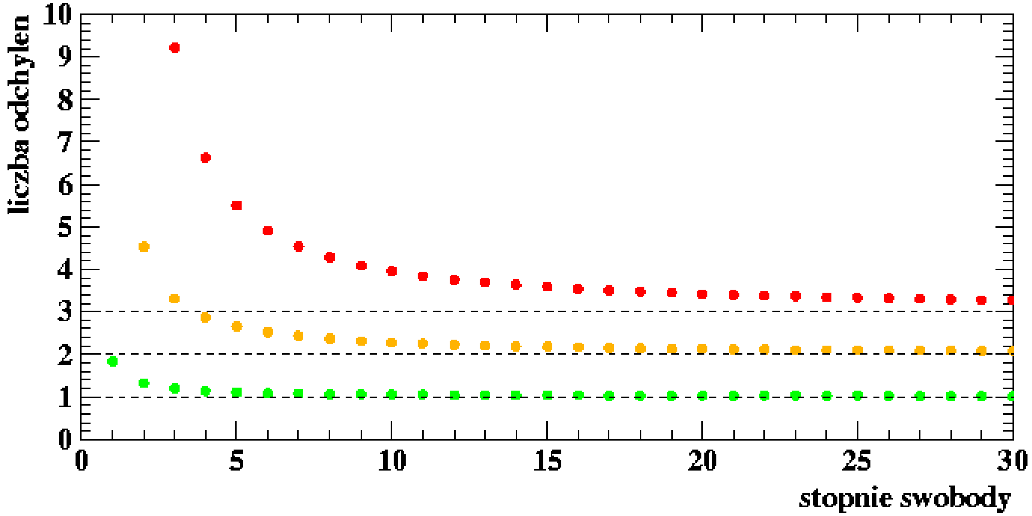
Obliczamy wartość statystyki Studenta: $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{960 - 1000}{10} = -4$

Obliczmy p-two:

$$P(960 \leq \bar{x} \leq 1040) =$$
$$= P(-4 \leq t \leq 4) \cong 0.9839$$

Dla rozkładu Studenta:

$$P(-6.6 \leq t \leq 6.6) =$$
$$P(934 < \bar{x} < 1066) \cong 0.9973$$



Rozkład $\mathcal{F}$ Snedecora-Fishera

Rozważmy dwie zmienne losowe u_1 oraz u_2 każda o rozkładzie χ^2, odpowiednio o n i m stopniach swobody. Konstruujemy statystykę Fishera:

$$\mathrm{F} = \left(\frac{\mathrm{u}_1}{n}\right) \Big/ \left(\frac{\mathrm{u}_2}{m}\right) = \frac{m}{n}\frac{\mathrm{u}_1}{\mathrm{u}_2}$$

Łączna gęstość p-twa zmiennych u_1 oraz u_2 ma postać:

$$h_{n,m}(u_1, u_2) = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (u_1)^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{u_1}{2}\right) \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} (u_2)^{\frac{m}{2}-1} \exp\left(-\frac{u_2}{2}\right)$$

Interesuje nas rozkład zmiennej losowej F:

$$\begin{cases} \mathrm{F} = \dfrac{m}{n}\dfrac{\mathrm{u}_1}{\mathrm{u}_2} \\ \mathrm{v} = \mathrm{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{u}_1 = \dfrac{n}{m}\mathrm{F}\mathrm{v} \\ \mathrm{u}_2 = \mathrm{v} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial F} & \dfrac{\partial u_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial F} & \dfrac{\partial u_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{n}{m}v & \dfrac{n}{m}F \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n}{m}v$$

$$g_{n,m}(F, v) = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+m} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{n}{m} \left(\frac{n}{m}F\right)^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{1}{2}(n+m)-1} \exp\left(-\frac{v}{2}\left(\frac{n}{m}F + 1\right)\right)$$

Rozkład $\mathcal{F}$ Snedecora-Fishera

Rozkład brzegowy zmiennej F nazywamy rozkładem $\mathcal{F}$ - Fishera o (n,m) stopniach swobody:

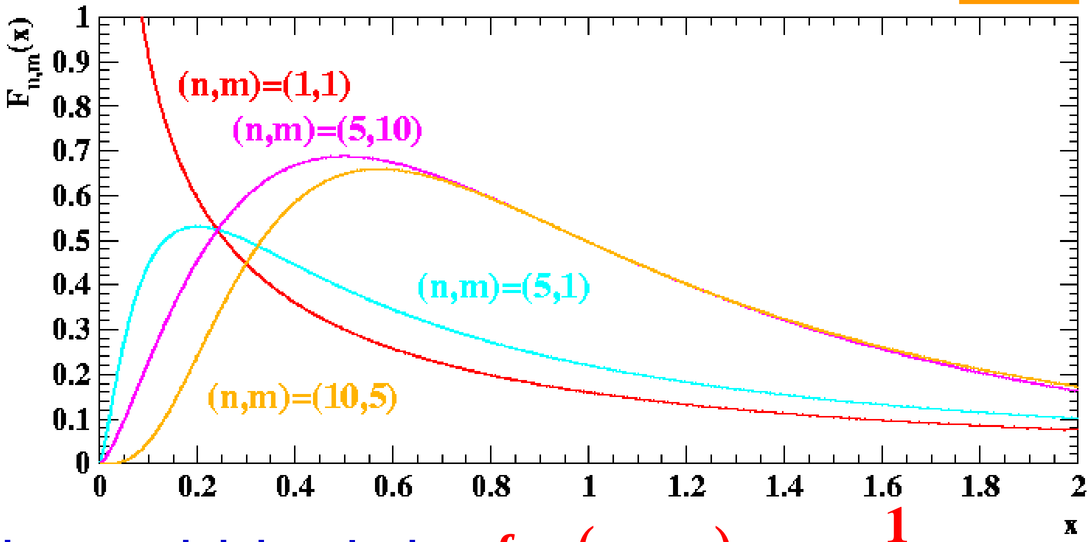
$$\mathcal{F}_{n,m}(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+m)\right)n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}F^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(m+nF)^{\frac{1}{2}(n+m)}},\qquad n,m>0,\quad F\geq 0$$

Wartość oczekiwana (dla m>2): $\mathcal{E}[\mathrm{F}]=\dfrac{m}{m-2}$

Wariancja (dla m>4):

$$\mathcal{V}[\mathrm{F}]=\frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$$

Math Player



Zachowania graniczne:

n=1: rozkład $S_m(t)$

$m\to\infty$: rozkład $\chi_n(nF)$

$n\to\infty$ i $m\to\infty$: r. Gaussa

<u>Uwaga:</u> Kwantyle rozkładu $\mathcal{F}$ - Fishera spełniają relację $f_{1-\alpha}(n_2,n_1)=\dfrac{1}{f_\alpha(n_1,n_2)}$

Rozkład $\mathcal{F}$ Snedecora-Fishera

Przykład: Porównanie odchyleń standardowych. Konstruujemy dwie statystyki u_x oraz u_y podlegające rozkładowi χ^2 o $n-1$ i $m-1$ st. swobody:

$$\mathbf{u}_x = \frac{n-1}{\sigma_x^2}\mathbf{s}_x^2 = \frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})^2 \qquad \mathbf{u}_y = \frac{m-1}{\sigma_y^2}\mathbf{s}_y^2 = \frac{1}{\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})^2$$

Z wielkości tych możemy zbudować zmienną F Fishera:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{u}_x}{n-1}\right)\Big/\left(\frac{\mathbf{u}_y}{m-1}\right) = \left(\frac{\frac{n-1}{\sigma_x^2}\mathbf{s}_x^2}{n-1}\right)\Big/\left(\frac{\frac{m-1}{\sigma_y^2}\mathbf{s}_y^2}{m-1}\right) = \frac{\mathbf{s}_x^2/\sigma_x^2}{\mathbf{s}_y^2/\sigma_y^2}$$

Zmienna ta podlega rozkładowi $\mathcal{F}$ - Fishera o $(n-1, m-1)$ stopniach swobody i dostarcza narzędzia do testowania hipotez o równości wariancji w dwu próbach prostych wylosowanych z rozkładu normalnego.

Rozkład $\mathcal{F}$ Snedecora-Fishera

<u>Przykład:</u> Zakładając, że s_x^2 i s_y^2 są estymatorami wariancji obliczonymi z próbek n_1=10 i n_2=8 elementowych pobranych z rozkładów takich, że $\sigma_x^2 = 3\sigma_y^2$, znajdź wartości a i b dla których zachodzi

$$P\left(a \le \frac{s_x^2}{s_y^2} \le b\right) = 0.90$$

Wiemy, ze zmienna losowa:

$$\frac{s_x^2/\sigma_x^2}{s_y^2/\sigma_y^2} = \frac{s_x^2/3\sigma_y^2}{s_y^2/\sigma_y^2} = \frac{s_x^2}{3s_y^2}$$

ma rozkład $\mathcal{F}$-Fishera o n_1–1=9 i n_2–1=7 stopniach swobody, a więc:

$$0.90 = P\left(f_{0.05}(9,7) \le \frac{s_x^2}{3s_y^2} \le f_{0.95}(9,7)\right) = P\left(\frac{1}{f_{0.95}(7,9)} \le \frac{s_x^2}{3s_y^2} \le f_{0.95}(9,7)\right)$$

Z tablic odczytujemy: $f_{0.95}(7,9) = 3.29$ oraz $f_{0.95}(9,7) = 3.68$

Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$0.90 = P\left(\frac{1}{3.29} \le \frac{s_x^2}{3s_y^2} \le 3.68\right) = P\left(0.912 \le \frac{s_x^2}{s_y^2} \le 11.04\right)$$

Pojęcie przedziału ufności

<u>Przykład:</u> Rozważmy pewien rzadki proces (tzn. taki którego liczba zajść podlega rozkładowi Poissona). W ciągu pewnego czasu zaobserwowano k=3 takie zdarzenia. Ocenić możliwy przedział liczby zdarzeń tego typu w kolejnych eksperymentach.

$$\mathcal{P}_{\mathrm{k}}(\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \qquad \mathcal{E}[\mathrm{k}] = \mu \qquad \mathcal{V}[\mathrm{k}] = \mu$$

Oszacujmy p-twa zajścia obserwowanego zdarzenia, przy różnych wartościach μ:

$$\mathrm{P}\left(k \le 3; \mu = 5\right) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \cong 0.265 \qquad \mathrm{P}\left(k \le 3; \mu = 8\right) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \cong 0.042$$

$$\mathrm{P}\left(k \ge 3; \mu = 1\right) = 1 - \mathrm{P}\left(k < 3; \mu = 1\right) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \cong 0.080$$

Ustalmy p-two zajścia rozważanego zdarzenia było 95%:

$$\mathrm{P}\left(k \le 3; \mu_+\right) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\mu_+^k}{k!} e^{-\mu_+} = 0.025 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_+ \cong 8.8$$

$$\mathrm{P}\left(k \ge 3; \mu_-\right) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\mu_-^k}{k!} e^{-\mu_-} = 0.025 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_- \cong 0.62$$

Przedział ufności na poziomie ufności 95% dla parametru μ, oparty na obserwowanej wartości k=3 to (0.62, 8.8).

Uwaga: Dla k=30 dostaniemy na tym samym poziomie ufności przedział (21.1, 42.8)

Pojęcie przedziału ufności

Przedział ufności ($\theta\_$, θ_+) na poziomie ufności $(1-\alpha)\cdot 100\%$ dla parametru θ wyznaczony jest przez dwa kwantyle: rzędu α_1 i $1-\alpha_2$, ($\alpha_1+\alpha_2=\alpha$):

$$\mathbf{P}(\mathbf{x} \le x;\theta_+) = \int_{-\infty}^{x} f(x;\theta_+)dx = \mathbf{F}(x;\theta_+) = \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_+ = \mathbf{F}^{-1}(x;\alpha_1)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x} \ge x;\theta\_) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(x;\theta\_)dx = 1 - \mathbf{F}(x;\theta\_) = \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \theta\_ = \mathbf{F}^{-1}(x;1-\alpha_2)$$

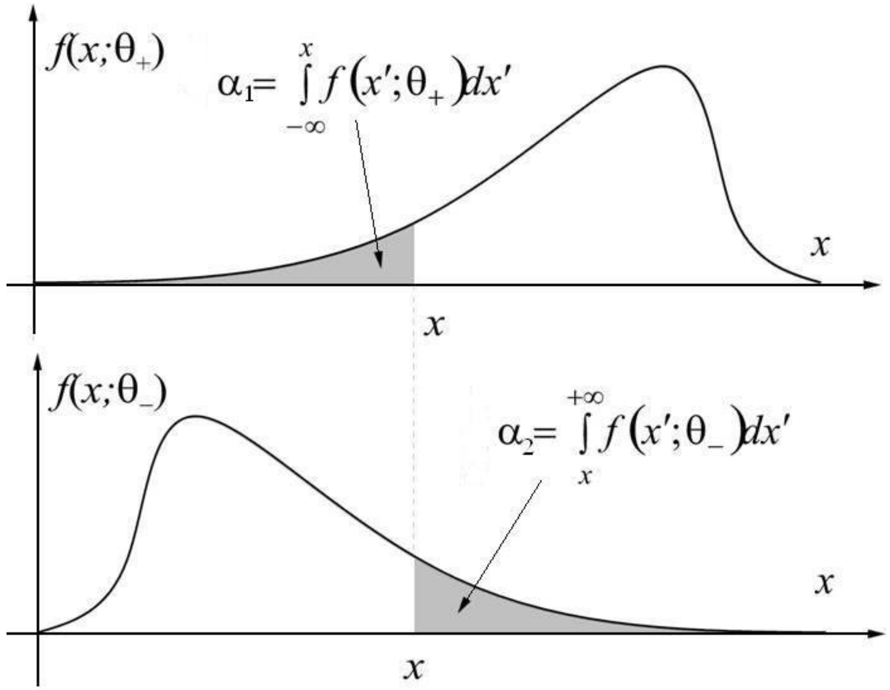
Wartości α_1 i α_2 dobieramy tak aby:

- $\theta_+ - \theta\_$ była minimalna,
- $\theta\_ / \theta_+$ był najbliższy jedności,

W przypadku gdy $\alpha_1 = \alpha_2 = ½\,\alpha$ wtedy przedział ufności nazywamy centralnym.

P-two pokrycia parametru θ przez przedział ($\theta\_$, θ_+) jest równe $1-\alpha$:

$$\mathbf{P}(\theta_1(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n) < \theta < \theta_2(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)) = 1-\alpha$$



Losowy charakter przedziału ufności

<u>Przykład:</u> Rozważmy rozkład Breita-Wignera:

$$S(x;\mu,\Gamma) = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2}\Gamma}{\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 + (x-\mu)^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad -\infty < \mu < \infty, \qquad \Gamma > 0.$$

Dla Γ=2 mamy: $$S(x;\mu,\Gamma=2) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\mu)^2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x-\mu) + \frac{\pi}{2}\right)$$

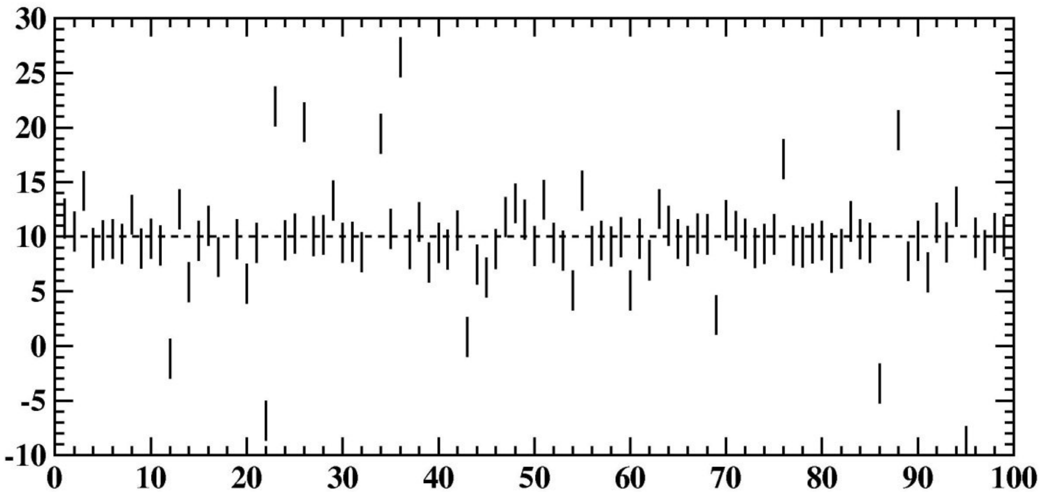
Do wygenerowania przypadków z r. B-W stosujemy metodę odwracania dystrybuanty:

$$x_i = \mu + \tan\left(\pi\left(y_i - \frac{1}{2}\right)\right)$$

gdzie y_i to wielkości wygenerowane z rozkładu płaskiego [0,1].

Dla każdej x_i znajdujemy przedział ufności dla parametru μ:

$$\mu_\pm^{(i)} = x_i \pm \tan\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)$$



μ = 10, $1-\alpha$ = 68%

Pasmo ufności

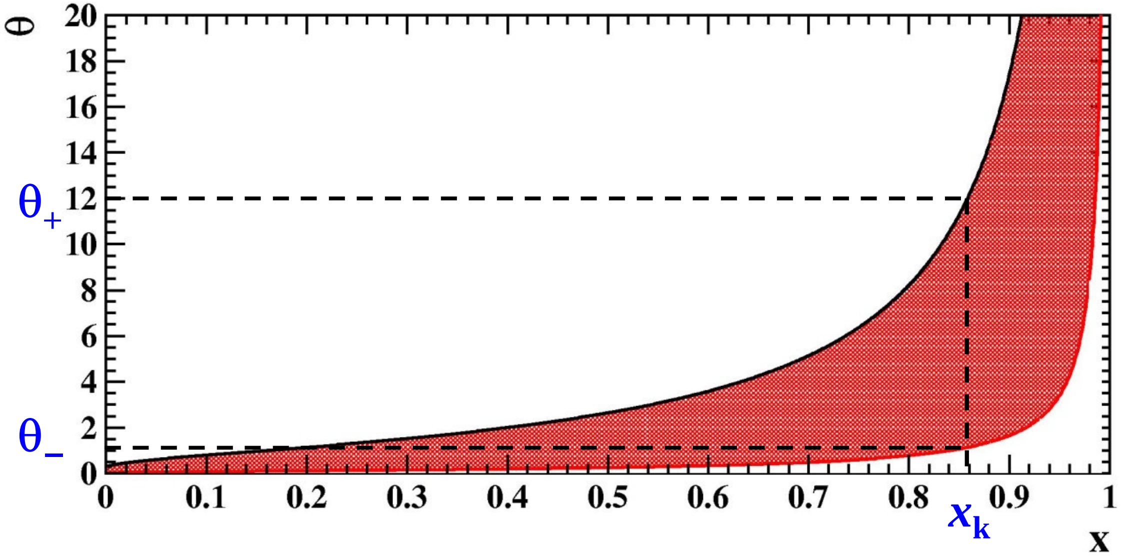
Rozważmy rozkład potęgowy, którego funkcja gęstości zależy od parametru θ:

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} \qquad 0 \le x \le 1 \qquad \theta > 0$$

Dla ustalonego θ znajdujemy:

$$\frac{1}{2}\alpha = F(x_+;\theta) = \theta\int_0^{x_+} x^{\theta-1}dx = x_+^\theta \qquad \Rightarrow \qquad x_+ = \sqrt[\theta]{\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 1 - F(x_-;\theta) = \theta\int_{x_-}^{1} x^{\theta-1}dx = 1 - x_-^\theta \qquad \Rightarrow \qquad x_- = \sqrt[\theta]{1-\frac{1}{2}\alpha}$$



Pasmo ufności pozwala odczytać przedział ufności dla parametru θ dla dowolnej wartości zmiennej x otrzymanej z pomiaru.