Rachunek prawdopodo-bieństwa i statystyka

Wykład 12

Pojęcie przedziału ufności

Przykład: Rozważmy pewien rzadki proces (tzn. taki którego liczba zajść podlega rozkładowi Poissona). W ciągu pewnego czasu zaobserwowano k=3 takie zdarzenia. Ocenić możliwy przedział liczby zdarzeń tego typu w kolejnych eksperymentach.

$$\mathcal{P}_k(\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \qquad \mathcal{E}[k] = \mu \qquad \mathcal{V}[k] = \mu$$

Oszacujmy p-twa zajścia obserwowanego zdarzenia, przy różnych wartościach μ:

$$P(k \le 3; \mu = 5) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \cong 0.265 \qquad P(k \le 3; \mu = 8) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \cong 0.042$$

$$P(k \ge 3; \mu = 1) = 1 - P(k < 3; \mu = 1) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \cong 0.080$$

Ustalmy p-two zajścia rozważanego zdarzenia było 95%:

$$P(k \le 3; \mu_+) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\mu_+^k}{k!} e^{-\mu_+} = 0.025 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_+ \cong 8.8$$

$$P(k \ge 3; \mu_-) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\mu_-^k}{k!} e^{-\mu_-} = 0.025 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_- \cong 0.62$$

Przedział ufności na poziomie ufności 95% dla parametru μ, oparty na obserwowanej wartości k=3 to (0.62, 8.8).

Uwaga: Dla k=30 dostaniemy na tym samym poziomie ufności przedział (21.1, 42.8)

Pojęcie przedziału ufności

Przedział ufności ($\theta\_$, θ_+) na poziomie ufności $(1-\alpha)\cdot 100\%$ dla parametru θ wyznaczony jest przez dwa kwantyle: rzędu α_1 i $1-\alpha_2$, ($\alpha_1+\alpha_2=\alpha$):

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{x}\le x;\theta_+\right)=\int_{-\infty}^{x} f\left(x;\theta_+\right)dx=\mathbf{F}\left(x;\theta_+\right)=\alpha_1 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_+=\mathbf{F}^{-1}\left(x;\alpha_1\right)$$

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{x}\ge x;\theta\_\right)=1-\int_{-\infty}^{x} f\left(x;\theta\_\right)dx=1-\mathbf{F}\left(x;\theta\_\right)=\alpha_2 \qquad \Rightarrow \qquad \theta\_=\mathbf{F}^{-1}\left(x;1-\alpha_2\right)$$

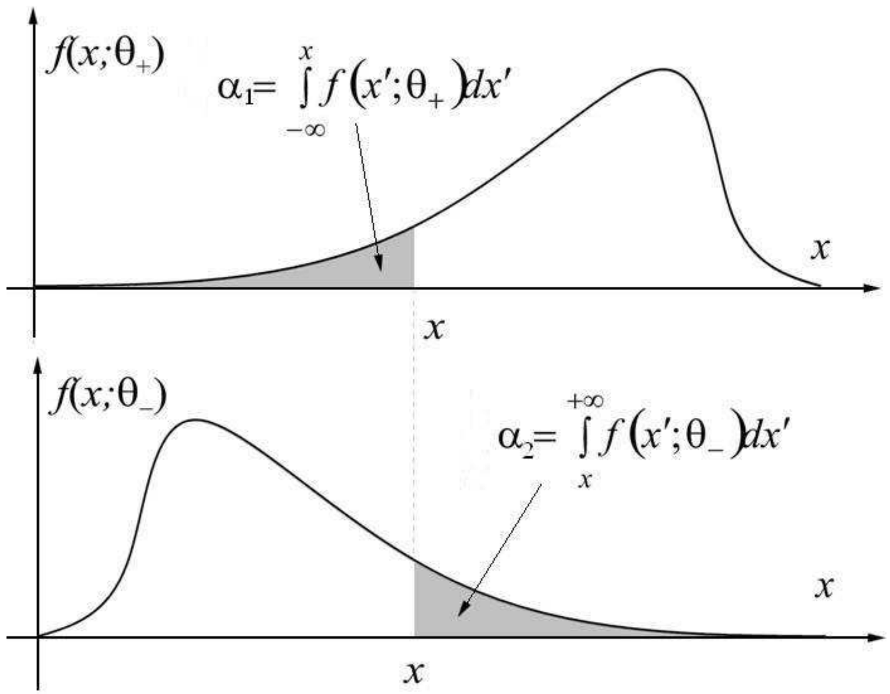
Wartości α_1 i α_2 dobieramy tak aby:

- **$\theta_+-\theta\_$ była minimalna,**
- **$\theta\_/\theta_+$ był najbliższy jedności,**

W przypadku gdy $\alpha_1=\alpha_2=½\,\alpha$ wtedy przedział ufności nazywamy centralnym.

P-two pokrycia parametru θ przez przedział ($\theta\_$, θ_+) jest równe $1-\alpha$:

$$\mathbf{P}\left(\theta_1(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)<\theta<\theta_2(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\right)=1-\alpha$$



Losowy charakter przedziału ufności

Przykład: Rozważmy rozkład Breita-Wignera:

$$S(x;\mu,\Gamma)=\frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2}\Gamma}{\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2+(x-\mu)^2},\qquad -\infty<x<\infty,\qquad -\infty<\mu<\infty,\qquad \Gamma>0.$$

Dla Γ=2 mamy: $$S(x;\mu,\Gamma=2)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\mu)^2}\quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan(x-\mu)+\frac{\pi}{2}\right)$$

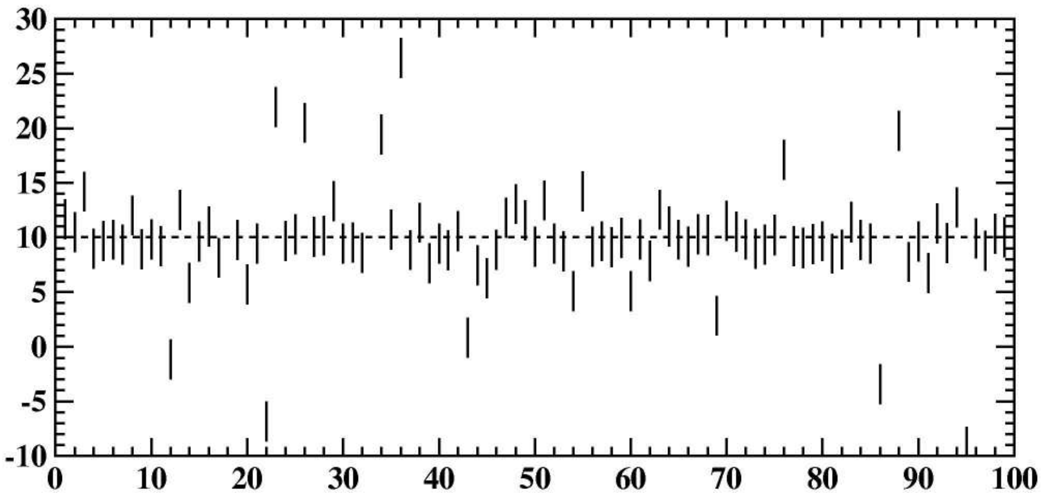
Do wygenerowania przypadków z r. B-W stosujemy metodę odwracania dystrybuanty:

$$x_i=\mu+\tan\left(\pi\left(y_i-\frac{1}{2}\right)\right)$$

gdzie y_i to wielkości wygenerowane z rozkładu płaskiego [0,1].

Dla każdej x_i znajdujemy przedział ufności dla parametru μ:

$$\mu_\pm^{(i)}=x_i\pm\tan\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)$$



μ = 10, $1-\alpha$ = 68%

Pasmo ufności

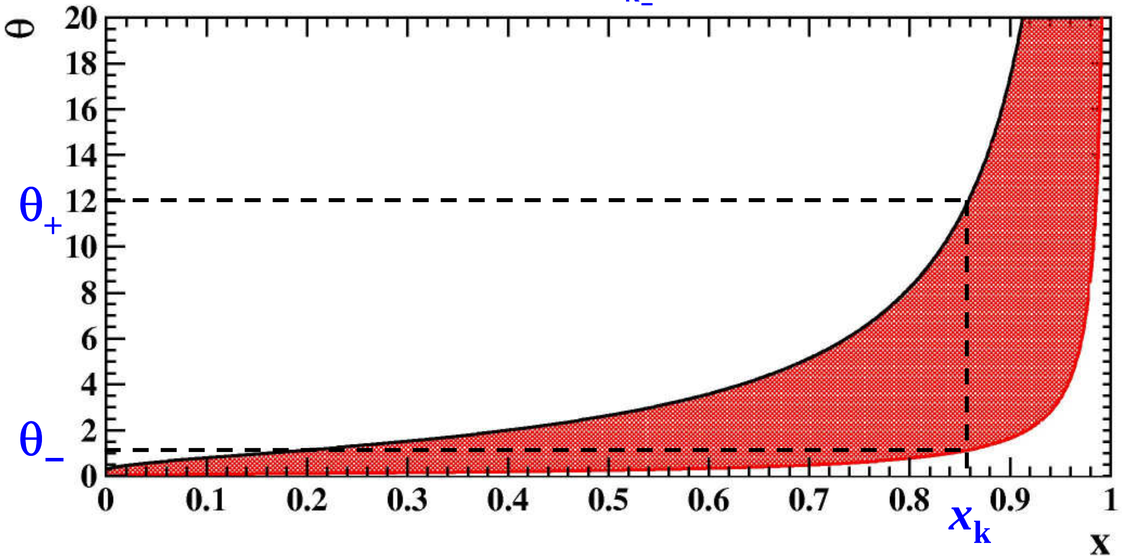
Rozważmy rozkład potęgowy, którego funkcja gęstości zależy od parametru θ:

$$f\left(x;\theta\right) = \theta x^{\theta-1} \qquad 0 \le x \le 1 \qquad \theta > 0$$

Dla ustalonego θ znajdujemy:

$$\frac{1}{2}\alpha = \theta\int_{0}^{x_+} x^{\theta-1}dx = x_+^{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad x_+ = \sqrt[\theta]{\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\frac{1}{2}\alpha = \theta\int_{x_-}^{1} x^{\theta-1}dx = 1 - x_-^{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad x_- = \sqrt[\theta]{1-\frac{1}{2}\alpha}$$



Pasmo ufności pozwala odczytać przedział ufności dla parametru θ dla dowolnej wartości zmiennej x otrzymanej z pomiaru.

P. ufności dla wartości oczekiwanej

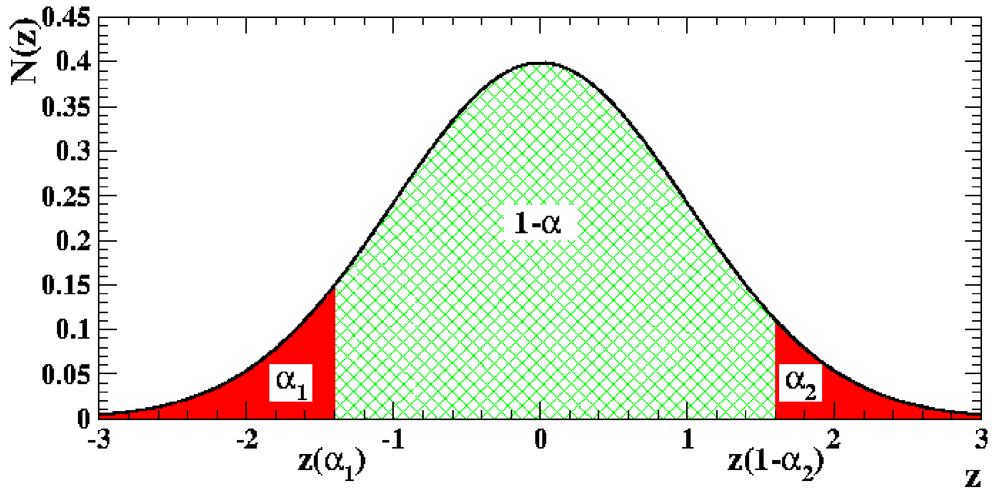
Szukamy przedziału ufności dla nieznanej wartości oczekiwanej μ populacji w której badana cecha ma rozkład normalny $\mathcal{N}(x;\mu,\sigma)$, w przypadku gdy znana jest dyspersja σ, na podstawie n–elementowej próby prostej.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \rightarrow \quad \mathcal{N}\left(\bar{x};\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \mathcal{N}(z;0,1)$$

Dla ustalonego $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ możemy znaleźć takie wartości z_1 i z_2 aby:

$$P(z_1 < z < z_2) = F(z_2) - F(z_1) = 1-\alpha$$



Wystarczy założyć, że $z_1 = z(\alpha_1)$ oraz $z_2 = z(1-\alpha_2)$ są kwantylami rozkładu zmiennej losowej z rzędów, odpowiednio, α_1 oraz $1-\alpha_2$:

$$P\left(z(\alpha_1) < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z(1-\alpha_2)\right) = F\left(z(1-\alpha_2)\right) - F\left(z(\alpha_1)\right) = 1-\alpha_2-\alpha_1 = 1-\alpha$$

P. ufności dla wartości oczekiwanej

Rozwiązując nierówność w nawiasie względem parametru μ dostajemy poszukiwany przedział ufności:

$$\bar{x} - z(1-\alpha_2)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - z(\alpha_1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Przypadki szczególne:

- $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \alpha:\quad z(0) = -\infty,\ z(1-\alpha_2) = z(1-\alpha)$

$$P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z(1-\alpha)\right) = 1-\alpha \qquad \mu > \bar{x} - z(1-\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

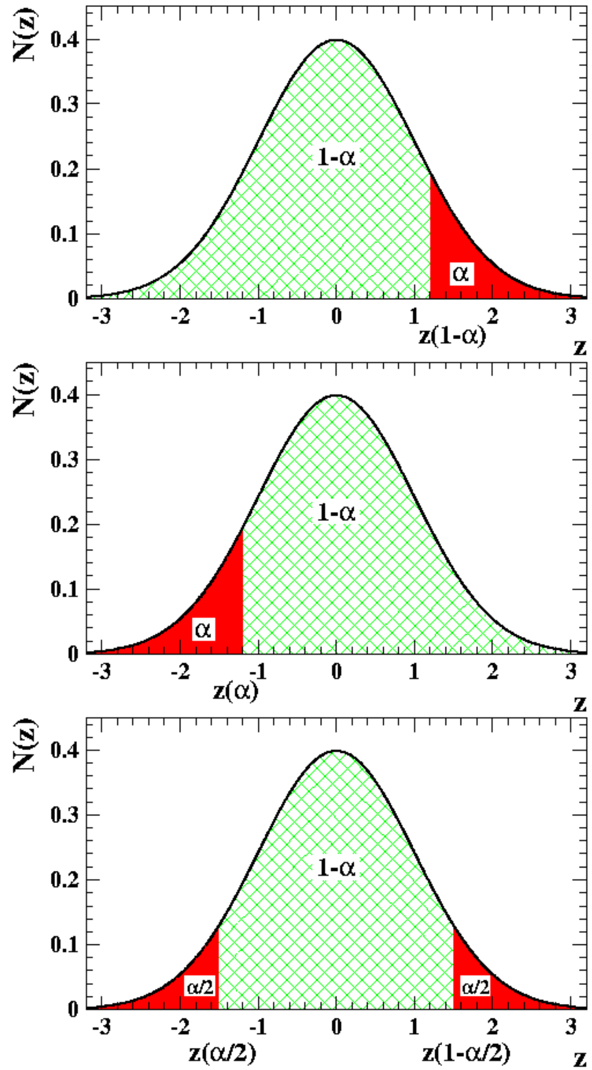
- $\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = 0:\quad z(\alpha_1) = z(\alpha),\ z(1-\alpha_2) = z(1) = +\infty$

$$P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z(\alpha)\right) = 1-\alpha$$

$$\mu < \bar{x} - z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} + z(1-\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\alpha_1 = \alpha_2 = ½\ \alpha:\quad \bar{x} - z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\bar{x} - z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



P. ufności dla parametru μ - przykład

Przykład: W losowo wybranej grupie 10 samochodów pewnej marki przeprowadzono badanie zużycia benzyny na tej samej trasie o długości 100 km. Okazało się, że średnie zużycie benzyny wynosiło 8.1 litra. Skądinąd wiadomo, że badana cecha ma rozkład normalny o dyspersji 0.8 litra. Wyznaczyć 99%-ową realizację przedziału ufności dla wartości przeciętnej zużycia paliwa na danej trasie przez samochody tej marki.

Szukamy przedziału ufności dla wartości oczekiwanej μ w sytuacji gdy znamy dyspersje σ rozkładu normalnego z którego pochodzą pomiary.

$$\mathbf{P}\left(z\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \mathbf{F}\left(z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \mathbf{F}\left(z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$$

$$\bar{x} - z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Wielkości dane: $\bar{x} = 8.1$ $\sigma = 0.8$ $n = 10$ $\alpha = 0.01$

Z tablic odczytujemy: $z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = z(0.995) = 2.58$

Szukany przedział ufności: $\mu \in (7.45, 8.75)$ $\Rightarrow$ Δ=1.3

Przedział ufności dla μ – nieznana σ

Szukamy przedziału ufności dla nieznanej wartości oczekiwanej μ populacji w której badana cecha ma rozkład normalny $\mathcal{N}(x;\mu,\sigma)$, w przypadku nieznanej dyspersji σ, na podstawie n-elementowej próby prostej.

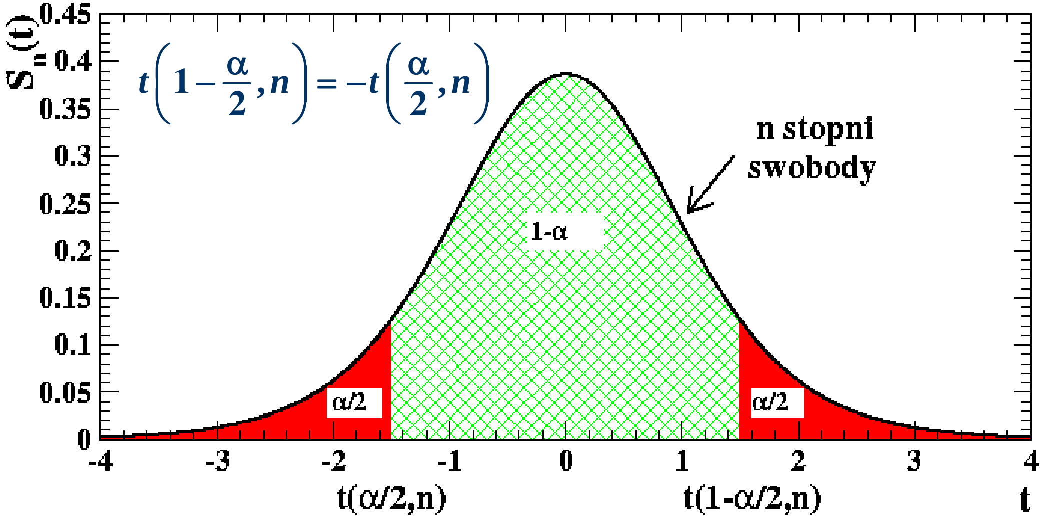
Math Player

Wiemy, że statystyka:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s_x/\sqrt{n}}$$

podlega rozkładowi Studenta o $n-1$ stopniach swobody.

Niech $t(\alpha,n)$ będzie kwantylem rzędu α rozkładu Studenta o n stopniach swobody.



$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s_x/\sqrt{n}}\right| < t\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)\right) = F\left(t\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)\right) - F\left(t\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)\right) = 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$$

$$\bar{x} - t\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2t\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

P. ufności dla parametru μ - przykład

Przykład: W losowo wybranej grupie 10 samochodów pewnej marki przeprowadzono badanie zużycia benzyny na tej samej trasie o długości 100 km. Okazało się, że średnie zużycie benzyny wynosiło 8.1 litra, natomiast odchylenie standardowe wynosiło 0.8 litra. Zakładając, że badana cecha podlega rozkładowi normalnemu, wyznaczyć 99%-ową realizację przedziału ufności dla wartości przeciętnej zużycia paliwa na danej trasie przez samochody tej marki.

Szukamy przedziału ufności dla wartości oczekiwanej μ w sytuacji gdy nie znamy dyspersji σ rozkładu normalnego z którego pochodzą pomiary, a jedynie jej estymatę s_x.

$$\bar{x} - t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Wielkości dane: $\bar{x} = 8.1$ $\quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.8$ $\quad n = 10$ $\quad \alpha = 0.01$

Z tablic odczytujemy: $t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right) = t(0.995, 9) = 3.25$

Szukany przedział ufności: $\mu \in (7.23, 8.97) \Rightarrow \Delta = 1.74$

Przedział ufności dla μ - duża próbka

Załóżmy, że badana cecha populacji ma dowolny rozkład o nieznanych wartości oczekiwanej μ i skończonej wariancji σ^2, oraz że mamy liczną ($n \geq 100$) próbkę losową.

Na podstawie CTG Lindeberga-Levy'ego wiemy, że statystyka $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ma asymptotyczny rozkład normalny $\mathcal{N}(z;\, 0,1)$.

Ze względu na dużą próbkę, nieznaną wartość σ zastępujemy jej estymatą s_x, a szukany przedział ufności ma postać:

$$\bar{x} - z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Przykład: W celu oszacowania czasu absencji chorobowej pracowników pewnego zakładu wybrano losową grupę 100 pracowników i zanotowano liczby dni opuszczonych z powodu choroby w ciągu ostatniego roku. Na tej podstawie znaleźć 95% realizację przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej czasu absencji chorobowej wszystkich pracowników tego zakładu.

Nieobecności [dni]	0	1-3	4-6	7-9	10-15	16-24	25-30
Liczba pracowników	13	37	22	17	8	2	1

Przedział ufności dla μ - duża próbka

Wielkości dane: $n = 100$ $\alpha = 0.05$

Obliczamy: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = 4.875$ $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{7} n_i (x_i - \overline{x})^2} = 4.731$

Ponieważ mamy do czynienia z liczną próbką, więc szukany przedział ufności możemy wyznaczyć na podstawie:

$$\overline{x} - z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Z tablic odczytujemy: $z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = z(0.975) = 1.96$

95%-wa realizacja przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej czasu absencji chorobowej pracowników tego zakładu to $3.95<\mu<5.80$

Gdybyśmy zastosowali rozkład Studenta to otrzymalibyśmy: $t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right) = t(0.975, 99) = 1.98$

$$\overline{x} - t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad 3.94 < \mu < 5.81$$

Przedział ufności dla wariancji

Załóżmy, że badana cecha populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(x;\mu,\sigma)$ o nieznanych parametrach μ i σ, a próbka nie jest liczna (n<50).

Wiemy, że statystyka $\mathbf{u}=\dfrac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2}$ podlega rozkładowi χ^2 o $n-1$ stopniach swobody.

Korzystając z kwantyli rozkładu χ^2 znajdujemy:

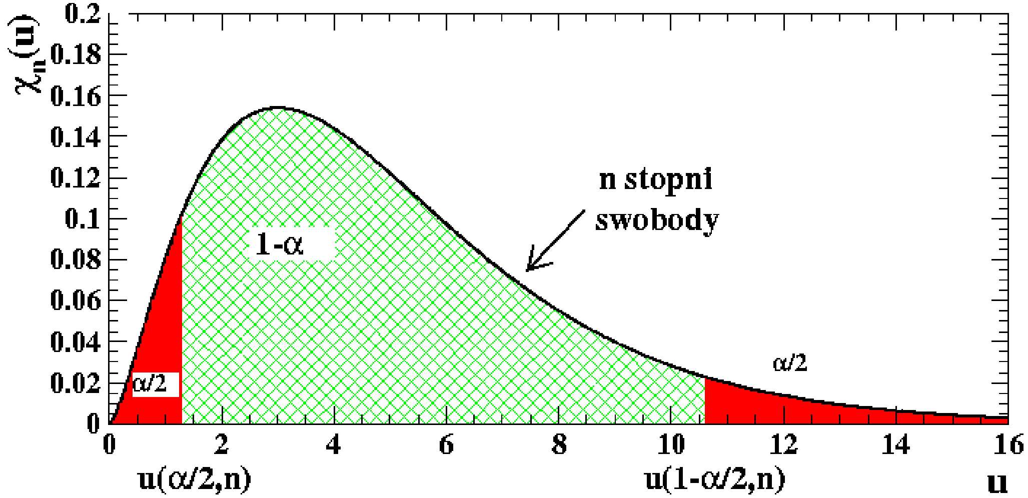
$$P\left(u\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)<\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2}<u\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)\right)=1-\alpha$$

a stąd przedziały ufności dla σ^2:

$$\frac{(n-1)s_x^2}{u\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}<\sigma^2<\frac{(n-1)s_x^2}{u\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}$$

oraz dla odchylenia standardowego σ:

$$\sqrt{\frac{n-1}{u\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}\,s_x<\sigma<\sqrt{\frac{n-1}{u\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}\,s_x$$



Przedział ufności dla wariancji

Przykład: Wykonano pomiary pewnej wielkości uzyskując następujące wyniki: 87, 102, 119, 81, 97, 93, 100, 114, 99, 100, 113, 93, 95, 85, 123, 99. Zakładając, że pomiary tej wielkości podlegają rozkładowi normalnemu, znajdź 90% realizacje przedziałów ufności dla wariancji i odchylenia standardowego.

Wielkości dane: $n = 16$ $\alpha = 0.10$

Obliczamy: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 100$ $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cong 12$

Z tablic odczytujemy: $u\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right) = u(0.05, 15) = 7.261$

$$u\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right) = u(0.95, 15) = 24.996$$

90%-ową realizacją przedziału ufności dla wariancji jest:

$$\frac{15\times 12^2}{24.996} < \sigma^2 < \frac{15\times 12^2}{7.261}$$

A stąd: $86.41 < \sigma^2 < 297.48$ oraz $9.3 < \sigma < 17.2$

P. ufności dla wariancji - duża próbka

Załóżmy, że badana cecha populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(x;\ \mu,\sigma)$ o nieznanych parametrach μ i σ, a próbka jest liczna ($n \geq 50$).

W tym przypadku korzystamy z faktu, że statystyka:

$$\sqrt{2\chi^2} = \sqrt{2\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2}} = \frac{s_x}{\sigma}\sqrt{2(n-1)}$$

ma w przybliżeniu rozkład normalny $\mathcal{N}\left(x; \sqrt{2n-3}, 1\right)$

Przedział ufności dla nieznanego odchylenia standardowego znajdujemy z warunku:

$$P\left(\sqrt{2n-3} - z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{s_x}{\sigma}\sqrt{2(n-1)} < \sqrt{2n-3} + z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

Rozwiązując powyższą nierówność otrzymujemy:

$$\frac{s_x\sqrt{2(n-1)}}{\sqrt{2n-3} + z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} < \sigma < \frac{s_x\sqrt{2(n-1)}}{\sqrt{2n-3} - z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Obszar ufności dla parametrów μ i σ

Załóżmy, że badana cecha populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(x;\,\mu,\sigma)$ o nieznanych parametrach μ i σ. Chcemy przeprowadzić jednoczesną estymację przedziałową obu parametrów.

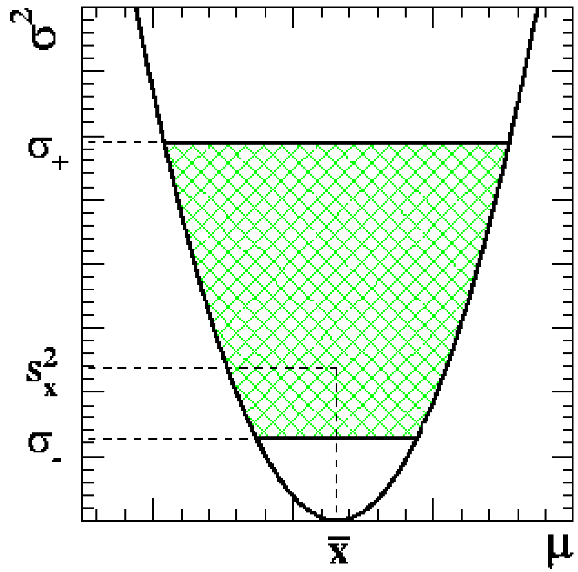
$$P\left(z_- \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_+,\, u_- \le \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2} \le u_+\right) = P\left(z_- \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_+\right) P\left(u_- \le \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2} \le u_+\right) = 1-\alpha$$

$$u_- = u\left(\frac{\alpha}{4}, n-1\right) \qquad u_+ = u\left(1-\frac{\alpha}{4}, n-1\right)$$

$$z \equiv z_+ = z\left(1-\frac{\alpha}{4}\right) = -z\left(\frac{\alpha}{4}\right) = -z_-$$

$$P\left(z_- \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_+\right) = \sqrt{1-\alpha} \cong 1-\frac{\alpha}{2}$$

$$P\left(u_- \le \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2} \le u_+\right) = \sqrt{1-\alpha} \cong 1-\frac{\alpha}{2}$$



$$\sigma_\pm^2 = \frac{(n-1)s_x^2}{u_\mp} \qquad \text{oraz} \qquad \left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 \ge \frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{z^2}$$

Obszar ufności dla parametrów μ i σ

<u>Przykład:</u> Zmierzono średnice 51 drzew wybranych losowo z lasu sosnowego i otrzymano średnią średnicę 37.3 cm oraz wariancję 13.77 cm^2. Zakładając, że średnice drzew mają rozkład normalny, wyznaczyć 90%-ową realizację zbioru ufności dla wartości przeciętnej i wariancji średnicy drzewa z tego lasu.

Wielkości dane: $n = 51 \quad \alpha = 0.10$

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 37.3 \ \ \mathrm{cm} \qquad \mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \overline{\mathrm{x}})^2 = 13.77 \ \ \mathrm{cm}^2$$

Wyznaczamy wartości odpowiednich kwantyli:

$$u_- = u\left(\frac{\alpha}{4}, n-1\right) = u(0.025, 50) = 32.357 \qquad z = z\left(1-\frac{\alpha}{4}\right) = z(0.975) = 1.96$$

$$u_+ = u\left(1-\frac{\alpha}{4}, n-1\right) = u(0.975, 50) = 71.420$$

90%-owa realizacja zbioru ufności dla wartości przeciętnej i wariancji średnicy drzewa dana jest przez:

$$\sigma^2 \geq \frac{n(\overline{\mathrm{x}}-\mu)^2}{z^2} = 13.28 \times (37.3-\mu)^2$$

$$\sigma_-^2 = \frac{(n-1)\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2}{u_+} = 9.64 \ \ \mathrm{cm}^2 \qquad \sigma_+^2 = \frac{(n-1)\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2}{u_-} = 21.28 \ \ \mathrm{cm}^2$$

Estymacja parametru p rozkładu $\mathcal{B}_k(N,p)$

Przykład: Spośród n = 100 wirów w wannie zaobserwowano k =43 wiry zgodne z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Znajdź przedział ufności na poziomie ufności 95% dla parametru p rozkładu dwumianowego z tych danych.

$$P\left(k \le 43; p_+, n = 100\right) = \sum_{k=0}^{43} \binom{100}{k} p_+^k \left(1 - p_+\right)^{100-k} = 0.025 \quad \Rightarrow \quad p_+ \simeq 0.533$$

$$P\left(k \ge 43; p_-, n = 100\right) = \sum_{k=43}^{100} \binom{100}{k} p_-^k \left(1 - p_-\right)^{100-k} = 0.025 \quad \Rightarrow \quad p_- \simeq 0.332$$

A więc przedział ufności dla parametru p na poziomie ufności $1-\alpha$ = 95% dany jest przez (0.332, 0.553) i obejmuje p=0.5, co oznacza, że żaden kierunek wiru nie jest uprzywilejowany.

Estymacja parametru p rozkładu $\mathcal{B}_k(N,p)$

Chcemy znaleźć przedział ufności na poziomie $1-\alpha$ dla parametru p rozkładu dwumianowego $\mathcal{B}_k(N,p)$, przy znanym parametrze N, jeśli próbka danych licząca n liczb jest na tyle duża ($n \geq 100$) że możemy odwołać się do centralnego twierdzenia granicznego ($\mu = Np \quad \sigma = \sqrt{Np(1-p)}$).

$$\mathcal{B}_{k_i}(N,p) = \binom{N}{k_i} p^{k_i}(1-p)^{N-k_i} \qquad k = \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad \bar{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

Stosujemy CTG przybliżając rozkład dwumianowy rozkładem Gaussa:

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\bar{k}-Np}{\sqrt{Np(1-p)}/\sqrt{n}}\right| \leq z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\bar{k}-Np_{\pm}}{\sqrt{Np_{\pm}(1-p_{\pm})}/\sqrt{n}}\right)^2 = z^2$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe względem p:

$$(nN + z^2)p^2 - (2n\bar{k} + z^2)p + \frac{n}{N}\bar{k}^2 = 0$$

$$\Delta = 4n^2\bar{k}^2 + 4nz^2\bar{k} + z^4 - 4n^2\bar{k}^2 - 4z^2\frac{n}{N}\bar{k}^2 = 4z^2\left[n\bar{k}\left(1-\frac{\bar{k}}{N}\right) + \frac{z^2}{4}\right]$$

Estymacja parametru p rozkładu $\mathcal{B}_k(N,p)$

Poszukiwany przedział ufności na poziomie $1-\alpha$ dany jest przez:

$$p_\pm = \frac{2n\bar{k} + z^2 \pm 2z\sqrt{n\bar{k}\left(1-\bar{k}/N\right)+z^2/4}}{2(nN+z^2)} =$$

$$= \left(1+\frac{z^2}{nN}\right)^{-1}\left(\frac{\bar{k}}{N}+\frac{z^2}{2nN} \pm z\sqrt{\frac{1}{nN}\frac{\bar{k}}{N}\left(1-\frac{\bar{k}}{N}\right)+\frac{z^2}{4(nN)^2}}\right) \cong$$

$$\cong \left\| z^2 \ll nN \right\| \cong \frac{\bar{k}}{N} \pm z\sqrt{\frac{1}{nN}\frac{\bar{k}}{N}\left(1-\frac{\bar{k}}{N}\right)}$$

Przykład: Wśród 350 wybranych losowo wyrobów znaleziono 31 wyrobów wadliwych. Wykorzystując wynik badania kontrolnego podać 95%-ową realizację przedziału ufności dla frakcji wyrobów dobrych w całej partii wyprodukowanych wyrobów.

$n = 1 \qquad N = 350 \qquad k = 350 - 31 = 319$

$\alpha = 0.05 \qquad z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = z(0.975) = 1.96 \qquad p_- \cong 0.88 \qquad p_+ \cong 0.94$