

Rachunek prawdopodobo- bieństwa i statystyka

Wykład 13

Hipotezy statystyczne

Hipotezą statystyczną nazywamy każde przypuszczenie dotyczące nieznanego rozkładu badanej cechy populacji, o którego prawdziwości lub fałszywości wnioskuje się na podstawie pobranej próbki losowej.

Hipotezy parametryczne dotyczą wyłącznie wartości parametrów.

Przykład: Wiadomo, że badana cecha x ma rozkład wykładniczy o nieznannej wartości oczekiwanej. Wysuwamy hipotezę, że $\mathcal{E}[x]=5$.

Hipotezy, które nie są parametryczne nazywamy **nieparametrycznymi**.

Przykład: Niech T oznacza odstęp czasu pomiędzy przejazdami samochodów ulicą. Wysuwamy hipotezę, że T ma rozkład wykładniczy.

Hipotezę parametryczną nazywamy **prostą** jeśli precyzuje dokładne wartości wszystkich nieznanych parametrów rozkładu badanej cechy.

Przykład: Wiadomo, że badana cecha x ma rozkład $\mathcal{N}(x; \mu=10, \sigma)$.

Wysuwamy hipotezę, że $\sigma=2$.

W przeciwnym wypadku hipotezę parametryczną nazywamy **złożoną**.

Przykład: Cecha x ma rozkład $\mathcal{N}(x; \mu=10, \sigma)$. Wysuwamy hipotezę, że $\sigma \leq 2$.

Hipotezy statystyczne

Testem statystycznym nazywamy metodę postępowania, która każdej możliwej realizacji próby losowej x_1, \dots, x_n , przyporządkowuje, z ustalonym p-twem, decyzję przyjęcia bądź odrzucenia sprawdzanej hipotezy.

Testowaną hipotezę nazywamy **hipotezą zerową H_0** .

Hipotezę, którą jesteśmy skłonni przyjąć, jeśli okaże się, że weryfikowaną hipotezę H_0 należy odrzucić, nazywamy **hipotezą alternatywną H_1** .

Statystyką testową nazywamy taką funkcję próby losowej $\delta(x_1, \dots, x_n)$, która spełnia następujące warunki:

- pozwala na porównanie punktowej estymaty parametru θ na podstawie próby losowej z wartością θ_0 występującą w hipotezie H_0 ,
- jest związana z rozkładem p-twa, który jest znany przy założeniu, że testowana hipoteza H_0 jest prawdziwa.

Zbiorem krytycznym W nazywamy zbiór wartości statystyki testowej $\delta(x_1, \dots, x_n)$, których wystąpienie skłania nas do odrzucenia testowanej hipotezy H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej H_1 .

Błędy I-go i II-go rodzaju

Przykład: Na pewnej drodze istnieje ograniczenie prędkości do 120 km/h. Urządzenie pomiarowe działa w ten sposób, że wykonuje trzy niezależne pomiary x_1 , x_2 i x_3 , a następnie oblicza średnią \bar{x}_3 , której wartość decyduje o tym czy kierowca otrzymuje mandat czy nie. Ile powinna wynosić minimalna wartość \bar{x}_3 powyżej której kierowca otrzymuje mandat, aby tylko 5% kierowców otrzymywało mandat niesłusznie.

Urządzenie pomiarowe jest wykalibrowane w ten sposób, że błąd pomiaru podlega rozkładowi normalnemu $\mathcal{N}(0, \sigma = 2)$, a sam pomiar rozkładowi $\mathcal{N}(\mu, \sigma = 2)$ gdzie μ jest prawdziwą prędkością pojazdu.

Formułujemy problem:

$H_0: \mu=120$ przeciw $H_1: \mu>120$

Statystyka testowa: $\delta = \bar{x}_3$

możliwe wartości δ :

wartości
preferujące H_1

120

Możliwe rodzaje błędów przy podejmowaniu decyzji co do prawdziwości hipotezy H_0 :

Decyzja	Hipoteza H_0	
	jest prawdziwa	jest fałszywa
przyjąć H_0	decyzja poprawna	błąd II-go rodzaju
odrzuć H_0	błąd I-go rodzaju	decyzja poprawna

Błędy I-go i II-go rodzaju

P: (cd) Chcemy aby p-two niesłusznego ukarania kierowcy było co najwyżej równe 5%, tzn. aby p-two popełnienia błędu I-go rodzaju było nie większe niż 5%.

Poziomem istotności α testu nazywamy p-two popełnienia błędu I-go rodzaju.

P: (cd) Dla jakich wartości statystyki testowej $\delta = \bar{x}_3$ powinniśmy na poziomie istotności $\alpha = 5\%$ odrzucić hipotezę $H_0: \mu = 120$ na rzecz hipotezy alternatywnej $H_1: \mu > 120$?

Sprawdźmy co się dzieje dla $\delta > 121$ oraz $\delta > 122$:

$$P(\delta \geq 121) = P\left(\frac{\delta - 120}{2/\sqrt{3}} \geq \frac{121 - 120}{2/\sqrt{3}}\right) = P(z \geq 0.87) = 0.1922 > \alpha = 0.05$$

$$P(\delta \geq 122) = P\left(\frac{\delta - 120}{2/\sqrt{3}} \geq \frac{122 - 120}{2/\sqrt{3}}\right) = P(z \geq 1.73) = 0.0416 < \alpha = 0.05$$

Jaka powinna być więc graniczna wartość c ?

$$P(\delta \geq c) = P\left(z \geq \frac{c - 120}{2/\sqrt{3}}\right) = 0.05 \Rightarrow \frac{c - 120}{2/\sqrt{3}} = z(0.95) = 1.645 \Rightarrow c = 121.9$$

A więc na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ powinniśmy odrzucić hipotezę $H_0: \mu = 120$ na rzecz hipotezy $H_1: \mu > 120$ wtedy gdy wartość statystyki testowej $\delta \in W = \langle 121.9, \infty \rangle$.

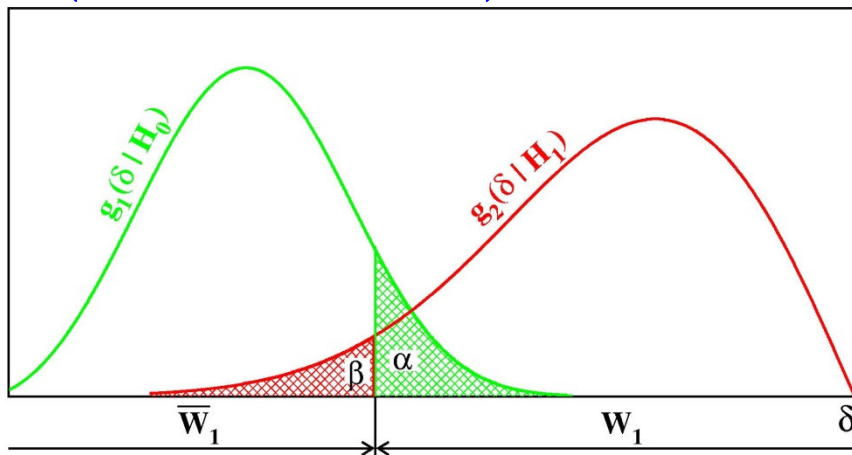
Błędy I-go i II-go rodzaju

P: (cd) Jakie jest p-two nie ukarania kierowcy który przekroczył dozwoloną prędkość?
(czyli popełnienia błędu II-go rodzaju)

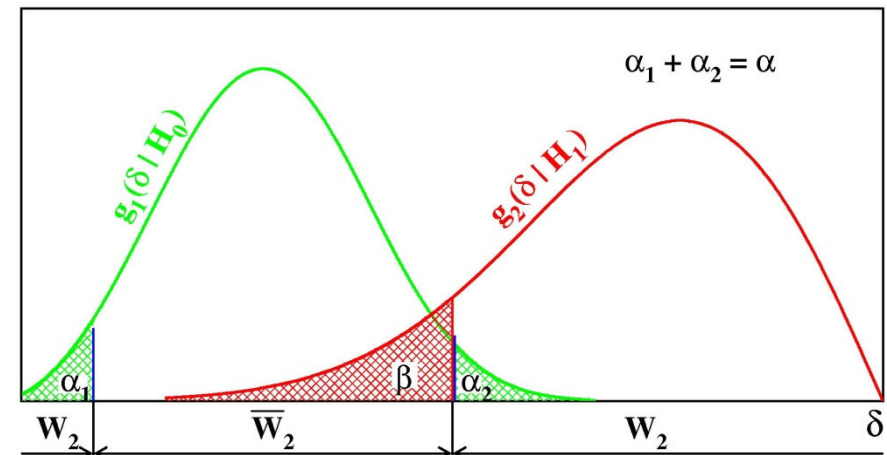
$$P(\delta < 121.9 | \mu = 125) = P\left(\frac{\delta - 125}{2/\sqrt{3}} < \frac{121.9 - 125}{2/\sqrt{3}}\right) = \Phi(-2.68) = 0.0036$$

$$P(\delta < 121.9 | \mu = 123) = P\left(\frac{\delta - 123}{2/\sqrt{3}} < \frac{121.9 - 123}{2/\sqrt{3}}\right) = \Phi(-0.95) = 0.1711$$

$$P(\delta(x_1, \dots, x_n) \in W | H_0) \leq \alpha$$



$$\beta = P(\delta \in \bar{W} | H_1) = 1 - P(\delta \in W | H_1)$$



Testem **najmocniejszym** nazywamy test, który przy ustalonym α , minimalizuje p-two β błędu II-go rodzaju.

Weryfikacja hipotez statystycznych

Schemat postępowania przy testowaniu hipotezy zerowej:

- wybierz hipotezę zerową H_0 i hipotezę alternatywną H_1 ,
- wybierz poziom istotności testu α ,
- wybierz statystykę testową δ oraz zdefiniuj zbiór krytyczny W ,
- oblicz wartość statystyki testowej dla wylosowanej próby prostej,
- sprawdź czy obliczona wartość statystyki testowej należy do zbioru krytycznego i zdecyduj czy przyjąć czy też odrzucić H_0 na rzecz H_1 .

Niech zbiorem krytycznym dla hipotezy $H_0: \theta = \theta_0$ będzie zbiór W :

$$P(\delta(x_1, \dots, x_n) \in W | \theta_0) = \alpha$$

Mocą testu nazywamy funkcję: $M(\theta, W) = P(\delta \in W | \theta)$

Niech $H_1: \theta = \theta_1$, wówczas $M(\theta_1, W) = P(\delta \in W | \theta_1) = 1 - \beta$

Zbiór krytyczny W należy zawsze wybierać tak aby moc testu, dla wszystkich wartości parametru θ ze zbioru hipotez alternatywnych H_1 była możliwie największa.

Moc testu statystycznego

Przykład: Badana cecha ma rozkład $\mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$ o znanej wariancji σ^2 . Weryfikujemy hipotezę $H_0: \mu = \mu_0$ na podstawie $n=25$ elementowej próby losowej, przy wykorzystaniu jako statystyki testowej:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{5(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}$$

Dla poziomu istotności $\alpha=0.05$ wyznaczyć moc testu w przypadku gdy:

a) zbiorem krytycznym jest $W = \langle c, +\infty \rangle$, gdzie $P(z \geq c \mid H_0) = \alpha$

$$M_1(\mu, W) = P(z \geq 1.64 \mid \mu) = P\left(\frac{5(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \geq 1.64 \mid \mu\right) = P\left(\frac{5(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \geq 1.64 + \frac{5(\mu_0 - \mu)}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1.64 + \lambda)$$

b) zbiorem krytycznym jest

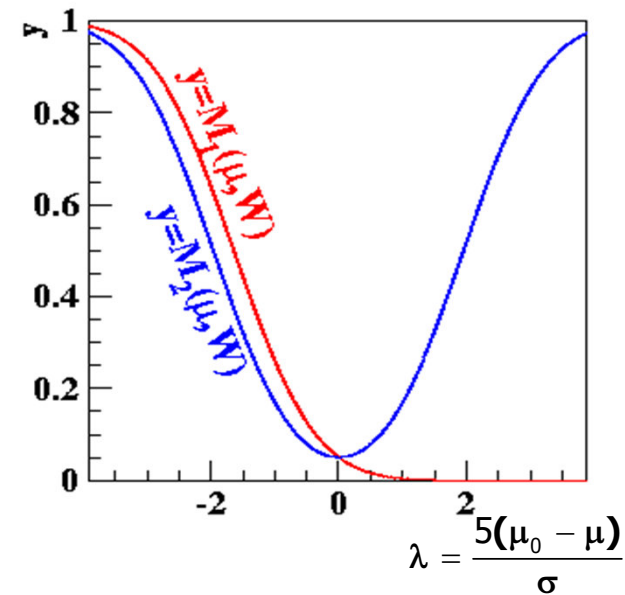
$W = (-\infty, -c_1] \cup \langle c_1, +\infty \rangle$, gdzie $P(|z| \geq c_1 \mid H_0) = \alpha$

$$M_2(\mu, W) = P(|z| \geq 1.96 \mid \mu) = P\left(\frac{5|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \geq 1.96 \mid \mu\right) =$$

$$= 1 - \Phi(\lambda + 1.96) + \Phi(\lambda - 1.96)$$

Wniosek: Gdy $H_1: \mu > \mu_0$ ($\lambda < 0$) to należy wybrać jako zbiór krytyczny $W = \langle c, +\infty \rangle$.

Natomiast gdy $H_1: \mu \neq \mu_0$ to $W = (-\infty, -c_1] \cup \langle c_1, +\infty \rangle$.



Testowanie hipotez a przedziały ufności

Przykład (mandaty): Hipotezę $H_0: \mu = 120$ odrzucamy na rzecz hipotezy $H_1: \mu > 120$, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, gdy:

- $\bar{x}_3 \geq c_{0.05} \equiv 120 + 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\mu_- \equiv \bar{x}_3 - 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \geq 120$
- 120 nie mieści się w jednostronnym przedziale ufności dla parametru μ , na poziomie ufności $1-\alpha = 95\%$

Ogólnie, dla dowolnego testowanego parametru θ , przy $H_0: \theta = \theta_0$, zachodzi:

- odrzucamy H_0 na rzecz $H_1: \theta > \theta_0$ ($H_1: \theta < \theta_0$) poziomie α wtedy i tylko gdy θ_0 nie należy do odpowiedniego jednostronnego przedziału ufności na poziomie ufności $1-\alpha$ dla parametru θ .
- odrzucamy H_0 na rzecz $H_1: \theta \neq \theta_0$ na poziomie α wtedy i tylko gdy θ_0 nie należy do obustronnego przedziału ufności na poziomie ufności $1-\alpha$ dla parametru θ .

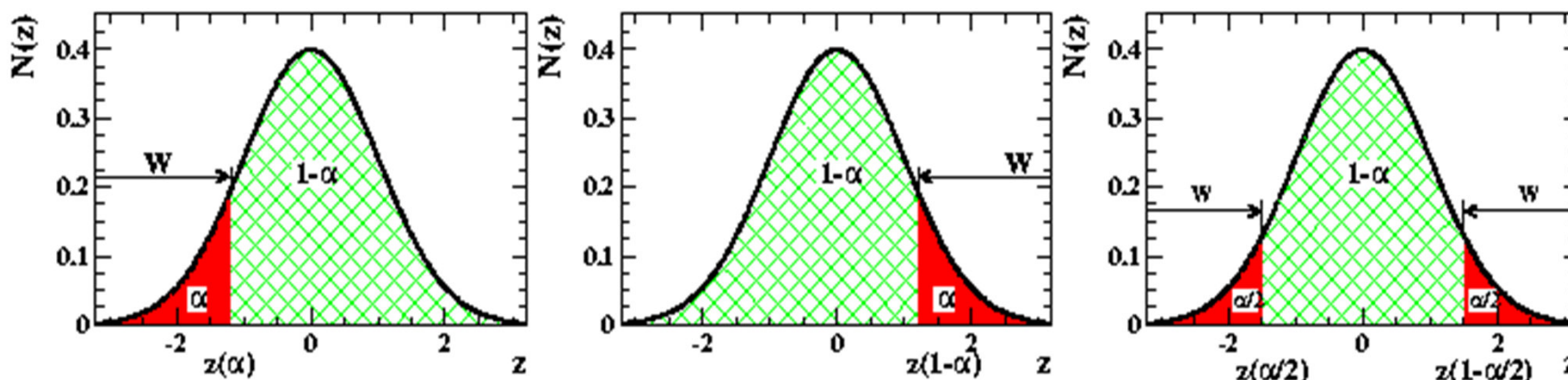
Testy istotności dla wartości oczekiwanej

- ❖ Badana cecha x populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ o znanym σ . Do weryfikacji hipotezy $H_0: \mu = \mu_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.

H. alternatywna	$H_1: \mu = \mu_1 < \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 \neq \mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -z(1-\alpha))$	$\langle z(1-\alpha), \infty$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)) \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty$



Testy istotności dla wartości oczekiwanej

Przykład: Chcemy ocenić czy nowo opracowane baterie pracują „zdecydowanie dłużej” niż baterie używane dotychczas. Wiemy, że czas pracy dotychczas używanych baterii w kalkulatorze ma rozkład normalny o $\mu_0=100.3$ min oraz $\sigma=6.25$ min. Z przeprowadzonych testów nowych baterii wynika, że czas ich pracy podlega również rozkładowi normalnemu o $\sigma=6.25$ min. Na podstawie próbki $n=15$ pomiarów stwierdzono, że średni czas ich pracy wynosi $\bar{x} = 105.6$ min. Sprawdzić na poziomie istotności $\alpha=0.01$ hipotezę $H_0: \mu = \mu_0$ wobec hipotezy alt. $H_1: \mu \neq \mu_0$.

- $H_0: \mu=100.3$ min, $H_1: \mu \neq 100.3$ min
- $\alpha=0.01$, $z(1-\alpha/2)=2.58$
- $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{105.6 - 100.3}{6.25} \sqrt{15} = 3.28$
- $P = P(|z| > z | H_0) = P(|z| > 3.28 | H_0) = 2(1 - \Phi(3.28)) \cong 2(1 - 0.9995) = 0.001$
 $W = (-\infty, -z(1 - \alpha/2)) \cup (z(1 - \alpha/2), +\infty) = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, +\infty)$

Ponieważ $P < \alpha$ ($z \in W$) więc odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1 . Oznacza to, że na poziomie istotności $\alpha=0.01$ jest znacząca różnica pomiędzy średnim czasem życia nowych baterii i dotychczas używanych w kalkulatorach.

Testy istotności dla wartości oczekiwanej

Przykład: Powtarzamy badania nowych baterii. Załóżmy, że zwiększając próbkę do $n=20$ znajdujemy $\bar{x} = 105.0$ min. Zakładając, że czas pracy nowych baterii podlega rozkładowi normalnemu o $\sigma=6.25$ min. przeprowadź na poziomie istotności $\alpha=0.05$ prawostronny test hipotezy $H_0: \mu=100.3$ min.

- $H_0: \mu=100.3$ min, $H_1: \mu>100.3$ min
- $\alpha=0.05$, $z(1-\alpha)=1.645$
- $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{105.0 - 100.3}{6.25} \sqrt{20} = 3.36$
- $P = P(z > z | H_0) = P(z > 3.36 | H_0) = 1 - \Phi(3.36) \cong 1 - 0.9996 = 0.0004$
 $W = \langle z(1-\alpha), +\infty \rangle = \langle 1.645, +\infty \rangle$

Ponieważ $P < \alpha$ ($z \in W$) więc odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1 .

Oznacza to, że na poziomie istotności $\alpha=0.05$ jest znacząca różnica pomiędzy średnim czasem życia nowych baterii i dotychczas używanych w kalkulatorach.

Uwaga: Dla $\alpha=0.01$ mamy $z(1-\alpha)=2.33$ co również prowadzi do odrzucenia hipotezy H_0 na rzecz hipotezy H_1 , tym razem na poziomie istotności $\alpha=0.01$

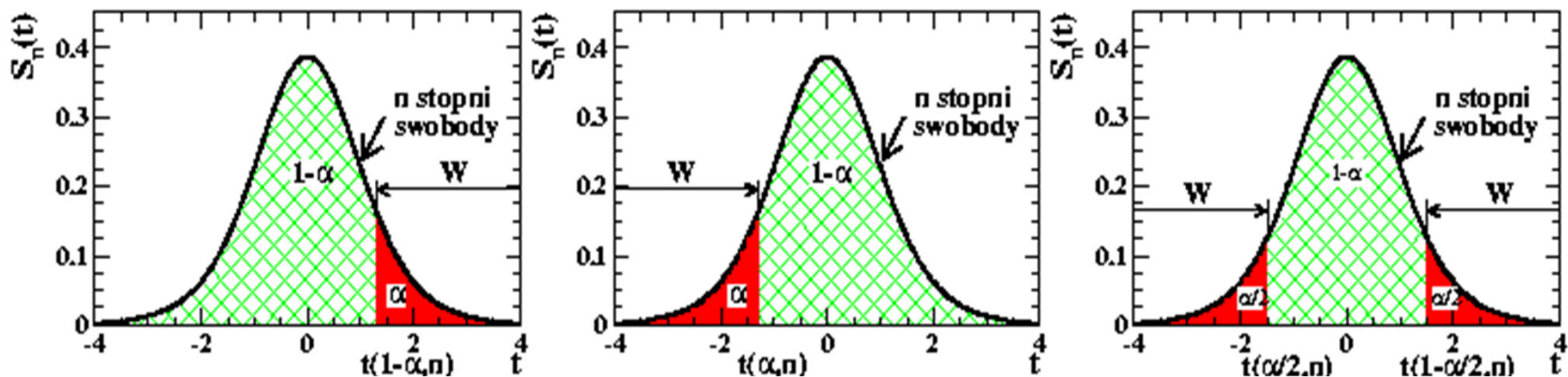
Testy istotności dla wartości oczekiwanej

- ❖ Badana cecha x populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ o nieznanym μ i σ . Do weryfikacji hipotezy $H_0: \mu = \mu_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $S_{n-1}(t)$.

H. alternatywna	$H_1: \mu = \mu_1 < \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 \neq \mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -t(1-\alpha, n-1))$	$(t(1-\alpha, n-1), \infty)$	$(-\infty, -t(1-\alpha/2, n-1)) \cup (t(1-\alpha/2, n-1), \infty)$



Testy istotności dla wartości oczekiwanej

Przykład: Standardowy środek znieczulający zaczyna działać średnio po $\mu=10.5$ min od chwili podania. Producent nowego środka znieczulającego twierdzi, że jego specyfik działa „zdecydowanie szybciej”. Dentysta aplikuje nowy środek $N=10$ pacjentom, mierząc czas (w min) po którym pacjent przestaje odczuwać ból: 9.3, 9.5, 9.2, 9.0, 9.3, 9.5, 9.4, 9.3, 9.2, 9.1. Ponieważ wiadomo, że rozkład czasu po którym zaczynał działać dotychczas stosowany środek jest normalny, więc można przypuszczać, że rozkład ten dla nowego środka też jest normalny. Sprawdzić na poziomie istotności $\alpha=0.01$ czy nowy środek działa szybciej.

- $H_0: \mu=10.5 \text{ min}, \quad H_1: \mu < 10.5 \text{ min}$

- $\alpha=0.01, \quad t(1-\alpha, n-1)=2.821$

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{92.8}{10} = 9.28 \text{ min} \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.1619 \text{ min}$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}} = \frac{9.28 - 10.5}{0.1619} \sqrt{9} = -22.61$$

- $P = P(t < t | H_0) = P(t < -22.61 | H_0) \cong 0$

$$W = (-\infty, -t(1-\alpha, n-1)) = (-\infty, -2.821)$$

Ponieważ $P < \alpha$ ($t \in W$) więc odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1 .

Testy istotności dla wartości oczekiwanej

- ❖ Badana cecha x populacji ma dowolny rozkład o nieznanym wartości oczekiwanej μ i skończonym σ . Duża ($n \geq 100$) próbka. Do weryfikacji hipotezy $H_0: \mu = \mu_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

H. alternatywna	$H_1: \mu = \mu_1 < \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 \neq \mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -z(1-\alpha))$	$\langle z(1-\alpha), \infty \rangle$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)) \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty \rangle$

Przykład: Na podstawie obserwacji przez $n=315$ dni w roku, stwierdzono, że średnie dzienne zużycie wody w fabryce wynosi $\bar{x} = 1029 \text{ m}^3$, a wariancja $s_x^2 = 191 \text{ m}^6$. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ hipotezę $H_0: \mu = 1000 \text{ m}^3$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1: \mu > 1000 \text{ m}^3$.

$$\alpha = 0.01, \quad z(1-\alpha) = 2.33, \quad W = \langle z(1-\alpha), \infty \rangle = \langle 2.33, \infty \rangle$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}} = \frac{1029 - 1000}{\sqrt{191}} \sqrt{315} = 37.24$$

Ponieważ $z \in W$ więc odrzucamy na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1 .

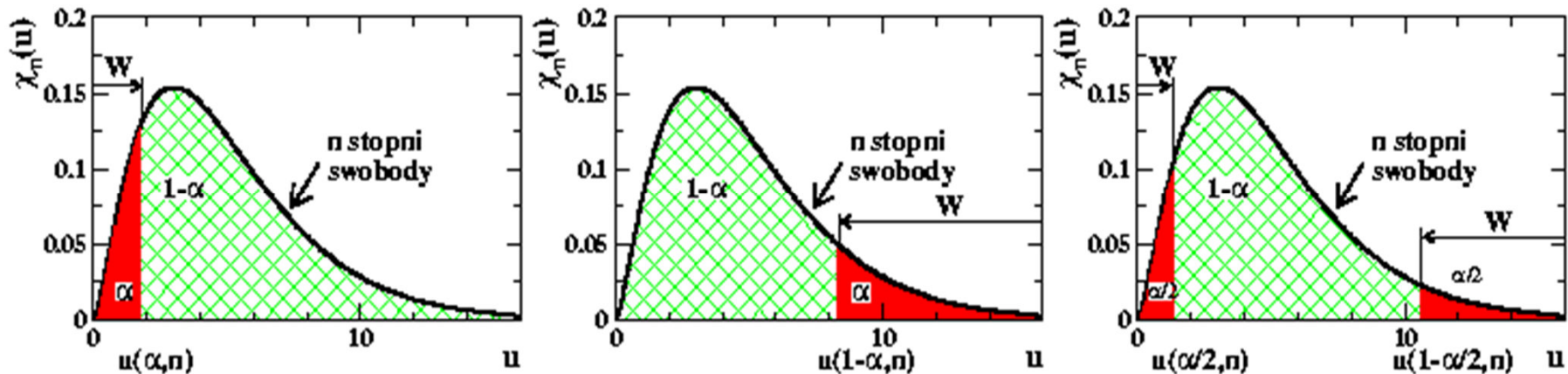
Testy istotności dla wariancji

- ❖ Badana cecha x populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ o nieznanym μ i σ . Do weryfikacji hipotezy $H_0: \sigma = \sigma_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$u = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\chi^2_{n-1}(u)$.

H. alternatywna	$H_1: \sigma = \sigma_1 < \sigma_0$	$H_1: \sigma = \sigma_1 > \sigma_0$	$H_1: \sigma = \sigma_1 \neq \sigma_0$
Zbiór krytyczny	$(0, u(\alpha, n-1))$	$\langle u(1-\alpha, n-1), \infty \rangle$	$(0, u(\alpha/2, n-1)) \cup \langle u(1-\alpha/2, n-1), \infty \rangle$



Testy istotności dla wariancji

Przykład: Producent twierdzi, że pojemnik zawierający 355 ml soli dietetycznej zawiera jedynie 35 mg sodu. Aby zagwarantować te dane, w procesie produkcyjnym utrzymywane są warunki, takie aby zawartość sodu w soli miała rozkład normalny o $\mu=34.5$ mg oraz $\sigma=0.24$ mg. W procesie kontroli losuje się $n=10$ pojemników i sprawdza, na poziomie istotności $\alpha=0.05$, czy odchylenie standardowe jest większe niż 0.24 mg. Jeśli tak to proces produkcyjny jest zatrzymywany i odpowiednie poprawki są wprowadzane. W jednym z testów uzyskano $s_x=0.29$ mg. Czy proces produkcyjny powinien zostać zatrzymany?

- $H_0: \sigma=0.24$ mg, $H_1: \sigma>0.24$ mg
- $\alpha=0.05$, $n=10$, $u(1-\alpha, n-1) = u(0.95, 9) = 16.92$
- $u = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1) \times 0.29^2}{0.24^2} = 13.14$
- $P = P(u > u | H_0) = P(u > 13.14 | H_0) = 0.156$ $W = \langle u(1-\alpha, n-1), +\infty \rangle = \langle 16.92, +\infty \rangle$

Ponieważ $P > \alpha$ ($u \notin W$) więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

Oznacza to, że na poziomie istotności $\alpha=0.05$ odchylenie standardowe próbki nie jest znacząco większe od wymaganego $\sigma=0.24$ mg.

Testy istotności dla wariancji

Przykład: Korzystając z danych z poprzedniego przykładu, przeprowadzić dwustronny test na poziomie istotności $\alpha=0.05$.

- $H_0: \sigma=0.24 \text{ mg}, \quad H_1: \sigma \neq 0.24 \text{ mg}$
- $\alpha=0.05, \quad n=10, \quad u(\alpha/2, n-1) = u(0.025, 9) = 2.70, \quad u(1-\alpha/2, n-1) = u(0.975, 9) = 19.02$
- $W = (0, -u(\alpha/2, n-1)) \cup \langle u(1-\alpha/2, n-1), +\infty) = (0, 2.70) \cup \langle 19.02, +\infty)$

Ponieważ $u \notin W$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Oznacza to, że na poziomie istotności $\alpha=0.05$ odchylenie standardowe próbki nie jest znacząco różne od $\sigma=0.24$.

- ❖ Badana cecha x populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ o nieznanym μ i σ . Duża próbka ($n \geq 50$). Do weryfikacji hipotezy $H_0: \sigma = \sigma_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$z = \sqrt{\frac{2(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

H. alternatywna	$H_1: \sigma = \sigma_1 < \sigma_0$	$H_1: \sigma = \sigma_1 > \sigma_0$	$H_1: \sigma = \sigma_1 \neq \sigma_0$
Zbiór krytyczny	$(0, -z(1-\alpha))$	$\langle z(1-\alpha), \infty)$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)) \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty)$

Testy istotności dla wariancji

Przykład: Do tarczy oddano $n=50$ strzałów. Mierząc odległości trafień od środka tarczy okazało się, że ich wariancja jest równa $s_x^2 = 109.5 \text{ cm}^2$. Zakładając, że odległości te mają rozkład normalny, zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0.05$, hipotezę $H_0: \sigma^2=100 \text{ cm}^2$ jeśli hipotezą alternatywną jest $H_1: \sigma^2 > 100 \text{ cm}^2$.

- $H_0: \sigma^2=100 \text{ cm}^2, \quad H_1: \sigma^2 > 100 \text{ cm}^2$
- $\alpha=0.05, \quad n=50, \quad z(1-\alpha) = z(0.95) = 1.64$
- $z = \sqrt{\frac{2(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3} = \sqrt{\frac{2 \times (50-1) \times 109.5}{100}} - \sqrt{2 \times 50 - 3} \cong 0.51$
- $W = \langle z(1-\alpha), +\infty \rangle = \langle 1.64, +\infty \rangle$

$z \notin W$ a więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Oznacza to, że na poziomie istotności $\alpha=0.05$ odchylenie standardowe próbki nie jest znacząco różne od $\sigma=100$.

Rachunki z wykorzystaniem statystyki χ^2 :

- $\alpha=0.05, \quad n=50, \quad u(1-\alpha, n-1) = u(0.95, 49) = 66.34$
- $u = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(50-1) \times 109.5}{100} = 53.66$
- $W = \langle u(1-\alpha, n-1), +\infty \rangle = \langle 66.34, +\infty \rangle \quad \Rightarrow \quad u \notin W$