

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Wykład 13

Przedział ufności dla stosunku wariancji

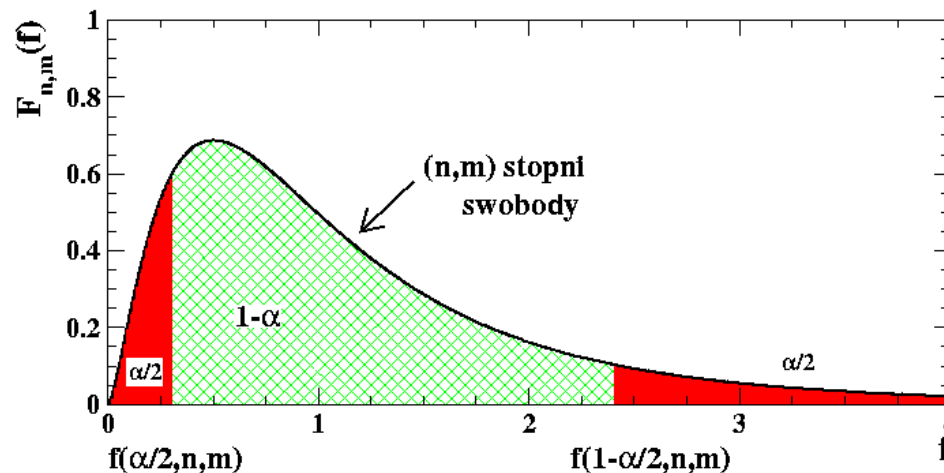
- ❖ Rozważmy dwie niezależne próbki losowe z rozkładów normalnych, odpowiednio $\mathcal{N}_1(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}_2(\mu_2, \sigma_2)$ o nieznanymi parametrach μ i σ .

Wiemy, że statystyka $F = \frac{u_1/(n_1-1)}{u_2/(n_2-1)} = \frac{s_{x_1}^2/\sigma_1^2}{s_{x_2}^2/\sigma_2^2}$ podlega rozkładowi

F Fishera-Snedecora o (n_1-1, n_2-1) stopniach swobody.

Korzystając z kwantyli rozkładu F znajdujemy:

$$P\left(f\left(\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right) < \frac{s_{x_1}^2/\sigma_1^2}{s_{x_2}^2/\sigma_2^2} < f\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)\right) = 1-\alpha$$



Przedział ufności dla stosunku wariancji

a stąd przedział ufności dla stosunku wariancji:

$$\frac{1}{f\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)} \frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{f\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)} \frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2}$$

Ponieważ statystyka $F' = \frac{1}{F} = \frac{s_{x_2}^2 / \sigma_2^2}{s_{x_1}^2 / \sigma_1^2}$ ma również rozkład F , ale o liczbie stopni swobody $(n_2 - 1, n_1 - 1)$, więc pomiędzy kwantylami rozkładu F zachodzi związek:

$$f(p, n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{f(1 - p, n_2 - 1, n_1 - 1)}$$

a stąd przedział ufności dla σ_1^2 / σ_2^2 można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{f\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)} \frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < f\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_2 - 1, n_1 - 1\right) \frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2}$$

Weryfikacja hipotezy o równości wariancji

- ❖ Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ o nieznanymi parametrach. Do weryfikacji hipotezy $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ na podstawie dwóch niezależnych prób prostych o licznosciach odpowiednio n_1 i n_2 pobranych z tych populacji, wykorzystuje się statystykę:

$$F = \frac{u_1/(n_1-1)}{u_2/(n_2-1)} = \frac{s_{x_1}^2 / \sigma_1^2}{s_{x_2}^2 / \sigma_2^2} = \left\| H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \right\| = \frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2}$$

która przy założeniu prawdziwości H_0 ma rozkład F o (n_1-1, n_2-1)

Gdy hipotezą alternatywną jest $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ wtedy jako statystykę testową wykorzystujemy:

$$F_1 = \max(F, F') = \frac{\max(s_{x_1}^2, s_{x_2}^2)}{\min(s_{x_1}^2, s_{x_2}^2)}$$

H. alternatywna	$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
Zbiór krytyczny	$\langle f(1-\alpha, n_2-1, n_1-1), \infty \rangle$	$\langle f(1-\alpha, n_1-1, n_2-1), \infty \rangle$	$\langle f(1-\alpha/2, n_1-1, n_m-1), \infty \rangle$

n_1 – liczba stopni swobody statystyki (licznik) $\max(s_{x_1}^2, s_{x_2}^2)$
 n_m – liczba stopni swobody statystyki (mianownik) $\min(s_{x_1}^2, s_{x_2}^2)$

Przedział ufności dla stosunku wariancji

Przykład: W celu zbadania wpływu melatoniny na bezsenność podano dwóm grupom pacjentów różne dawki tego hormonu (odpowiednio 5 mg i 15 mg) i zmierzono czas do momentu zaśnięcia (określony na podstawie rejestracji fal mózgowych).

Uzyskano następujące wyniki: Grupa I $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 14.8$ min, $s_1^2 = 4.36$ min²;

Grupa II $n_2 = 12$, $\bar{x}_2 = 10.2$ min, $s_2^2 = 4.66$ min². Zakładając, że populacje w obu przypadkach mają rozkłady normalne, znajdź 90% realizację przedziału ufności dla stosunku wariancji.

$$f\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right) = f(0.95, 9, 11) \cong 2.90$$

$$\frac{1}{2.90} \cdot \frac{4.36}{4.66} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3.10 \cdot \frac{4.36}{4.66}$$

$$f\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_2 - 1, n_1 - 1\right) = f(0.95, 11, 9) \cong 3.10$$

$$0.32 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2.90$$

Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0.01$ hipotezę o równości obu wariancji wobec hipotezy alternatywnej, mówiącej, że wariancje obu rozkładów są różne.

■ $H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$ $H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$ $\alpha=0.01$, $n_1=10$, $n_2=12$

■ $f = \frac{\max(s_1^2, s_2^2)}{\min(s_1^2, s_2^2)} = \frac{4.66}{4.36} = 1.07$

■ $W = \langle f(1 - \alpha/2, n_2 - 1, n_1 - 1), +\infty \rangle = \langle f(0.995, 11, 9), +\infty \rangle = \langle 6.33, +\infty \rangle$

Ponieważ $f \notin W$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

P. ufności dla różnicy wartości oczekiwanych

- ❖ Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ o znanych σ_1 i σ_2 i nieznanymi μ_1 i μ_2 .

Wiemy, że statystyka:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

ma standaryzowany rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$.

Korzystając z kwantyli rozkładu normalnego znajdujemy:

$$P\left(z\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$

a stąd:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Hipotezy o równości wartości oczekiwanych

- ❖ Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ o znanych σ_1 i σ_2 i nieznanymi μ_1 i μ_2 . Do weryfikacji hipotezy $H_0: \mu_1 = \mu_2$ na podstawie dwóch niezależnych prób prostych o licznosciach odpowiednio n_1 i n_2 pobranych z tych populacji, wykorzystuje się statystykę:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \|H_0 : \mu_1 = \mu_2\| = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

W zależności od hipotezy alternatywnej H_1 zbiór krytyczny W ma postać:

H. alternatywna	$H_1: \mu_1 < \mu_2$	$H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -z(1-\alpha))$	$(z(1-\alpha), \infty)$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)) \cup (z(1-\alpha/2), \infty)$

Hipotezy o równości wartości oczekiwanych

Przykład: Znajdź 95% realizację przedziału ufności dla różnicy wartości oczekiwanych populacji normalnych o nieznanymi wartościami oczekiwanych i znanych dyspersjach $\sigma_1=0.73$ i $\sigma_2=0.89$ z których pobrano próby losowe uzyskując następujące wyniki:

$$n_1 = 25 \quad \bar{x}_1 = 6.9 \quad n_2 = 20 \quad \bar{x}_2 = 6.7$$

$$6.9 - 6.7 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{(0.73)^2}{25} + \frac{(0.89)^2}{20}} < \mu_1 - \mu_2 < 6.9 - 6.7 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{(0.73)^2}{25} + \frac{(0.89)^2}{20}}$$

$$-0.28 < \mu_1 - \mu_2 < 0.68$$

Przykład: Dane jak w poprzednim przykładzie. Przetestować na poziomie istotności $\alpha=0.05$ hipotezę $H_0: \mu_1=\mu_2$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

$$n_1 = 25 \quad \bar{x}_1 = 6.9 \quad \sigma_1 = 0.73 \quad n_2 = 20 \quad \bar{x}_2 = 6.7 \quad \sigma_2 = 0.89$$

$$\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad z(1 - \alpha/2) = z(0.975) = 1.96$$

$$W = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty)$$

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = 0.81 \quad \Rightarrow \quad z \notin W \quad \Rightarrow \quad \text{akceptujemy hipotezę } H_0$$

P. ufności dla różnicy wartości oczekiwanych

- ❖ Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ o nieznanymi średnich μ_1 i μ_2 oraz nieznanymi ale jednakowymi dyspersjach σ_1 i σ_2 ($\sigma_1 = \sigma_2$). Wiemy, że statystyka:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 - 1}{n_2} s_x^2 + \frac{n_2 - 1}{n_1} s_y^2 \right)}} \xrightarrow{n_1 \cong n_2 \rightarrow \infty} \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

ma rozkład Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.

Wprowadzając oznaczenie:

$$s_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 - 1}{n_2} s_x^2 + \frac{n_2 - 1}{n_1} s_y^2 \right)} \xrightarrow{n_1 \cong n_2 \rightarrow \infty} \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

oraz korzystając z kwantyli rozkładu Studenta znajdujemy:

$$P \left(t \left(\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2 \right) < \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}-\bar{y}}} < t \left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2 \right) \right) = 1 - \alpha$$

a stąd:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t \left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2 \right) s_{\bar{x}-\bar{y}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t \left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2 \right) s_{\bar{x}-\bar{y}}$$

Hipotezy o równości wartości oczekiwanych

- ❖ Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ o nieznanymi średnich μ_1 i μ_2 oraz nieznanymi ale jednakowymi dyspersjach σ_1 i σ_2 ($\sigma_1 = \sigma_2$). Do weryfikacji hipotezy $H_0: \mu_1 = \mu_2$ na podstawie dwóch niezależnych prób prostych o licznosciach odpowiednio n_1 i n_2 pobranych z tych populacji, wykorzystuje się statystykę:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 - 1}{n_2} s_x^2 + \frac{n_2 - 1}{n_1} s_y^2 \right)}}$$

ma rozkład Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody (ozn. $N \equiv n_1 + n_2$)

H. alternatywna	$H_1: \mu = \mu_1 < \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 \neq \mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -t(1-\alpha, N-2))$	$(t(1-\alpha, N-2), \infty)$	$(-\infty, -t(1-\alpha/2, N-2)) \cup (t(1-\alpha/2, N-2), \infty)$

Uwaga: W przypadku licznych próbek ($n_1 \geq 30$ i $n_2 \geq 30$) kwantyle rozkładu Studenta przybliżamy kwantylami rozkładu normalnego.

Hipotezy o równości wartości oczekiwanych

- ❖ Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ o nieznanymi średnich μ_1 i μ_2 oraz nieznanymi, dyspersjach σ_1 i σ_2 . Do weryfikacji hipotezy $H_0: \mu_1 = \mu_2$ na podstawie dwóch niezależnych prób prostych o licznosciach odpowiednio n_1 i n_2 pobranych z tych populacji, wykorzystuje się statystykę Cochran - Coxa:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_{\bar{x} - \bar{y}}} \xrightarrow{n_1 \cong n_2 \rightarrow \infty} c = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

Kwantyle rzędu p zmiennej c :

$$c(p, n_1, n_2) \cong \left(\frac{s_1^2}{n_1} t(p, n_1 - 1) + \frac{s_2^2}{n_2} t(p, n_2 - 1) \right) / \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)$$

H. alternatywna	$H_1: \mu = \mu_1 < \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0$	$H_1: \mu = \mu_1 \neq \mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -c(1-\alpha, n_1, n_2))$	$\langle c(1-\alpha, n_1, n_2), \infty \rangle$	$(-\infty, -c(1-\alpha/2, n_1, n_2)) \cup \langle c(1-\alpha/2, n_1, n_2), \infty \rangle$

Różnica wartości oczekiwanych - przykłady

Przykład: W celu zbadania wpływu snu na zdolność zapamiętywania wybrano losowo dwie grupy, każda po $n=15$ osób i każdej z nich zaprezentowano film dokumentalny o życiu zwierząt w Arktyce. Pierwszej grupie pokazano film o 19:00, a następnie po przespanej nocy, o 7:00 zadano 50 szczegółowych pytań dotyczących filmu. Drugiej grupie film pokazano o 7:00, a następnie po całodziennym normalnej aktywności, zadano identyczne pytania o 19:00. Średnie liczby poprawnych odpowiedzi oraz ich odchylenia standardowe wyniosły odpowiednio: $\bar{x}_1 = 37.2$, $s_1^2 = 3.33$, $\bar{x}_2 = 35.6$, $s_2^2 = 3.24$. Zakładając, że obie populacje mają rozkłady normalne oraz, że $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ znajdź 95% realizację przedziału ufności dla różnicy wartości oczekiwanych $\mu_1 - \mu_2$.

$$\alpha = 0.05, \quad n = 15 \quad \Rightarrow \quad t\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n + n - 2\right) = t(0.975, 28) = 2.048$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 37.2 - 35.6 = 1.6 \quad s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{30}{28} \sqrt{\frac{14}{15} \frac{3.33}{15} + \frac{14}{15} \frac{3.24}{15}}} = 0.662$$

$$1.6 - 2.048 \times 0.662 < \mu_1 - \mu_2 < 1.6 + 2.048 \times 0.662 \quad \Rightarrow \quad 0.24 < \mu_1 - \mu_2 < 2.96$$

Różnica wartości oczekiwanych - przykłady

Przykład: Dane jak w poprzednim przykładzie. Wykonaj obustronny test hipotezy

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

$$\bar{x}_1 = 37.2 \quad s_1^2 = 3.33 \quad \bar{x}_2 = 35.6 \quad s_2^2 = 3.24$$

$$\blacksquare H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\blacksquare \alpha = 0.05, \quad n_1 = n_2 = n = 15 \quad \Rightarrow \quad t\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n + n - 2\right) = t(0.975, 28) = 2.048$$

$$\blacksquare W = (-\infty, -t(1 - \alpha/2, n_1 + n_2 - 2)) \cup (t(1 - \alpha/2, n_1 + n_2 - 2), \infty) = (-\infty, -2.048) \cup (2.048, \infty)$$

$$\blacksquare \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 37.2 - 35.6 = 1.6 \quad s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{30}{28} \sqrt{\frac{14}{15} \frac{3.33}{15} + \frac{14}{15} \frac{3.24}{15}}} = 0.662$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \frac{1.6}{0.662} = 2.42$$

Ponieważ $t \in W$ więc na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej H_1 .

Oznacza to, że na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ obie wartości oczekiwane są różne.

Weryfikacja hipotezy o wskaźniku struktury

- ❖ Badana cecha x populacji ma rozkład dwupunktowy o nieznanym parametrze p . Do weryfikacji hipotezy $H_0: p=p_0$ wykorzystujemy wskaźnik struktury z próby, k/n , gdzie k oznacza liczbę elementów wyróżnionych w próbie o liczności n .

Gdy liczność próby $n \geq 100$, do weryfikacji hipotezy H_0 stosujemy statystykę testową:

$$z = \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Dla małej próby ($n < 100$) najpierw stosujemy przekształcenie: $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{k}{n}}$

Ponieważ przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 , zmienna losowa φ ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(2 \arcsin \sqrt{p_0}, 1/\sqrt{n})$, więc zmienna

$$z = \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{k}{n}} - 2 \arcsin \sqrt{p_0} \right) \sqrt{n}$$

ma w przybliżeniu standaryzowany rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Weryfikacja hipotezy o wskaźniku struktury

W zależności od hipotezy alternatywnej zbiór krytyczny W ma postać:

H. alternatywna	$H_1: p=p_1 < p_0$	$H_1: p=p_1 > p_0$	$H_1: p=p_1 \neq p_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -z(1-\alpha))$	$\langle z(1-\alpha), \infty \rangle$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)) \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty \rangle$

Przykład: Z partii butelek dostarczonych do mleczarni sprawdzono 900 butelek i znaleziono wśród nich 18 butelek wybrakowanych. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0.05$, hipotezę, że procent butelek wybrakowanych jest równy 3%, wobec hipotezy alternatywnej mówiącej, że wybrakowanych butelek jest więcej.

- $H_0 : p = p_0 = 0.03$ $H_1 : p = p_1 > 0.03$
- $\alpha = 0.05, \quad z(1-\alpha) = z(0.95) = 1.64$
- $W = \langle z(1-\alpha), \infty \rangle = \langle 1.64, \infty \rangle$
- $z = \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{18 - 900 \times 0.03}{\sqrt{900 \times 0.03 \times 0.97}} \cong -1.76$

Ponieważ $z \notin W$ więc na poziomie istotności $\alpha=0.05$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

Hipotezy o równości wskaźników struktury

- ❖ Badana cecha x w dwóch populacjach ma rozkład dwupunktowy z parametrami p_1 i p_2 . Weryfikujemy hipotezę $H_0: p_1 = p_2$.

Gdy licznosci obu prób $n_1, n_2 \geq 100$, do weryfikacji hipotezy H_0 stosujemy statystykę testową:

$$z = \frac{\frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

gdzie $p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$, która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład asymptotycznie normalny $\mathcal{N}(0,1)$.

Gdy licznosci obu prób nie są duże, wykorzystujemy statystykę:

$$z = \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{k_1}{n_1}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{k_2}{n_2}} \right) \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma w przybliżeniu standaryzowany rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Hipotezy o równości wskaźników struktury

W zależności od hipotezy alternatywnej zbiór krytyczny W ma postać:

H. alternatywna	$H_1: p_1 < p_2$	$H_1: p_1 > p_2$	$H_1: p_1 \neq p_2$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -z(1-\alpha))$	$\langle z(1-\alpha), \infty \rangle$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)) \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty \rangle$

Przykład: Przez okres czterech tygodni stawiano prognozy meteorologiczne dwiema różnymi metodami. Prognozy stawiane pierwszą metodą okazały się trafne w 21 dniach, drugą zaś w 17. Czy na poziomie istotności $\alpha=0.05$ można twierdzić, że pierwsza z metod jest lepsza od drugiej?

- $H_0: p_1 = p_2$ $H_1: p_1 > p_2$
- $\alpha = 0.05$, $n_1 = n_2 = n = 28$, $k_1 = 21$, $k_2 = 17$, $z(1-\alpha) = z(0.95) = 1.64$
- $W = \langle z(1-\alpha), \infty \rangle = \langle 1.64, \infty \rangle$
- $z = \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{k_1}{n_1}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{k_2}{n_2}} \right) \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{21}{28}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{17}{28}} \right) \sqrt{\frac{28}{2}} \cong 1.15$

Ponieważ $z \notin W$ więc na poziomie istotności $\alpha=0.05$ nie ma podstaw stwierdzenia, że pierwsza metoda jest lepsza od drugiej.

Testy zgodności

Testem zgodności nazywamy test do weryfikacji hipotezy (prostej lub złożonej) dotyczącej zgodności pomiędzy rozkładem zbioru wartości w próbie i rozkładem teoretycznym.

Przykład: Niech x_1, \dots, x_n będą wartościami próby losowej pobranej z populacji o nieznanym dystrybuancie. Wysuwamy hipotezę:

H_0 : {dystrybuantą badanej cechy jest $F_0(x)$ },

lub H_0 : {gęstością p-twa badanej cechy jest $f_0(x)$ } dla zmiennej ciągłej,

lub H_0 : {funkcją p-twa badanej cechy jest $P(x=x_i)=p_i$ } dla zmiennej skokowej.

Powyższe hipotezy określa się jako **nieparametryczne**.

W zależności od tego czy F_0 , f_0 , P są funkcjami całkowicie określonymi czy też zależnymi od nieznanymi parametrów mówimy o hipotezach **prostych** lub **złożonych**.

Najczęściej wykorzystywanym testem zgodności jest **test χ^2 Pearsona**.

Test χ^2 Pearsona

- Weryfikujemy hipotezę $H_0: F_0(x)$ gdy F_0 jest całkowicie określona. Próbkę danych dzielimy na k klas konstruując tzw. szereg rozdzielczy.

Nr klasy	1	2	...	k	
Granice klas	$\langle g_0, g_1 \rangle$	(g_1, g_2)	...	(g_{k-1}, g_k)	
Liczności n_i doświadczalne	n_1	n_2	...	n_k	$\sum_i n_i = n$
Liczności np_i teoretyczne	np_1	np_2	...	np_k	$\sum_i np_i = n$

Jeśli hipoteza H_0 jest prawdziwa to p-twa p_i że badana cecha x przyjmie wartość należącą do i -tej klasy można wyznaczyć z zależności:

$$p_i = F_0(g_i) - F_0(g_{i-1})$$

Jako miarę rozbieżności pomiędzy pomiarami a przewidywaniami teoretycznymi przyjmujemy wartość statystyki:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

zależnej od zmiennych losowych N_i , których wartości n_i spełniają warunek $\sum n_i = n$. Dla $n \rightarrow \infty$ podlega ona rozkładowi χ^2 o $k-1$ stopniach swobody.

Test χ^2 Pearsona

Zbiorem krytycznym testu jest $W = \langle u(1-\alpha, n), +\infty \rangle$. Jeśli obliczona na podstawie danych wartość statystyki $\chi_d^2 \in W$ wówczas hipotezę H_0 odrzucamy na poziomie istotności α .

Przykład: W 200 rzutach monetą 115 razy wypadł orzeł i 85 razy reszka. Sprawdzić na poziomie istotności $\alpha=0.01$ i $\alpha=0.05$ hipotezę, że moneta jest uczciwa.

$$n_1 = 115 \quad n_2 = 85 \quad p_1 = 0.5 \quad p_2 = 0.5 \quad k = 2$$

$$\chi_d^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{(n_i - 200p_i)^2}{200p_i} = \frac{(115 - 100)^2}{100} + \frac{(85 - 100)^2}{100} = 4.5$$

$$\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad u(1 - \alpha, k - 1) = u(0.95, 1) = 3.84 \quad \Rightarrow \quad W = \langle 3.84, \infty \rangle$$

Ponieważ $\chi_d^2 \in W$ więc na poziomie istotności $\alpha=0.05$ odrzucamy hipotezę, że moneta jest uczciwa.

$$\alpha = 0.01 \quad \Rightarrow \quad u(1 - \alpha, k - 1) = u(0.99, 1) = 6.63 \quad \Rightarrow \quad W = \langle 6.63, \infty \rangle$$

Ponieważ $\chi_d^2 \notin W$ więc na poziomie istotności $\alpha=0.01$ nie mamy powodu żeby odrzucić hipotezę, że moneta jest uczciwa.

Stwierdzamy, że zaobserwowane wyniki są prawdopodobnie znaczące i że moneta prawdopodobnie nie jest uczciwa.

Test χ^2 Pearsona

Przykład: Wyznaczono liczby błędów przy korekcie $n=500$ stronicowej książki i otrzymano następujące wyniki:

Liczba błędów b_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Liczba stron n_i	67	139	134	90	44	15	6	4	1

Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0.05$ hipotezę, że liczba błędów na stronie ma rozkład Poissona.

Wiemy, że nieobciążonym estymatorem parametru μ jest: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i b_i = 2$

Hipotetyczna l. stron np_i	67.7	135.3	135.3	90.2	45.1	18.0	6.0	1.7	0.4
------------------------------	------	-------	-------	------	------	------	-----	-----	-----

$$\chi_d^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 4.66$$

$$\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad u(1 - \alpha, k - 1) = u(0.95, 8) = 15.507 \quad \Rightarrow \quad W = \langle 15.507, \infty \rangle$$

Ponieważ $\chi_d^2 \notin W$ więc na poziomie istotności $\alpha=0.05$ nie mamy powodu aby odrzucić hipotezę, że rozkład liczby błędów na stronie książki jest rozkładem Poissona o $\mu=2$.