Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Wykład 13

Hipotezy statystyczne

Hipotezą statystyczną nazywamy każde przypuszczenie dotyczące nieznanego rozkładu badanej cechy populacji, o którego prawdziwości lub fałszywości wnioskuje się na podstawie pobranej próbki losowej.

Hipotezy parametryczne dotyczą wyłącznie wartości parametrów.

Przykład: Wiadomo, że badana cecha x ma rozkład wykładniczy o nieznanej wartości oczekiwanej. Wysuwamy hipotezę, że $\mathcal{E}[x]=5$.

Hipotezy, które nie są parametryczne nazywamy **nieparametrycznymi**.

Przykład: Niech T oznacza odstęp czasu pomiędzy przejazdami samochodów ulicą. Wysuwamy hipotezę, że T ma rozkład wykładniczy.

Hipotezę parametryczną nazywamy **prostą** jeśli precyzuje dokładne wartości wszystkich nieznanych parametrów rozkładu badanej cechy.

Przykład: Wiadomo, że badana cecha x ma rozkład $\mathcal{N}(x;\ \mu=10,\sigma)$.

Wysuwamy hipotezę, że $\sigma=2$.

W przeciwnym wypadku hipotezę parametryczną nazywamy **złożoną**.

Przykład: Cecha x ma rozkład $\mathcal{N}(x;\ \mu=10,\sigma)$. Wysuwamy hipotezę, że $\sigma\leq 2$.

Hipotezy statystyczne

Testem statystycznym nazywamy metodę postępowania, która każdej możliwej realizacji próby losowej $x_1, \ldots, x_n$, przyporządkowuje, z ustalonym p-twem, decyzję przyjęcia bądź odrzucenia sprawdzanej hipotezy.

Testowaną hipotezę nazywamy **hipotezą zerową H_0**.
Hipotezę, którą jesteśmy skłonni przyjąć, jeśli okaże się, że weryfikowaną hipotezę H_0 należy odrzucić, nazywamy **hipotezą alternatywną H_1**.

Statystyką testową nazywamy taką funkcję próby losowej $\delta(x_1,\ldots, x_n)$, która spełnia następujące warunki:

- pozwala na porównanie punktowej estymaty parametru θ na podstawie próby losowej z wartością θ_0 występującą w hipotezie H_0,
- jest związana z rozkładem p-twa, który jest znany przy założeniu, że testowana hipoteza H_0 jest prawdziwa.

Zbiorem krytycznym W nazywamy zbiór wartości statystyki testowej $\delta(x_1,\ldots, x_n)$, których wystąpienie skłania nas do odrzucenia testowanej hipotezy H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej H_1.

Błędy I-go i II-go rodzaju

Przykład: Na pewnej drodze istnieje ograniczenie prędkości do 120 km/h. Urządzenie pomiarowe działa w ten sposób, że wykonuje trzy niezależne pomiary x_1, x_2 i x_3, a następnie oblicza średnią $\overline{x}_3$, której wartość decyduje o tym czy kierowca otrzymuje mandat czy nie. Ile powinna wynosić minimalna wartość $\overline{x}_3$ powyżej której kierowca otrzymuje mandat, aby tylko 5% kierowców otrzymywało mandat niesłusznie.

Urządzenie pomiarowe jest wykalibrowane w ten sposób, że błąd pomiaru podlega rozkładowi normalnemu $\mathcal{N}(0, \sigma=2)$, a sam pomiar rozkładowi $\mathcal{N}(\mu, \sigma=2)$ gdzie μ jest prawdziwą prędkością pojazdu.

Formułujemy problem:

H_0: $\mu=120$ przeciw H_1: $\mu>120$

Statystyka testowa: $\delta = \overline{x}_3$

możliwe wartości δ:

wartości preferujące H_1

120

Możliwe rodzaje błędów przy podejmowaniu decyzji co do prawdziwości hipotezy H_0:

Decyzja	Hipoteza H_0 jest prawdziwa	Hipoteza H_0 jest fałszywa
przyjąć H_0	decyzja poprawna	błąd II-go rodzaju
odrzucić H_0	błąd I-go rodzaju	decyzja poprawna

Błędy I-go i II-go rodzaju

P: (cd) Chcemy aby p-two niesłusznego ukarania kierowcy było co najwyżej równe 5%, tzn. aby p-two popełnienia błędu I-go rodzaju było nie większe niż 5%.

Poziomem istotności α testu nazywamy p-two popełnienia błędu I-go rodzaju.

P: (cd) Dla jakich wartości statystyki testowej $\delta = \overline{x}_3$ powinniśmy na poziomie istotności α = 5% odrzucić hipotezę H_0: μ = 120 na rzecz hipotezy alternatywnej H_1: μ>120 ?

Sprawdźmy co się dzieje dla δ>121 oraz δ>122:

$$P(\delta \geq 121) = P\left(\frac{\delta - 120}{2/\sqrt{3}} \geq \frac{121-120}{2/\sqrt{3}}\right) = P(z \geq 0.87) = 0.1922 \quad > \alpha = 0.05$$

$$P(\delta \geq 122) = P\left(\frac{\delta - 120}{2/\sqrt{3}} \geq \frac{122-120}{2/\sqrt{3}}\right) = P(z \geq 1.73) = 0.0416 \quad < \alpha = 0.05$$

Jaka powinna być więc graniczna wartość c ?

$$P(\delta \geq c) = P\left(z \geq \frac{c-120}{2/\sqrt{3}}\right) = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{c-120}{2/\sqrt{3}} = z(0.95) = 1.645 \quad \Rightarrow \quad c = 121.9$$

A więc na poziomie istotności α = 0.05 powinniśmy odrzucić hipotezę H_0: μ=120 na rzecz hipotezy H_1: μ>120 wtedy gdy wartość statystyki testowej $\delta \in W = \langle 121.9, \infty)$.

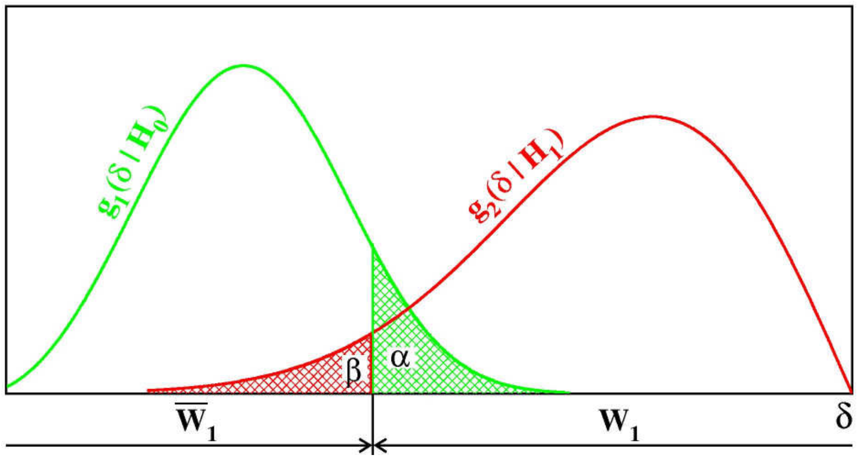
Błędy I-go i II-go rodzaju

<u>P: (cd)</u> Jakie jest p-two nie ukarania kierowcy który przekroczył dozwoloną prędkość? (czyli popełnienia błędu II-go rodzaju)

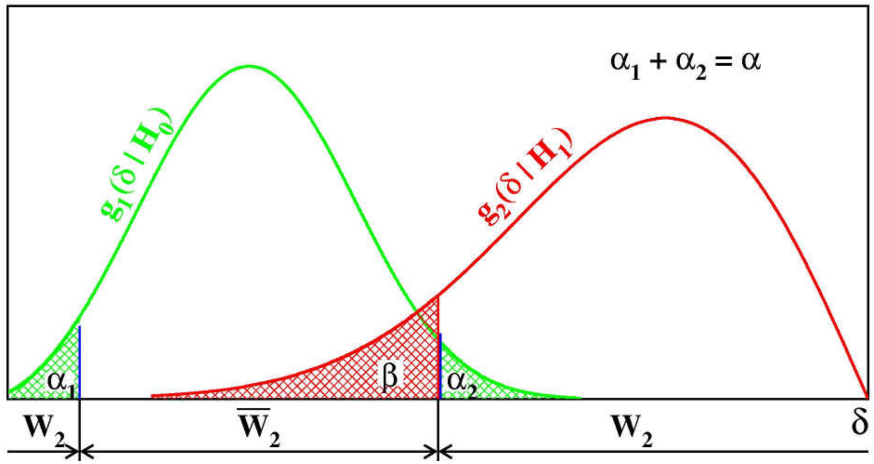
$$P\left(\delta < 121.9 \,|\, \mu = 125\right) = P\left(\frac{\delta - 125}{2/\sqrt{3}} \geq \frac{121.9 - 125}{2/\sqrt{3}}\right) = \Phi\left(-2.68\right) = 0.0036$$

$$P\left(\delta < 121.9 \,|\, \mu = 123\right) = P\left(\frac{\delta - 123}{2/\sqrt{3}} \geq \frac{121.9 - 123}{2/\sqrt{3}}\right) = \Phi\left(-0.95\right) = 0.1711$$

$$P\left(\delta(x_1, \ldots, x_n) \in W \,|\, H_0\right) \leq \alpha$$



$$\beta = P\left(\delta \in \overline{W} \,|\, H_1\right) = 1 - P\left(\delta \in W \,|\, H_1\right)$$



Testem najmocniejszym nazywamy test, który przy ustalonym α, minimalizuje p-two β błędu II-go rodzaju.

Weryfikacja hipotez statystycznych

Schemat postępowania przy testowaniu hipotezy zerowej:

- wybierz hipotezę zerową H_0 i hipotezę alternatywną H_1,
- wybierz poziom istotności testu α,
- wybierz statystykę testową δ oraz zdefiniuj zbiór krytyczny W,
- oblicz wartość statystyki testowej dla wylosowanej próby prostej,
- sprawdź czy obliczona wartość statystyki testowej należy do zbioru krytycznego i zdecyduj czy przyjąć czy też odrzucić H_0 na rzecz H_1.

Niech zbiorem krytycznym dla hipotezy H_0: $\theta = \theta_0$ będzie zbiór W:

$$\mathbf{P}\left(\delta(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in W \mid \theta_0\right) = \alpha$$

Mocą testu nazywamy funkcję: $M\left(\theta, W\right) = \mathbf{P}\left(\delta \in W \mid \theta\right)$

Niech H_1: $\theta = \theta_1$, wówczas $M\left(\theta_1, W\right) = \mathbf{P}\left(\delta \in W \mid \theta_1\right) = 1 - \beta$

Zbiór krytyczny W należy zawsze wybierać tak aby moc testu, dla wszystkich wartości parametru θ ze zbioru hipotez alternatywnych H_1 była możliwie największa.

Moc testu statystycznego

<u>Przykład:</u> Badana cecha ma rozkład $\mathcal{N}(x;\mu,\sigma)$ o znanej wariancji σ^2. Weryfikujemy hipotezę H_0: $\mu=\mu_0$ na podstawie n=25 elementowej próby losowej, przy wykorzystaniu jako statystyki testowej:

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{5(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}$$

Dla poziomu istotności α=0.05 wyznaczyć moc testu w przypadku gdy:

a) zbiorem krytycznym jest $W=\langle c,+\infty)$, gdzie $P(z\geq c \mid H_0)=\alpha$

$$M_1(\mu,W)=P(z\geq 1.64\,|\,\mu)=P\left(\frac{5(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}\geq 1.64\,|\,\mu\right)=P\left(\frac{5(\bar{x}-\mu)}{\sigma}\geq 1.64+\frac{5(\mu_0-\mu)}{\sigma}\right)=$$

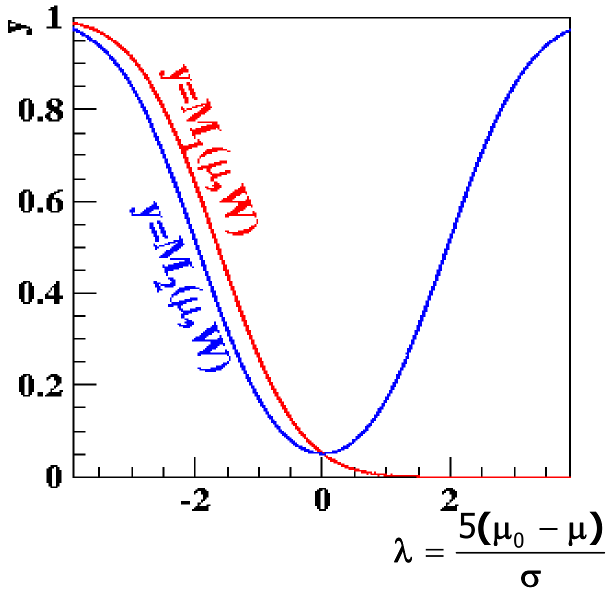
$$=1-\Phi(1.64+\lambda)$$

b) zbiorem krytycznym jest

$W=(-\infty,-c_1\rangle\cup\langle c_1,+\infty)$, gdzie $P(|z|\geq c_1 \mid H_0)=\alpha$

$$M_2(\mu,W)=P(|z|\geq 1.96\,|\,\mu)=P\left(\frac{5|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}\geq 1.96\,|\,\mu\right)=$$

$$=1-\Phi(\lambda+1.96)+\Phi(\lambda-1.96)$$



<u>Wniosek:</u> Gdy H_1: $\mu>\mu_0$ ($\lambda<0$) to należy wybrać jako zbiór krytyczny $W=\langle c,+\infty)$.

Natomiast gdy H_1: $\mu\neq\mu_0$ to $W=(-\infty,-c_1\rangle\cup\langle c_1,+\infty)$.

Testowanie hipotez a przedziały ufności

<u>Przykład (mandaty):</u> Hipotezę H_0: $\mu = 120$ odrzucamy na rzecz hipotezy H_1: $\mu>120$, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, gdy:

- $\overline{x}_3 \geq c_{0.05} \equiv 120 + 1.645 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
- $\mu_{\_} \equiv \overline{x}_3 - 1.645 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} \geq 120$
- 120 nie mieści się w jednostronnym przedziale ufności dla parametru μ, na poziomie ufności $1-\alpha = 95\%$

Ogólnie, dla dowolnego testowanego parametru θ, przy H_0: $\theta = \theta_0$, zachodzi:

- odrzucamy H_0 na rzecz H_1: $\theta>\theta_0$ (H_1: $\theta<\theta_0$) poziomie α wtedy i tylko gdy θ_0 nie należy do odpowiedniego jednostronnego przedziału ufności na poziomie ufności $1-\alpha$ dla parametru θ.
- odrzucamy H_0 na rzecz H_1: $\theta\neq\theta_0$ na poziomie α wtedy i tylko gdy θ_0 nie należy do obustronnego przedziału ufności na poziomie ufności $1-\alpha$ dla parametru θ.

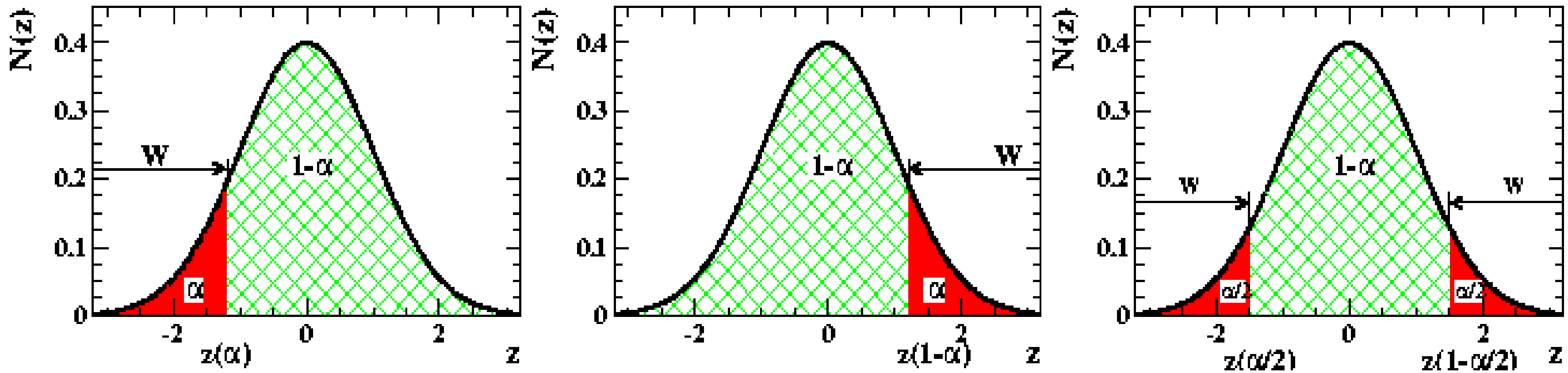
Testy istotności dla wartości oczekiwanej

- Badana cecha x populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ o znanym σ. Do weryfikacji hipotezy H_0: $\mu=\mu_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

H. alternatywna	H_1: $\mu=\mu_1<\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1>\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1\neq\mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty,\ -z(1-\alpha)\rangle$	$\langle z(1-\alpha),\ \infty)$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)\rangle \cup \langle z(1-\alpha/2),\ \infty)$



Testy istotności dla wartości oczekiwanej

Przykład: Chcemy ocenić czy nowo opracowane baterie pracują „zdecydowanie dłużej" niż baterie używane dotychczas. Wiemy, że czas pracy dotychczas używanych baterii w kalkulatorze ma rozkład normalny o μ_0=100.3 min oraz σ=6.25 min. Z przeprowadzonych testów nowych baterii wynika, że czas ich pracy podlega również rozkładowi normalnemu o σ=6.25 min. Na podstawie próbki n=15 pomiarów stwierdzono, że średni czas ich pracy wynosi $\overline{x} = 105.6$ min. Sprawdzić na poziomie istotności α=0.01 hipotezę H_0: $\mu = \mu_0$ wobec hipotezy alt. H_1: $\mu \neq \mu_0$.

- H_0: μ=100.3 min, H_1: $\mu\neq$100.3 min
- α=0.01, $z(1-\alpha/2)$=2.58
- $z = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{105.6-100.3}{6.25}\sqrt{15} = 3.28$
- $P = \mathrm{P}(|\,z\,| > z \mid H_0) = \mathrm{P}(|\,z\,| > 3.28 \mid H_0) = 2(1-\Phi(3.28)) \cong 2(1-0.9995) = 0.001$

  $W = (-\infty, -z(1-\alpha/2)\rangle \cup \langle z(1-\alpha/2), +\infty) = (-\infty, -2.58\rangle \cup \langle 2.58, +\infty)$

Ponieważ $P < \alpha$ ($z \in W$) więc odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1. Oznacza to, że na poziomie istotności α=0.01 jest znacząca różnica pomiędzy średnim czasem życia nowych baterii i dotychczas używanych w kalkulatorach.

Testy istotności dla wartości oczekiwanej

<u>Przykład:</u> Powtarzamy badania nowych baterii. Załóżmy, że zwiększając próbkę do n=20 znajdujemy $\overline{x} =$ 105.0 min. Zakładając, że czas pracy nowych baterii podlega rozkładowi normalnemu o σ=6.25 min. przeprowadź na poziomie istotności α=0.05 prawostronny test hipotezy H_0: μ=100.3 min.

- H_0: μ=100.3 min, H_1: μ>100.3 min
- α=0.05, $z(1-\alpha)$=1.645
- $$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{105.0 - 100.3}{6.25}\sqrt{20} = 3.36$$
- $$P = \mathrm{P}(\mathrm{z} > z \mid H_0) = \mathrm{P}(\mathrm{z} > 3.36 \mid H_0) = 1 - \Phi(3.36) \cong 1 - 0.9996 = 0.0004$$

$$W = \langle z(1-\alpha), +\infty) = \langle 1.645, +\infty)$$

Ponieważ $P < \alpha$ ($z \in W$) więc odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1.

Oznacza to, że na poziomie istotności α=0.05 jest znacząca różnica pomiędzy średnim czasem życia nowych baterii i dotychczas używanych w kalkulatorach.

<u>Uwaga:</u> Dla α=0.01 mamy $z(1-\alpha)$=2.33 co również prowadzi do odrzucenia hipotezy H_0 na rzecz hipotezy H_1, tym razem na poziomie istotności α=0.01

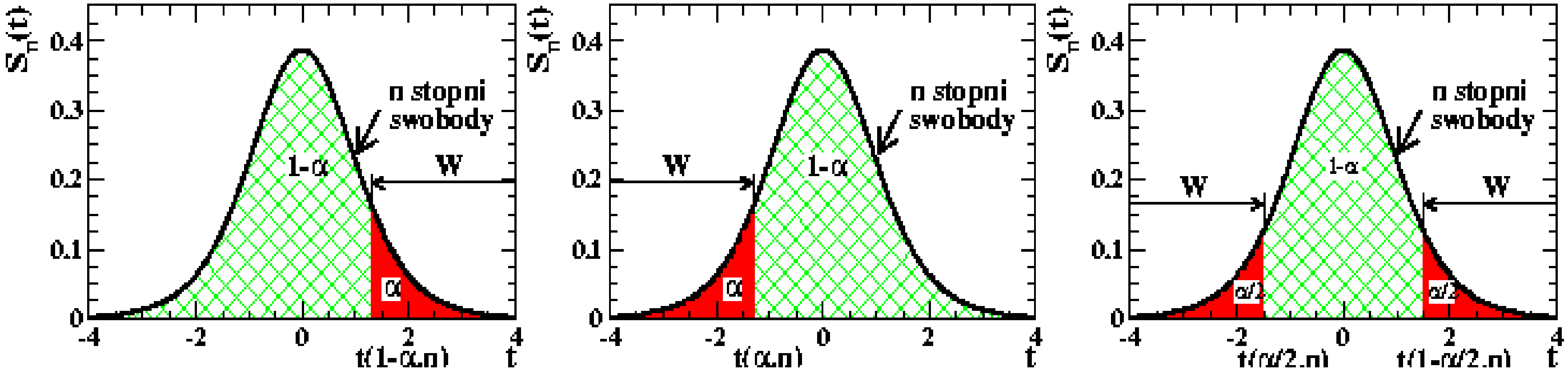
Testy istotności dla wartości oczekiwanej

- Badana cecha x populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ o nieznanych μ i σ. Do weryfikacji hipotezy H_0: $\mu = \mu_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{S}_{n-1}(t)$.

H. alternatywna	H_1: $\mu=\mu_1<\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1>\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1\neq\mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -t(1-\alpha, n-1)\rangle$	$\langle t(1-\alpha, n-1), \infty)$	$(-\infty, -t(1-\alpha/2, n-1)\rangle \cup \langle t(1-\alpha/2, n-1), \infty)$



Testy istotności dla wartości oczekiwanej

Przykład: Standardowy środek znieczulający zaczyna działać średnio po μ=10.5 min od chwili podania. Producent nowego środka znieczulającego twierdzi, że jego specyfik działa „zdecydowanie szybciej". Dentysta aplikuje nowy środek N=10 pacjentom, mierząc czas (w min) po którym pacjent przestaje odczuwać ból: 9.3, 9.5, 9.2, 9.0, 9.3, 9.5, 9.4, 9.3, 9.2, 9.1 . Ponieważ wiadomo, że rozkład czasu po którym zaczynał działać dotychczas stosowany środek jest normalny, więc można przypuszczać, że rozkład ten dla nowego środka też jest normalny. Sprawdzić na poziomie istotności α=0.01 czy nowy środek działa szybciej.

- H_0: μ=10.5 min, H_1: μ<10.5 min
- $\alpha=0.01, \quad t(1-\alpha, \nu-1)=2.821$
- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{92.8}{10} = 9.28 \text{ min} \qquad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.1619 \text{ min}$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}} = \frac{9.28 - 10.5}{0.1619}\sqrt{9} = -22.61$$

- $P = \mathrm{P}(t < t \mid H_0) = \mathrm{P}(t < -22.61 \mid H_0) \cong 0$

$$W = (-\infty, -t(1-\alpha, n-1)\rangle = (-\infty, -2.821\rangle$$

Ponieważ $P < \alpha$ ($t \in W$) więc odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1.

Testy istotności dla wartości oczekiwanej

- Badana cecha x populacji ma dowolny rozkład o nieznanych wartości oczekiwanej μ i skończonym σ. Duża ($n \geq 100$) próbka. Do weryfikacji hipotezy H_0: $\mu = \mu_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

H. alternatywna	H_1: $\mu=\mu_1<\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1>\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1\neq\mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -z(1-\alpha)\rangle$	$\langle z(1-\alpha), \infty)$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)\rangle \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty)$

Przykład: Na podstawie obserwacji przez n=315 dni w roku, stwierdzono, że średnie dzienne zużycie wody w fabryce wynosi $\bar{x} = 1029$ m^3, a wariancja $s_x^2 = 191$ m^6. Zweryfikować na poziomie istotności α = 0.01 hipotezę H_0: μ = 1000 m^3 wobec hipotezy alternatywnej H_1: μ > 1000 m^3.

$$\alpha=0.01, \qquad z(1-\alpha)=2.33, \qquad W = \langle z(1-\alpha), \infty) = \langle 2.33, \infty)$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}} = \frac{1029 - 1000}{\sqrt{191}} \sqrt{315} = 37.24$$

Ponieważ $z \in W$ więc odrzucamy na poziomie istotności α = 0.01 hipotezę H_0 na rzecz hipotezy H_1.

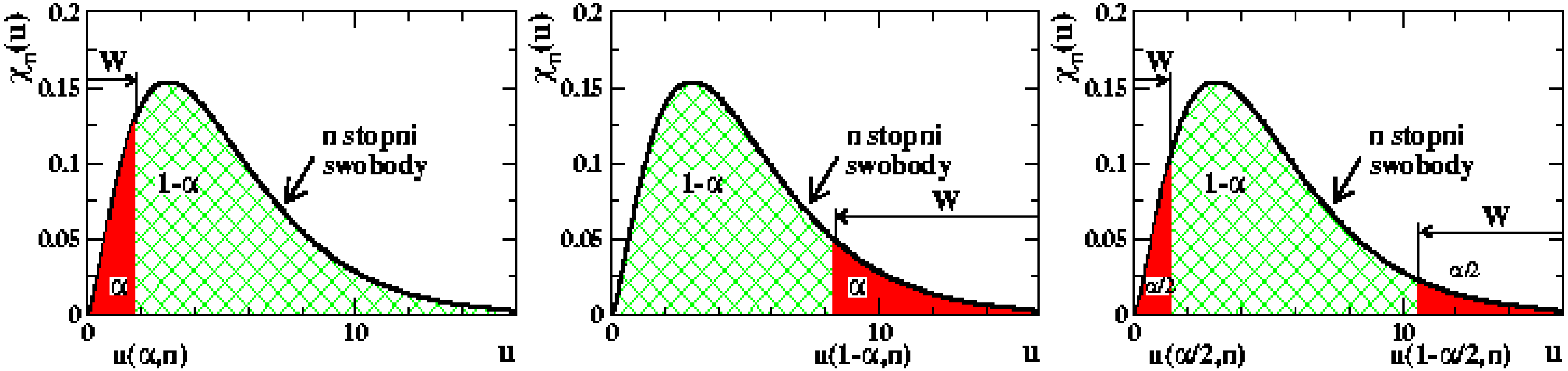
Testy istotności dla wariancji

- Badana cecha x populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ o nieznanych μ i σ. Do weryfikacji hipotezy H_0: $\sigma = \sigma_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$u = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\chi^2_{n-1}(u)$.

H. alternatywna	H_1: $\sigma = \sigma_1 < \sigma_0$	H_1: $\sigma = \sigma_1 > \sigma_0$	H_1: $\sigma = \sigma_1 \neq \sigma_0$
Zbiór krytyczny	$(0,\ u(\alpha, n-1)\rangle$	$\langle u(1-\alpha, n-1), \infty)$	$(0,\ u(\alpha/2, n-1)\rangle \cup \langle u(1-\alpha/2, n-1), \infty)$



Testy istotności dla wariancji

Przykład: Producent twierdzi, że pojemnik zawierający 355 ml soli dietetycznej zawiera jedynie 35 mg sodu. Aby zagwarantować te dane, w procesie produkcyjnym utrzymywane są warunki, takie aby zawartość sodu w soli miała rozkład normalny o μ=34.5 mg oraz σ=0.24 mg. W procesie kontroli losuje się n=10 pojemników i sprawdza, na poziomie istotności α=0.05, czy odchylenie standardowe jest większe niż 0.24 mg. Jeśli tak to proces produkcyjny jest zatrzymywany i odpowiednie poprawki są wprowadzane.
W jednym z testów uzyskano $s_x = 0.29$ mg. Czy proces produkcyjny powinien zostać zatrzymany?

- H_0: σ=0.24 mg, H_1: σ>0.24 mg
- $\alpha=0.05, \quad n=10, \quad u(1-\alpha, n-1) = u(0.95, 9) = 16.92$
- $u = \dfrac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(10-1)\times 0.29^2}{0.24^2} = 13.14$
- $P = \mathrm{P}(u > u \mid H_0) = \mathrm{P}(u > 13.14 \mid H_0) = 0.156$ $\quad W = \langle u(1-\alpha, n-1), +\infty) = \langle 16.92, +\infty)$

Ponieważ $P > \alpha$ ($u \notin W$) więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.
Oznacza to, że na poziomie istotności $\alpha=0.05$ odchylenie standardowe próbki nie jest znacząco większe od wymaganego $\sigma=0.24$ mg.

Testy istotności dla wariancji

<u>Przykład:</u> Korzystając z danych z poprzedniego przykładu, przeprowadzić dwustronny test na poziomie istotności α=0.05.

- H_0: σ=0.24 mg, H_1: $\sigma \neq$0.24 mg
- $\alpha = 0.05$, $n = 10$, $u(\alpha/2, n-1) = u(0.025, 9) = 2.70$, $u(1-\alpha/2, n-1) = u(0.975, 9) = 19.02$
- $W = (0, -u(\alpha/2, n-1)\rangle \cup \langle u(1-\alpha/2, n-1), +\infty) = (0, 2.70\rangle \cup \langle 19.02, +\infty)$

Ponieważ $u \notin W$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że na poziomie istotności α=0.05 odchylenie standardowe próbki nie jest znacząco różne od σ=0.24.

- Badana cecha x populacji ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ o nieznanych μ i σ. Duża próbka (n≥50). Do weryfikacji hipotezy H_0: $\sigma=\sigma_0$ wykorzystujemy statystykę:

$$z = \sqrt{\frac{2(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

H. alternatywna	H_1: $\sigma=\sigma_1<\sigma_0$	H_1: $\sigma=\sigma_1>\sigma_0$	H_1: $\sigma=\sigma_1\neq\sigma_0$
Zbiór krytyczny	$(0,\ -z(1-\alpha)\rangle$	$\langle z(1-\alpha), \infty)$	$(-\infty,\ -z(1-\alpha/2)\rangle \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty)$

Testy istotności dla wariancji

<u>Przykład:</u> Do tarczy oddano n=50 strzałów. Mierząc odległości trafień od środka tarczy okazało się, że ich wariancja jest równa $s_x^2 = 109.5$ cm^2. Zakładając, że odległości te mają rozkład normalny, zweryfikować na poziomie istotności α=0.05, hipotezę H_0: σ^2=100 cm^2 jeśli hipotezą alternatywną jest H_1: σ^2>100 cm^2.

- H_0: σ^2=100 cm^2, H_1: σ^2>100 cm^2
- α=0.05, n=50, $z(1-\alpha) = z(0.95) = 1.64$
- $$z = \sqrt{\frac{2(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3} = \sqrt{\frac{2\times(50-1)\times 109.5}{100}} - \sqrt{2\times 50-3} \cong 0.51$$
- $$W = \langle z(1-\alpha), +\infty) = \langle 1.64, +\infty)$$

$z \notin$ W a więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że na poziomie istotności α=0.05 odchylenie standardowe próbki nie jest znacząco różne od σ=100.

Rachunki z wykorzystaniem statystyki χ^2:

- α=0.05, n=50, $u(1-\alpha, n-1) = u(0.95,49) = 66.34$
- $$u = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(50-1)\times 109.5}{100} = 53.66$$
- $$W = \langle u(1-\alpha, n-1), +\infty) = \langle 66.34, +\infty) \qquad \Rightarrow \qquad u \notin W$$