Rachunek prawdopodo-bieństwa i statystyka

Wykład 14

Przedział ufności dla stosunku wariancji

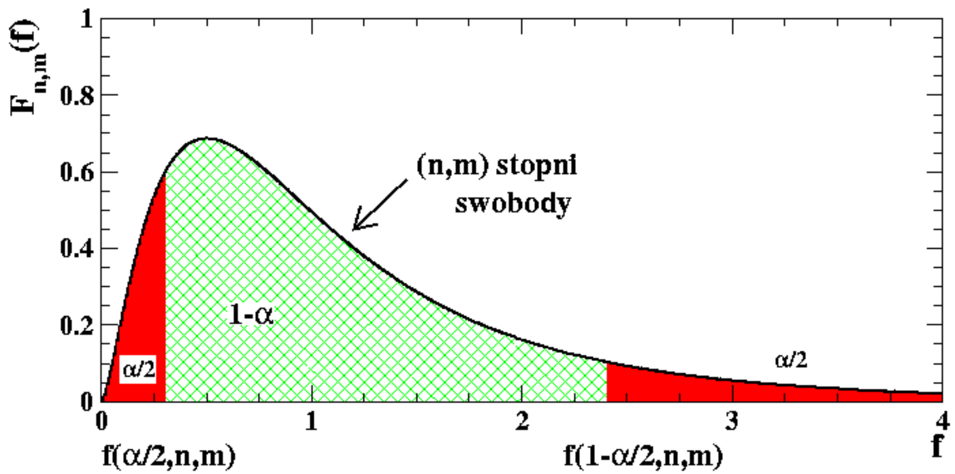
- Rozważmy dwie niezależne próbki losowe z rozkładów normalnych, odpowiednio $\mathcal{N}_1(\mu_1,\sigma_1)$ i $\mathcal{N}_2(\mu_2,\sigma_2)$ o nieznanych parametrach μ i σ.

Wiemy, że statystyka $\mathbf{F} = \dfrac{u_1/(n_1-1)}{u_2/(n_2-1)} = \dfrac{s_{x_1}^2/\sigma_1^2}{s_{x_2}^2/\sigma_2^2}$ podlega rozkładowi

$\mathbf{F}$ Fishera-Snedecora o $(n_1-1,\ n_2-1)$ stopniach swobody.

Korzystając z kwantyli rozkładu $\mathbf{F}$ znajdujemy:

$$P\left(f\left(\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right) < \frac{s_{x_1}^2/\sigma_1^2}{s_{x_2}^2/\sigma_2^2} < f\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)\right) = 1-\alpha$$



Przedział ufności dla stosunku wariancji

a stąd przedział ufności dla stosunku wariancji:

$$\frac{1}{f\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)}\frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{f\left(\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)}\frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2}$$

Ponieważ statystyka $\mathbf{F}' = \frac{1}{\mathbf{F}} = \frac{s_{x_2}^2/\sigma_2^2}{s_{x_1}^2/\sigma_1^2}$ ma również rozkład $\mathbf{F}$, ale o liczbie stopni swobody (n_2-1, n_1-1), więc pomiędzy kwantylami rozkładu $\mathbf{F}$ zachodzi związek:

$$f(p, n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{f(1-p, n_2-1, n_1-1)}$$

a stąd przedział ufności dla σ_1^2/σ_2^2 można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{f\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)}\frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < f\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)\frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2}$$

Weryfikacja hipotezy o równości wariancji

- Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$ o nieznanych parametrach. Do weryfikacji hipotezy H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ na podstawie dwóch niezależnych prób prostych o licznościach odpowiednio n_1 i n_2 pobranych z tych populacji, wykorzystuje się statystykę:

$$F = \frac{u_1/(n_1-1)}{u_2/(n_2-1)} = \frac{s_{x_1}^2/\sigma_1^2}{s_{x_2}^2/\sigma_2^2} = \left\| H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \right\| = \frac{s_{x_1}^2}{s_{x_2}^2}$$

która przy założeniu prawdziwości H_0 ma rozkład F o (n_1-1, n_2-1)

Gdy hipotezą alternatywną jest H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ wtedy jako statystykę testową wykorzystujemy:

$$F_1 = \max(F, F') = \frac{\max\left(s_{x_1}^2, s_{x_2}^2\right)}{\min\left(s_{x_1}^2, s_{x_2}^2\right)}$$

H. alternatywna	H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
Zbiór krytyczny	$\langle f(1-\alpha, n_2-1, n_1-1), \infty)$	$\langle f(1-\alpha, n_1-1, n_2-1), \infty)$	$\langle f(1-\alpha/2, n_l-1, n_m-1), \infty)$

n_l – liczba stopni swobody statystyki (licznik) $\max\left(s_{x_1}^2, s_{x_2}^2\right)$

n_m – liczba stopni swobody statystyki (mianownik) $\min\left(s_{x_1}^2, s_{x_2}^2\right)$

Przedział ufności dla stosunku wariancji

Przykład: W celu zbadania wpływu melatoniny na bezsenność podano dwóm grupom pacjentów różne dawki tego hormonu (odpowiednio 5 mg i 15 mg) i zmierzono czas do momentu zaśnięcia (określony na podstawie rejestracji fal mózgowych).
Uzyskano następujące wyniki: Grupa I $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 14.8$ min, $s_1^2 = 4.36$ min^2;
Grupa II $n_2 = 12$, $\bar{x}_2 = 10.2$ min, $s_2^2 = 4.66$ min^2. Zakładając, że populacje w obu przypadkach mają rozkłady normalne, znajdź 90% realizację przedziału ufności dla stosunku wariancji.

$$f\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right) = f(0.95, 9, 11) \cong 2.90$$

$$f\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right) = f(0.95, 11, 9) \cong 3.10$$

$$\frac{1}{2.90}\cdot\frac{4.36}{4.66} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3.10\cdot\frac{4.36}{4.66}$$

$$0.32 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2.90$$

Zweryfikować na poziomie istotności α=0.01 hipotezę o równości obu wariancji wobec hipotezy alternatywnej, mówiącej, że wariancje obu rozkładów są różne.

- $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \qquad H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1 \qquad \alpha=0.01, \quad n_1=10, \quad n_2=12$
- $f = \dfrac{\max(s_1^2, s_2^2)}{\min(s_1^2, s_2^2)} = \dfrac{4.66}{4.36} = 1.07$
- $W = \langle f(1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1), +\infty) = \langle f(0.995, 11, 9), +\infty) = \langle 6.33, +\infty)$

Ponieważ $f \notin W$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

P. ufności dla różnicy wartości oczekiwanych

- Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$ o znanych σ_1 i σ_2 i nieznanych μ_1 i μ_2.

  Wiemy, że statystyka:

$$\mathbf{z} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/\mathbf{n}_1 + \sigma_2^2/\mathbf{n}_2}}$$

  ma standaryzowany rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$.

  Korzystając z kwantyli rozkładu normalnego znajdujemy:

$$\mathbf{P}\left(z\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right) = 1 - \alpha$$

  a stąd:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2 - z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2 + z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Hipotezy o równości wartości oczekiwanych

- Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$ o znanych σ_1 i σ_2 i nieznanych μ_1 i μ_2. Do weryfikacji hipotezy H_0: $\mu_1=\mu_2$ na podstawie dwóch niezależnych prób prostych o licznościach odpowiednio n_1 i n_2 pobranych z tych populacji, wykorzystuje się statystykę:

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \left\| H_0 : \mu_1 = \mu_2 \right\| = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

W zależności od hipotezy alternatywnej H_1 zbiór krytyczny W ma postać:

H. alternatywna	H_1: $\mu_1<\mu_2$	H_1: $\mu_1>\mu_2$	H_1: $\mu_1\neq\mu_2$
Zbiór krytyczny	$(-\infty,-z(1-\alpha)\rangle$	$\langle z(1-\alpha), \infty)$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)\rangle \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty)$

Hipotezy o równości wartości oczekiwanych

Przykład: Znajdź 95% realizację przedziału ufności dla różnicy wartości oczekiwanych populacji normalnych o nieznanych wartościach oczekiwanych i znanych dyspersjach σ_1=0.73 i σ_2=0.89 z których pobrano próby losowe uzyskując następujące wyniki:

$$n_1 = 25 \qquad \bar{x}_1 = 6.9 \qquad n_2 = 20 \qquad \bar{x}_2 = 6.7$$

$$6.9 - 6.7 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{(0.73)^2}{25} + \frac{(0.89)^2}{20}} < \mu_1 - \mu_2 < 6.9 - 6.7 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{(0.73)^2}{25} + \frac{(0.89)^2}{20}}$$

$$-0.28 < \mu_1 - \mu_2 < 0.68$$

Przykład: Dane jak w poprzednim przykładzie. Przetestować na poziomie istotności α=0.05 hipotezę H$_0$: $\mu_1=\mu_2$ wobec hipotezy alternatywnej H$_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$.

$$n_1 = 25 \qquad \bar{x}_1 = 6.9 \qquad \sigma_1 = 0.73 \qquad n_2 = 20 \qquad \bar{x}_2 = 6.7 \qquad \sigma_2 = 0.89$$

$$\alpha = 0.05 \qquad \Rightarrow \qquad z(1-\alpha/2) = z(0.975) = 1.96$$

$$\mathrm{W} = (-\infty, -1.96\rangle \cup \langle 1.96, \infty)$$

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = 0.81 \qquad \Rightarrow \qquad z \notin \mathrm{W} \qquad \Rightarrow \qquad \text{akceptujemy hipotezę } \mathrm{H}_0$$

P. ufności dla różnicy wartości oczekiwanych

- Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$ o nieznanych średnich μ_1 i μ_2 oraz nieznanych ale jednakowych dyspersjach σ_1 i σ_2 ($\sigma_1=\sigma_2$). Wiemy, że statystyka:

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{n_1-1}{n_2}s_{\bar{x}}^2+\frac{n_2-1}{n_1}s_{\bar{y}}^2}}\xrightarrow[n_1\cong n_2\to\infty]{}\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s_{\bar{x}}^2+s_{\bar{y}}^2}}$$

ma rozkład Studenta o n_1+n_2-2 stopniach swobody.

Wprowadzając oznaczenie:

$$s_{\bar{x}-\bar{y}}=\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{n_1-1}{n_2}s_{\bar{x}}^2+\frac{n_2-1}{n_1}s_{\bar{y}}^2}\xrightarrow[n_1\cong n_2\to\infty]{}\sqrt{s_{\bar{x}}^2+s_{\bar{y}}^2}$$

oraz korzystając z kwantyli rozkładu Studenta znajdujemy:

$$P\left(t\left(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)<\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{s_{\bar{x}-\bar{y}}}<t\left(1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)\right)=1-\alpha$$

a stąd:

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-t\left(1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)s_{\bar{x}-\bar{y}}<\mu_1-\mu_2<\bar{x}_1-\bar{x}_2+t\left(1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)s_{\bar{x}-\bar{y}}$$

Hipotezy o równości wartości oczekiwanych

- Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$ o nieznanych średnich μ_1 i μ_2 oraz nieznanych ale jednakowych dyspersjach σ_1 i σ_2 ($\sigma_1=\sigma_2$). Do weryfikacji hipotezy H_0: $\mu_1=\mu_2$ na podstawie dwóch niezależnych prób prostych o licznościach odpowiednio n_1 i n_2 pobranych z tych populacji, wykorzystuje się statystykę:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{n_1-1}{n_2}s_{\bar{x}}^2 + \frac{n_2-1}{n_1}s_{\bar{y}}^2}}$$

ma rozkład Studenta o n_1+n_2-2 stopniach swobody (ozn. $N \equiv n_1+n_2$)

H. alternatywna	H_1: $\mu=\mu_1<\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1>\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1\neq\mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -t(1-\alpha, N-2)\rangle$	$\langle t(1-\alpha, N-2), \infty)$	$(-\infty, -t(1-\alpha/2, N-2)\rangle \cup \langle t(1-\alpha/2, N-2), \infty)$

<u>Uwaga:</u> W przypadku licznych próbek ($n_1\geq30$ i $n_2\geq30$) kwantyle rozkładu Studenta przybliżamy kwantylami rozkładu normalnego.

Hipotezy o równości wartości oczekiwanych

- Dane są dwie populacje, w których badana cecha x ma rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$ o nieznanych średnich μ_1 i μ_2 oraz nieznanych, dyspersjach σ_1 i σ_2. Do weryfikacji hipotezy H_0: $\mu_1=\mu_2$ na podstawie dwóch niezależnych prób prostych o licznościach odpowiednio n_1 i n_2 pobranych z tych populacji, wykorzystuje się statystykę Cochrana - Coxa:

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_{\bar{x}-\bar{y}}} \xrightarrow[n_1 \cong n_2 \to \infty]{} c=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{s_{\bar{x}}^2+s_{\bar{y}}^2}}$$

Kwantyle rzędu p zmiennej c:

$$c(p,n_1,n_2)\cong\left(\frac{s_1^2}{n_1}t(p,n_1-1)+\frac{s_2^2}{n_2}t(p,n_2-1)\right)\Big/\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)$$

H. alternatywna	H_1: $\mu=\mu_1<\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1>\mu_0$	H_1: $\mu=\mu_1\neq\mu_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty,-c(1-\alpha,n_1,n_2)\rangle$	$\langle c(1-\alpha,n_1,n_2),\infty)$	$(-\infty,-c(1-\alpha/2,n_1,n_2)\rangle \cup \langle c(1-\alpha/2,n_1,n_2),\infty)$

Różnica wartości oczekiwanych -przykłady

<u>Przykład:</u> W celu zbadania wpływu snu na zdolność zapamiętywania wybrano losowo dwie grupy, każda po n=15 osób i każdej z nich zaprezentowano film dokumentalny o życiu zwierząt w Arktyce. Pierwszej grupie pokazano film o 19:00, a następnie po przespanej nocy, o 7:00 zadano 50 szczegółowych pytań dotyczących filmu. Drugiej grupie film pokazano o 7:00, a następnie po całodziennej normalnej aktywności, zadano identyczne pytania o 19:00. Średnie liczby poprawnych odpowiedzi oraz ich odchylenia standardowe wyniosły odpowiednio: $\bar{x}_1 = 37.2$, $s_1^2 = 3.33$, $\bar{x}_2 = 35.6$, $s_2^2 = 3.24$. Zakładając, że obie populacje mają rozkłady normalne oraz, że $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ znajdź 95% realizację przedziału ufności dla różnicy wartości oczekiwanych $\mu_1 - \mu_2$.

$$\alpha = 0.05, \quad n = 15 \qquad \Rightarrow \qquad t\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n + n - 2\right) = t(0.975, 28) = 2.048$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 37.2 - 35.6 = 1.6 \qquad s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{30}{28}}\sqrt{\frac{14}{15}\frac{3.33}{15} + \frac{14}{15}\frac{3.24}{15}} = 0.662$$

$$1.6 - 2.048 \times 0.662 < \mu_1 - \mu_2 < 1.6 + 2.048 \times 0.662 \qquad \Rightarrow \qquad 0.24 < \mu_1 - \mu_2 < 2.96$$

Różnica wartości oczekiwanych -przykłady

<u>Przykład:</u> Dane jak w poprzednim przykładzie. Wykonaj obustronny test hipotezy H_0: $\mu_1=\mu_2$ na poziomie istotności α=0.05.

$$\overline{x}_1 = 37.2 \qquad s_1^2 = 3.33 \qquad \overline{x}_2 = 35.6 \qquad s_2^2 = 3.24$$

- $H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- $\alpha = 0.05, \quad n_1 = n_2 = n = 15 \qquad \Rightarrow \qquad t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n+n-2\right) = t(0.975, 28) = 2.048$
- $W = (-\infty, -t(1-\alpha/2, n_1+n_2-2)\rangle \cup \langle t(1-\alpha/2, n_1+n_2-2), \infty) = (-\infty, -2.048\rangle \cup \langle 2.048, \infty)$
- $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 37.2 - 35.6 = 1.6 \qquad s_{\overline{x}_1-\overline{x}_2} = \sqrt{\frac{30}{28}}\sqrt{\frac{14}{15}\frac{3.33}{15} + \frac{14}{15}\frac{3.24}{15}} = 0.662$

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s^2_{\overline{x}_1-\overline{x}_2}} \frac{1.6}{0.662} = 2.42$$

Ponieważ $t \in W$ więc na poziomie istotności α=0.05 odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej H_1.
Oznacza to, że na poziomie istotności α=0.05 obie wartości oczekiwane są różne.

Weryfikacja hipotezy o wskaźniku struktury

- Badana cecha x populacji ma rozkład dwupunktowy o nieznanym parametrze p. Do weryfikacji hipotezy H_0: $p=p_0$ wykorzystujemy wskaźnik struktury z próby, k/n, gdzie k oznacza liczbę elementów wyróżnionych w próbie o liczności n.

  Gdy liczność próby n≥100, do weryfikacji hipotezy H_0 stosujemy statystykę testową:

$$z = \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

  która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

  Dla małej próby (n<100) najpierw stosujemy przekształcenie: $\varphi = 2\arcsin\sqrt{\frac{k}{n}}$

  Ponieważ przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0, zmienna losowa φ ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(2\arcsin\sqrt{p_0}, 1/\sqrt{n})$, więc zmienna

$$z = \left(2\arcsin\sqrt{\frac{k}{n}} - 2\arcsin\sqrt{p_0}\right)\sqrt{n}$$

  ma w przybliżeniu standaryzowany rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Weryfikacja hipotezy o wskaźniku struktury

W zależności od hipotezy alternatywnej zbiór krytyczny W ma postać:

H. alternatywna	H_1: $p=p_1<p_0$	H_1: $p=p_1>p_0$	H_1: $p=p_1\neq p_0$
Zbiór krytyczny	$(-\infty, -z(1-\alpha)\rangle$	$\langle z(1-\alpha), \infty)$	$(-\infty, -z(1-\alpha/2)\rangle \cup \langle z(1-\alpha/2), \infty)$

Przykład: Z partii butelek dostarczonych do mleczarni sprawdzono 900 butelek i znaleziono wśród nich 18 butelek wybrakowanych. Zweryfikować na poziomie istotności α=0.05, hipotezę, że procent butelek wybrakowanych jest równy 3%, wobec hipotezy alternatywnej mówiącej, że wybrakowanych butelek jest więcej.

- $H_0 : p = p_0 = 0.03 \qquad H_1 : p = p_1 > 0.03$
- $\alpha = 0.05, \quad z(1-\alpha) = z(0.95) = 1.64$
- $W = \langle z(1-\alpha), \infty) = \langle 1.64, \infty)$
- $z = \dfrac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \dfrac{18 - 900 \times 0.03}{\sqrt{900 \times 0.03 \times 0.97}} \cong -1.76$

Ponieważ $z \notin W$ więc na poziomie istotności α=0.05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

Hipotezy o równości wskaźników struktury

- Badana cecha X w dwóch populacjach ma rozkład dwupunktowy z parametrami p_1 i p_2. Weryfikujemy hipotezę H_0: $p_1=p_2$.

Gdy liczności obu prób $n_1, n_2 \geq 100$, do weryfikacji hipotezy H_0 stosujemy statystykę testową:

$$z = \frac{\frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

gdzie $p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$, która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład asymptotycznie normalny $\mathcal{N}(0,1)$.

Gdy liczności obu prób nie są duże, wykorzystujemy statystykę:

$$z = \left(2\arcsin\sqrt{\frac{k_1}{n_1}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{k_2}{n_2}}\right)\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma w przybliżeniu standaryzowany rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Hipotezy o równości wskaźników struktury

W zależności od hipotezy alternatywnej zbiór krytyczny W ma postać:

H. alternatywna	H_1: $p_1<p_2$	H_1: $p_1>p_2$	H_1: $p_1 \neq p_2$
Zbiór krytyczny	$(-\infty,\ -z(1-\alpha)\rangle$	$\langle z(1-\alpha),\ \infty)$	$(-\infty,\ -z(1-\alpha/2)\rangle \cup \langle z(1-\alpha/2),\ \infty)$

<u>Przykład:</u> Przez okres czterech tygodni stawiano prognozy meteorologiczne dwiema różnymi metodami. Prognozy stawiane pierwszą metodą okazały się trafne w 21 dniach, drugą zaś w 17. Czy na poziomie istotności a=0.05 można twierdzić, że pierwsza z metod jest lepsza od drugiej?

- $H_0: p_1 = p_2$ $\qquad H_1: p_1 > p_2$
- $\alpha = 0.05$, $n_1=n_2=n=28$, $k_1=21$, $k_2=17$, $z(1-\alpha) = z(0.95) = 1.64$
- $W = \langle z(1-\alpha), \infty) = \langle 1.64, \infty)$
- $z = \left(2\arcsin\sqrt{\frac{k_1}{n_1}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{k_2}{n_2}}\right)\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} = \left(2\arcsin\sqrt{\frac{21}{28}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{17}{28}}\right)\sqrt{\frac{28}{2}} \cong 1.15$

Ponieważ $z \notin$ W więc na poziomie istotności α=0.05 nie ma podstaw stwierdzenia, że pierwsza metoda jest lepsza od drugiej.

Testy zgodności

Testem zgodności nazywamy test do weryfikacji hipotezy (prostej lub złożonej) dotyczącej zgodności pomiędzy rozkładem zbioru wartości w próbie i rozkładem teoretycznym.

Przykład: Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą wartościami próby losowej pobranej z populacji o nieznanej dystrybuancie. Wysuwamy hipotezę:

H_0: {dystrybuantą badanej cechy jest $F_0(x)$},

lub H_0: {gęstością p-twa badanej cechy jest $f_0(x)$} dla zmiennej ciągłej,

lub H_0: {funkcją p-twa badanej cechy jest $P(x=x_i)=p_i$} dla zmiennej skokowej.

Powyższe hipotezy określa się jako **nieparametryczne**.

W zależności od tego czy F_0, f_0, P są funkcjami całkowicie określonymi czy też zależnymi od nieznanych parametrów mówimy o hipotezach **prostych** lub **złożonych**.

Najczęściej wykorzystywanym testem zgodności jest **test χ^2 Pearsona**.

Test χ^2 Pearsona

❖ Weryfikujemy hipotezę H_0: $F_0(x)$ gdy F_0 jest całkowicie określona.

Próbkę danych dzielimy na k klas konstruując tzw. szereg rozdzielczy.

Nr klasy	1	2	...	k	
Granice klas	$\langle g_0, g_1\rangle$	$(g_1, g_2\rangle$	...	$(g_{k-1}, g_k\rangle$	
Liczności n_i doświadczalne	n_1	n_2	...	n_k	$\sum_i n_i = n$
Liczności np_i teoretyczne	np_1	np_2	...	np_k	$\sum_i np_i = n$

Jeśli hipoteza H_0 jest prawdziwa to p-twa p_i że badana cecha x przyjmie wartość należącą do i-tej klasy można wyznaczyć z zależności: $\mathbf{p_i = F_0(g_i) - F_0(g_{i-1})}$

Jako miarę rozbieżności pomiędzy pomiarami a przewidywaniami teoretycznymi przyjmujemy wartość statystyki:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

zależnej od zmiennych losowych N_i, których wartości n_i spełniają warunek $\sum n_i = n$. Dla n -> ∞ podlega ona rozkładowi χ^2 o k–1 stopniach swobody.

Test χ^2 Pearsona

Zbiorem krytycznym testu jest W = $\langle u(1-\alpha,n), +\infty)$. Jeśli obliczona na podstawie danych wartość statystyki $\chi^2_d \in \mathbf{W}$ wówczas hipotezę H_0 odrzucamy na poziomie istotności α.

Przykład: W 200 rzutach monetą 115 razy wypadł orzeł i 85 razy reszka. Sprawdzić na poziomie istotności α=0.01 i α=0.05 hipotezę, że moneta jest uczciwa.

$$n_1 = 115 \qquad n_2 = 85 \qquad p_1 = 0.5 \qquad p_2 = 0.5 \qquad k = 2$$

$$\chi^2_d = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(n_i - 200\,p_i)^2}{200\,p_i} = \frac{(115-100)^2}{100} + \frac{(85-100)^2}{100} = 4.5$$

$$\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad u(1-\alpha, k-1) = u(0.95,1) = 3.84 \quad \Rightarrow \quad W = \langle 3.84, \infty)$$

Ponieważ $\chi^2_d \in W$ więc na poziomie istotności α=0.05 odrzucamy hipotezę, że moneta jest uczciwa.

$$\alpha = 0.01 \quad \Rightarrow \quad u(1-\alpha, k-1) = u(0.99,1) = 6.63 \quad \Rightarrow \quad W = \langle 6.63, \infty)$$

Ponieważ $\chi^2_d \notin W$ więc na poziomie istotności α=0.01 nie mamy powodu żeby odrzucić hipotezę, że moneta jest uczciwa.
Stwierdzamy, że zaobserwowane wyniki są prawdopodobnie znaczące i że moneta prawdopodobnie nie jest uczciwa.

Test χ^2 Pearsona

<u>Przykład:</u> **Wyznaczono liczby błędów przy korekcie n=500 stronicowej książki i otrzymano następujące wyniki:**

Liczba błędów b_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Liczba stron n_i	67	139	134	90	44	15	6	4	1

Zweryfikować na poziomie istotności a=0.05 hipotezę, że liczba błędów na stronie ma rozkład Poissona.

Wiemy, że nieobciążonym estymatorem parametru μ jest: $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i b_i = 2$

Hipotetyczna l. stron np_i	67.7	135.3	135.3	90.2	45.1	18.0	6.0	1.7	0.4

$$\chi^2_{\mathrm{d}} = \sum_{i=1}^{9} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 4.66$$

$$\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad u(1-\alpha, k-1) = u(0.95, 8) = 15.507 \quad \Rightarrow \quad W = \langle 15.507, \infty)$$

Ponieważ $\chi^2_{\mathrm{d}} \notin W$ więc na poziomie istotności α=0.01 nie mamy powodu aby odrzucić hipotezę, że rozkład liczby błędów na stronie książki jest rozkładem Poissona o μ=2.