

Rachunek prawdopodobo- bieństwa i statystyka

Wykład 1

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna

Dr hab. inż. Mariusz Przybycień

Literatura:

- Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, tom I i II, W. Krysicki i in., PWN 2005.
- Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, W. Feller, PWN 2006.
- Zadania z probablistyki, A. Plucińska, E. Pluciński, PWN 1983.
- Statystyka dla fizyków, R.N. Nowak, PWN, 2002.
- Statystyka dla fizyków. Ćwiczenia, R.N. Nowak, PWN, 2002.
- Analiza danych, S. Brandt, PWN, 1998.
- Wstęp do analizy błędu pomiarowego, R.J. Taylor, PWN, 2001.
- Jak analizować wyniki pomiarów, H. Abramowicz, PWN 1992.
- Probability and Statistical Inference, R.Bartoszyński, M.Niewiadowska-Bugaj, Wiley & Sons, 2007.

□ <http://home.agh.edu.pl/mariuszp>



Statystyka - podstawowe pojęcia

Statystyka – nauka zajmująca się planowaniem badań, a także zbieraniem, organizacją, prezentacją i analizą danych, oraz wyciąganiem wniosków i podejmowaniem decyzji na ich podstawie.

Słowo „statystyka” jest także używane do określenia samych danych i wielkości pochodnych.

Populacja – zbiór **wszystkich** przedstawicieli posiadających badaną cechę.

Przykład: Badania demograficzne - spis powszechny. Kontrola jakości – zbiór wszystkich urządzeń danego typu produkowanych przez fabrykę.

Próbka losowa – **reprezentatywna** próbka całej populacji, tzn. taka, która odzwierciedla wszystkie cechy i związki w niej występujące.

Przykład: Próbkami losowymi nie są np. sondaże wśród czytelników dowolnego z czasopism, wśród przechodniów na ulicy, głosowania telewidzów w programach

Mówimy, że próbka jest **prosta** jeśli rezultat wyboru jednego elementu nie ma wpływu na rezultat wyboru innego elementu.

Przykład: Losując bez zwracania kule z urny, która jest wypełniona skończoną liczbą kul białych i czarnych, mamy do czynienia z próbką, która nie jest prosta.

Zdarzenia elementarne

Zachowanie układu, którego nie możemy przewidzieć z całkowitą pewnością, nazywamy **przypadkowym**. Miarą „przypadkowości” jest **prawdopodobieństwo**.

Pojęcia pierwotne rachunku prawdopodobieństwa to **zdarzenie elementarne** i **przestrzeń zdarzeń elementarnych** Ω . Dowolny podzbiór $A \subset \Omega$ nazywamy **zdarzeniem losowym**.

Uwaga: Zdarzenia elementarne muszą być **ekskluzywne** – dane zdarzenie elementarne nie zawiera w sobie innych zdarzeń elementarnych.

Przykłady:

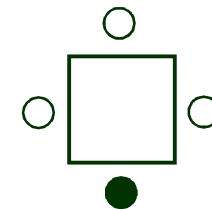
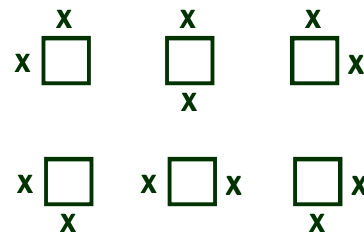
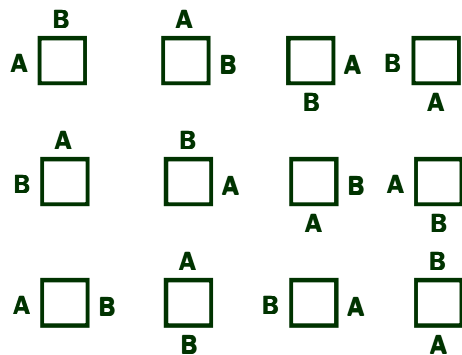
- jednokrotny rzut monetą: „orzeł” (O) i „reszka” (R) to dwa zdarzenia elementarne, które budują całą przestrzeń $\Omega = \{O, R\}$
- rzut dwoma monetami: $\Omega = \{(O,O), (O,R), (R,O), (R,R)\}$
- miesiąc urodzin: $\Omega = \{\text{Sty, Lut, Mar, Kwi, Maj, Cze, Lip, Sie, Wrz, Paź, Lis, Gru}\}$
- czas życia żarówki – zdarzenia elementarne są dowolnymi liczbami dodatnimi, $t > 0$, a przestrzeń jest nieskończona; ale może w konkretnym problemie lepiej wybrać $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ godziny/dni/miesiące.
- liczba wypadków na skrzyżowaniu w ciągu miesiąca: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ a może $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ – często prościej rozważyć nieskończony ciąg.
- jądro promieniotwórcze w kolejnych odstępach $1s$ może się rozpaść (R) lub nie (B). Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest nieskończona: R, BR, BBR, BBRR, ...

Zdarzenia elementarne - przykłady

- rzut dwoma kostkami do gry: $\Omega = \{x, y\}$, gdzie $x = 1, \dots, 6$ oraz $y = 1, \dots, 6$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- suma oczek wyrzuconych na dwóch kostkach $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- dwie osoby przy kwadratowym stole – interesuje nas zdarzenie A: „siedzą w rogu”.
przykłady różnych wyborów przestrzeni zdarzeń elementarnych:



Pojęcie prawdopodobieństwa

Pewniki rachunku prawdopodobieństwa (Kolmogorov 1933):

- 1) Każdemu zdarzeniu losowemu $A \subset \Omega$ przypisujemy liczbę $P(A)$, zwaną prawdopodobieństwem tego zdarzenia, taką że $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 2) P-two zdarzenia pewnego jest równe jedności $P(\Omega) = 1$.
- 3) P-two sumy eksklusywnych zdarzeń losowych A i B , czyli takich że $A \cap B = \emptyset$, jest równe sumie p-tw tych zdarzeń $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa:

$$P(A) \equiv \frac{n_A}{n} \equiv \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych}}$$

Definicja częstościowa prawdopodobieństwa: Miarą p-twa jest względna częstości występowania zdarzenia A kiedy liczba obserwacji dąży do nieskończoności.

Prawdopodobieństwa subiektywne: (przydatne gdy mamy do czynienia ze zdarzeniami takimi jak np. czy istnieje życie w oceanie pod powierzchnią księżyca Saturna.

- A, B, \dots traktujemy jako hipotezy (tzn. stwierdzenia które albo są prawdziwe albo fałszywe); $P(A)$ = miara naszej wiary w to, że A jest prawdziwe

Przykład: wybór pomiędzy otrzymaniem gotówki a udziałem w loterii

Zdarzenia elementarne - przykłady

Przykład: Rozmieszczenie $r = 3$ kul (rozdzielnych) w $n = 3$ komórkach:

$$1. \{abc|-|-\}$$

$$2. \{-|abc|-\}$$

$$3. \{-|-|abc\}$$

$$4. \{ab|c|-\}$$

$$5. \{ac|b|-\}$$

$$6. \{bc|a|-\}$$

$$7. \{ab|-|c\}$$

$$8. \{ac|-|b\}$$

$$9. \{bc|-|a\}$$

$$10. \{a|bc|-\}$$

$$11. \{b|ac|-\}$$

$$12. \{c|ab|-\}$$

$$13. \{a|-|bc\}$$

$$14. \{b|-|ac\}$$

$$15. \{c|-|ab\}$$

$$16. \{-|ab|c\}$$

$$17. \{-|ac|b\}$$

$$18. \{-|bc|a\}$$

$$19. \{-|a|bc\}$$

$$20. \{-|b|ac\}$$

$$21. \{-|c|ab\}$$

$$22. \{a|b|c\}$$

$$23. \{a|c|b\}$$

$$24. \{b|a|c\}$$

$$25. \{b|c|a\}$$

$$26. \{c|a|b\}$$

$$27. \{c|b|a\}$$

$$P(E_i) = \frac{1}{27}$$
$$i = 1, \dots, 27$$

- Zdarzenie A: „w jednej z komórek są co najmniej dwie kule” – zdarzenia el. 1–21
- Zdarzenie B: „pierwsza komórka nie jest pusta” – zdarzenia el. 1, 4–15, 22–27
- Zdarzenie C: „zachodzi zarówno A jak i B” – zdarzenia el. 1, 4–15
- Zdarzenie D: „zachodzi A lub B” – zdarzenia el. 1–27 (cała przestrzeń)

Zdarzenia elementarne - przykłady

Przykłady zagadnień typu „ r kul w n komórkach”:

- Dni urodzin: r – osób, $n = 365$ dni
- Wypadki: r – wypadków, $n = 7$ dni tygodnia
- Strzelanie do celu: r – trafień, n – celów
- Klasyfikacja elementów (np. ludzi) wg. kategorii (wiek): r – elementów, n – kategorii
- Opuszczanie windy przez ludzi: r – pasażerów, n – pięter
- Rzuty kośćmi do gry: r – kości (rzutów), $n = 6$ możliwych wyników danego rzutu

Przypadek kul nierozróżnialnych:

$$1. \{ \bullet \bullet \bullet | - | - \}$$

$$4. \{ \bullet \bullet | \bullet | - \}$$

$$7. \{ \bullet | - | \bullet \bullet \}$$

$$10. \{ \bullet | \bullet | \bullet \}$$

$$2. \{ - | \bullet \bullet \bullet | - \}$$

$$5. \{ \bullet \bullet | - | \bullet \}$$

$$8. \{ - | \bullet \bullet | \bullet \}$$

$$3. \{ - | - | \bullet \bullet \bullet \}$$

$$6. \{ \bullet | \bullet \bullet | - \}$$

$$9. \{ - | \bullet | \bullet \bullet \}$$

$$\blacksquare P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{27} \quad P(E_4) = \dots = P(E_9) = \frac{1}{9} \quad P(E_{10}) = \frac{2}{9}$$

$$\blacksquare P(E_i) = \frac{1}{10} \quad i = 1, \dots, 10$$

Przypadek nierozróżnialnych zarówno kul jak i komórek:

$$1. \{ \bullet \bullet \bullet | - | - \}$$

$$2. \{ \bullet \bullet | \bullet | - \}$$

$$3. \{ \bullet | \bullet | \bullet \}$$

Działania na zbiorach

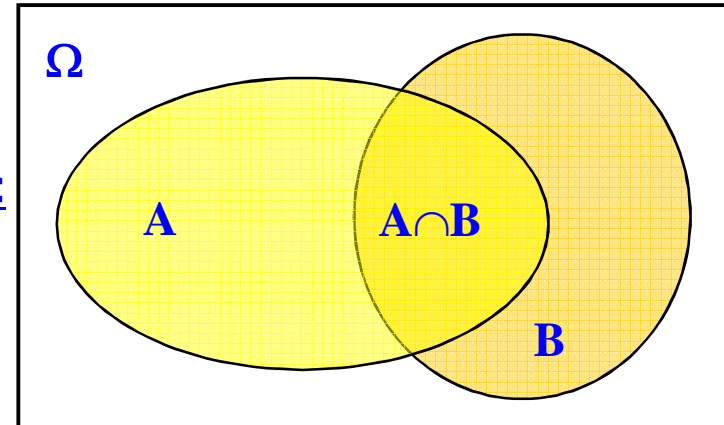
Prawa de Morgana:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Prawa rozdzielności dla dodawania i mnożenia:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Wniosek z pewnika (3):

Mamy $A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$ oraz $B = (A \cap B) \cup (B - A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B) \quad P(B) = P(A \cap B) + P(B - A \cap B)$$

Odejmując stronami dostajemy: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Przykład:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

P-two zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Formuła włączania-wyłączania

Twierdzenie: Dla n dowolnych zdarzeń A_1, A_2, \dots, A_n zachodzi:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j=1}^n P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k=1}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\ &\quad \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Dowód (indukcyjny): Oznaczenia $A \equiv \bigcup_{i=1}^n A_i$ oraz $B \equiv A_{n+1}$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j=1}^n P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) + \\ &\quad + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right) \end{aligned}$$

Stosując założenie indukcyjne do zdarzeń $A_i \cap A_n$, $i = 1, \dots, n$ i odpowiednio przestawiając wyrazy otrzymujemy tezę.

Dowód (zliczanie): Załóżmy, że określone zdarzenie elementarne występuje w k pierwszych zdarzeniach losowych A_i . Po prawej stronie formuły wł-wył zdarzenie to

występuje tylko raz: $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots \pm \binom{k}{k} = 1 - (1 + (-1))^k = 1$

Formuła włączania-wyłączania

Przykład: Ile wynosi p-two p_n , że podczas n rzutów kostką do gry, co najmniej jedna ze ścianek kostki nie wypadnie ani raz?

A_i – ścianka i nie wypadła ani raz podczas n rzutów kostką, $i = 1, \dots, n$

Obliczamy p-twa ($i < j < k < \dots$):

$$P(A_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad P(A_i \cap A_j) = \left(\frac{4}{6}\right)^n, \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \left(\frac{3}{6}\right)^n, \quad \dots$$

Szukane p-two wynosi:

$$p_n = \binom{6}{1} \left(\frac{5}{6}\right)^n - \binom{6}{2} \left(\frac{4}{6}\right)^n + \binom{6}{3} \left(\frac{3}{6}\right)^n - \binom{6}{4} \left(\frac{2}{6}\right)^n + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- $p_{10} = 0.73$ $p_{12} = 0.56$ $p_{13} = 0.49$ $p_{15} = 0.36$ $p_{20} = 0.15$ $p_{25} = 0.06$
- $1-p_n$ to p-two, że podczas n rzutów wypadnie każda ze ścianek co najmniej raz.

Twierdzenie: Formuła włączania-wyłączania pozwala znaleźć ograniczenia na szukane p-twa. Wprowadzając oznaczenia

mamy

$$p_n \equiv P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \equiv S_1 - S_2 + S_3 - \dots$$

$$p_n \leq S_1, \quad p_n \geq S_1 - S_2, \quad p_n \leq S_1 - S_2 + S_3, \quad \dots$$

Elementy kombinatoryki

Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona, to obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń będących podzbiorami tej przestrzeni ułatwiają pojęcia i twierdzenia z kombinatoryki.

Reguła iloczynu: jeśli pewną czynność wykonuje się w k niezależnych etapach, przy czym etap 1 można wykonać na n_1 sposobów, etap 2 na n_2 sposobów, ... , wreszcie etap k -ty na n_k sposobów, to liczba N sposobów jakimi można wykonać tę czynność wynosi:

$$N = n_1 n_2 \cdots n_k$$

Rozróżniamy dwa typy losowań:

- **bez powtórzeń** – raz wylosowany element nie wraca do populacji,
- **z powtórzeniami** – wylosowany element wraca do populacji przed kolejnym losowaniem.

Rozróżniamy dwa typy uporządkowania:

- kolejność losowanych elementów jest istotna (wariacje, permutacje),
- kolejność losowanych elementów nie jest istotna (kombinacje).

Wariacje z powtórzeniami

Losujemy k elementów spośród n elementów przy czym wylosowany element za każdym razem zwracamy do populacji (losowanie ze zwracaniem).

Każdy z elementów możemy wybrać na n sposobów. Oznacza to, że **liczba k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego wynosi:**

$$W_n^k = n^k$$

Przykłady:

- Rzucając k kostek do gry uzyskamy jedną z 6^k możliwych konfiguracji. Wśród nich w 5^k przypadkach nie będzie ani jednej jedynki, natomiast w $k \cdot 5^{k-1}$ przypadkach wypadnie dokładnie jedna jedynka.
- Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 można utworzyć 5^3 trzycyfrowych liczb naturalnych, w których każda z cyfr może się powtarzać dowolną ilość razy.
- Jeśli w każdej komórce może znaleźć się dowolna liczba cząstek, to k różniących cząstek możemy rozmieścić w n komórkach na n^k sposobów (rozkład Maxwella-Boltzmann).

Wariacje bez powtórzeń

Losujemy k elementów spośród n elementów przy czym wylosowanego elementu nie zwracamy do populacji (losowanie bez zwracania). Pierwszy element można wybrać na n sposobów, drugi już tylko na $n-1$, trzeci na $n-2$, natomiast k -ty tylko na $n-k+1$ sposobów. Oznacza to, że **liczba k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego wynosi:**

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykłady:

- Mając do dyspozycji sześć pionowych pasów o różnych barwach możemy utworzyć $6!/(6-3)!$ trójkolorowych flag.
- Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 można utworzyć $5!/(5-3)!$ trzycyfrowych liczb naturalnych w których każda z cyfr może wystąpić co najwyżej jeden raz.
- Jeżeli w każdej komórce może znaleźć się tylko jedna kula, to k kul (kule są makroskopowe a więc rozróżnialne) można rozmieścić w nich na $n!/(n-k)!$ sposobów. (Analogia: komórki – piętra budynku, kule – osoby w windzie)

Permutacje bez i z powtórzeniami

Losujemy n elementów spośród n elementów bez zwracania. Pierwszy element można wybrać na n sposobów, drugi już tylko na $n-1$, trzeci na $n-2$, natomiast przedostatni tylko na 2 sposoby. Oznacza to, że liczba permutacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego wynosi:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Przykład: (statystyka Maxwella-Boltzmannna) k cząstek można rozmieścić po jednej w k ustalonych komórkach na $k!$ sposobów.

Jeśli wśród n elementów mamy k różnych elementów, z których pierwszy powtarza się n_1 razy, drugi n_2 razy, ..., k -ty n_k razy ($n_1+n_2+\dots+n_k=n$), to liczba różnialnych losowań bez zwracania, czyli liczba permutacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego, w którym poszczególne elementy powtarzają się odpowiednio n_1, n_2, \dots, n_k razy wynosi:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Przykład: (statystyka M-B) w pierwszej komórce k_1 , w drugiej k_2 , ..., w n -tej k_n cząstek można rozmieścić na $P_k(k_1, k_2, \dots, k_n)$ sposobów.

Kombinacje bez powtórzeń

Losujemy k elementów spośród n elementów przy czym wylosowanego elementu nie zwracamy do populacji (losowanie bez zwracania). Nie interesuje nas również kolejność wylosowanych elementów. Mamy więc do czynienia z k -elementowymi podzbiorami zbioru n -elementowego.

Liczba k -elementowych kombinacji bez powtórzeń z n -elementowego zbioru wynosi:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykłady:

- Z 10 osób możemy utworzyć trzy zespoły liczące odpowiednio po 5, 3 i 2 osoby na $\binom{10}{5}\binom{5}{3} = \frac{10!}{5!(10-5)!} \frac{5!}{3!(5-3)!} = 2520$ sposobów.
- Na ile sposobów można rozmieścić 20 kul w trzech komórkach, tak aby w pierwszej było ich 10, w drugiej 6, a w trzeciej 4? Odpowiedź: $\binom{20}{10}\binom{10}{6}$
- Jeżeli w każdej komórce może znaleźć się tylko jedna cząstka, to k nierozróżnialnych cząstek można rozmieścić w $n \geq k$ komórkach na $\binom{n}{k}$ sposobów (rozkład Fermiego-Diraca).

Kombinacje z powtórzeniami

Rozważmy elementy n różnych rodzajów. Elementy tego samego rodzaju traktujemy jako nierozróżnialne. Każdy zbiór k elementowy ($k \leq n$) gdzie każdy element należy do jednego z tych n rodzajów nazywamy k -elementową kombinacją z powtórzeniami z n rodzajów elementów.

Liczba k -elementowych kombinacji z powtórzeniami z elementów n rodzajów jest równa:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Przykłady:

- Rozpatrzmy rozmieszczenie $k = 8$ nierozróżnialnych kul w $n = 6$ komórkach
|●●●|●|||●●●| - liczba rozróżnialnych rozmieszczeń wynosi $\bar{C}_6^8 = \binom{13}{8} = 1287$
- Rzucając r nierozróżnialnych kostek do gry, otrzymamy $\bar{C}_6^r = \binom{r+5}{r} = \binom{r+5}{5}$ nierozróżnialnych konfiguracji (komórki to liczby oczek, kule to kostki).
- Jeśli w każdej komórce może znaleźć się dowolna liczba cząstek, to k nierozróżnialnych cząstek możemy rozmieścić w n komórkach na \bar{C}_n^k sposobów (rozkład Bosego-Einsteina). Wszystkie komórki będą zajęte w \bar{C}_n^{k-n} przypadkach.

Przykład: mechanika statystyczna

Każdy możliwy stan układu to punkt w przestrzeni fazowej.

- Statystyka M-B (cząstki rozróżnialne, dowolna liczba cząstek w komórce): $W_n^k = n^k$
- Statystyka B-E (cząstki nierozróżnialne, dowolna liczba cząstek w komórce):

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

- Statystyka F-D (cząstki nierozróżnialne, co najwyżej jedna cząstka w komórce):

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- p-two rozmieszczenia k cząstek po jednej w k ustalonych komórkach:

$$\text{M-B: } p = \frac{k!}{n^k} \quad \text{B-E: } p = \frac{1}{\bar{C}_n^k} = \frac{k!(n-1)!}{(n+k-1)!} \quad \text{F-D: } p = \frac{1}{C_n^k} = \frac{k!(n-k)!}{n!}$$

- Statystyka B-E:

- wszystkie komórki zajęte: $\bar{C}_n^{k-n} = \binom{n+k-n-1}{k-n} = \frac{(k-1)!}{(k-n)!(n-1)!} = \binom{k-1}{n-1}$

- dokładnie m cząstek w ustalonej komórce: $\bar{C}_{n-1}^{k-m} = \binom{n+k-m-2}{k-m}$

- dokładnie m cząstek w jednej z komórek: $n \bar{C}_{n-1}^{k-m}$

Prawdopodobieństwo - przykłady

Przykład 1: Winda z 7 pasażerami jedzie przez 10 pięter. Jaka jest szansa, że ludzie będą wysiadali pojedynczo na piętrach?

Analogia: $k=7$ kul które mamy rozmieścić w $n=10$ komórkach. Każdy przypadek oddzielnego wysiadania odpowiada losowaniu bez zwracania. Sytuację gdy po kilku pasażerów może wysiąść na jednym z pięter możemy opisać jako losowanie ze zwracaniem. Oczywiście pasażerowie są rozróżnialni i jest istotne to kto wysiądzie na którym piętrze. Szukane prawdopodobieństwo jest więc równe:

$$P = \frac{V_{10}^7}{W_{10}^7} \approx 0.06$$

Przykład 2: Wyciągamy 5 kart z talii 52 dobrze potasowanych kart. Jakie jest p-two, że są wśród nich a) 4 asy, b) 4 asy i jeden król, c) trzy 10-tki i dwa walety, d) 9-tka, 10-tka, walet, królowa i król, e) trzy są tego samego koloru i dwie inne, f) co najmniej jeden as?

$$\text{a) } P = \frac{C_4^4 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{54145} \quad \text{b) } P = \frac{C_4^4 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{649740} \quad \text{d) } P = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{64}{162435}$$

$$\text{c) } P = \frac{C_4^3 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{1}{108290} \quad \text{e) } P = \frac{4 C_{13}^3 \cdot 3 C_{13}^2}{C_{52}^5} = \frac{429}{4165} \quad \text{f) } P = 1 - \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} = 1 - \frac{35673}{54145} = \frac{18482}{54145}$$