Rachunek prawdopodo-
bieństwa i statystyka

Wykład 4

Niezależność zmiennych losowych

Definicja: Zmienne X i Y nazywamy statystycznie niezależnymi zmiennymi losowymi, jeśli dla dowolnych zbiorów A i B na prostej (takich jak punkt lub przedział), zdarzenia losowe $X \in A$ i $Y \in B$ są niezależne:

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

W szczególności dla $X \leqslant x$ i $Y \leqslant y$ mamy: $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$

Dla ciągłej zmiennej losowej, różniczkując obie strony względem x i y dostajemy:

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

W przypadku dyskretnej zmiennej losowej (zbiory A i B to punkty) warunek niezależności zmiennych losowych K i M sprowadza się do żądania:

$$P(K = k,\ M = m) = P(K = k)P(M = m)$$

dla wszystkich możliwych wartości k i m.

Oznacza to, że zmienne K i M są niezależne gdy:

$$P_{k,m} = P_{k,\bullet}\cdot P_{\bullet,m}$$

Funkcje zmiennych losowych dyskretnych

<u>Przykład:</u> Niech zmienna losowa $\mathbf{k}$ ma rozkład p-twa określony tabelką:

k	-2	-1	0	1
$P(k)$	1/4	1/8	1/8	1/2

Znajdź rozkład p-twa zmiennej losowej $\mathbf{m} = |\mathbf{k}|$

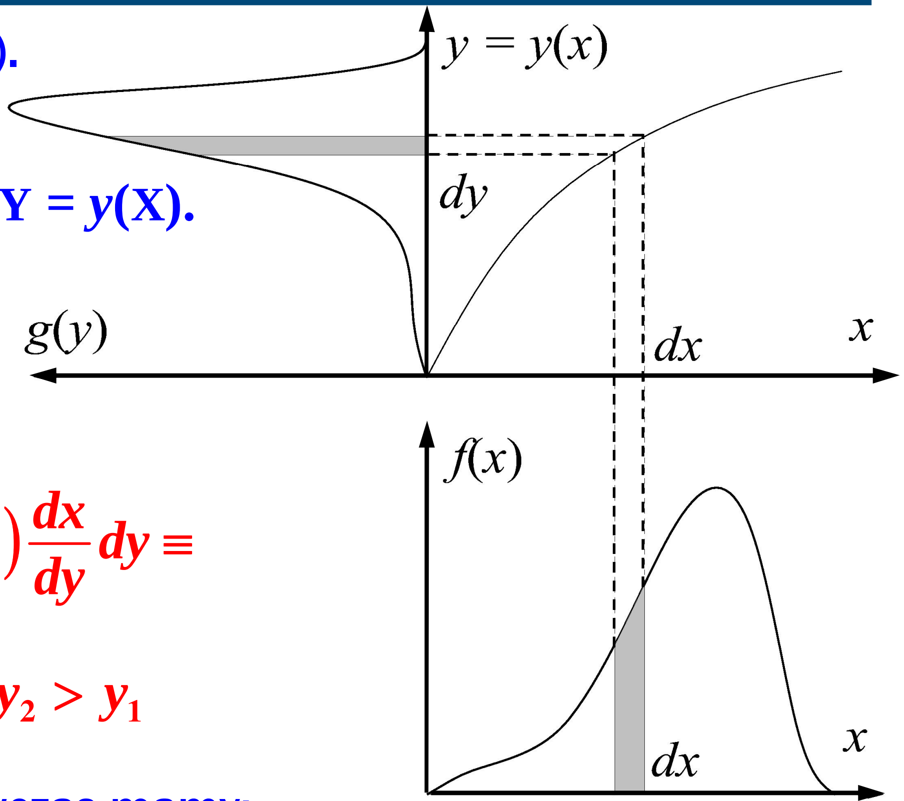
Nowa zmienna losowa przyjmuje wartości określone przez wartości funkcji $\mathbf{m} = \mathbf{h}(\mathbf{k})$ na zbiorze starej zmiennej losowej $\mathbf{k}$. Natomiast p-twa $\mathbf{P}'(\mathbf{m})$ nowej zmiennej są równe p-twom $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ starej zmiennej, jeśli odwzorowanie jest jednoznaczne, lub sumą odpowiednich p-tw np. $P(k_1)+P(k_2)$ jeśli wartości k_1 i k_2 są odwzorowywane na jedną wartość nowej zmiennej.

Rozkład p-twa zmiennej $\mathbf{m} = |\mathbf{k}|$ dane jest przez:

m	0	1	2
$P'(m)$	1/8	5/8	1/4

<u>Przykład:</u> Jeśli zmienna losowa $\mathbf{k}$ przebiega wartości …, $-2, -1, 0, 1, 2$, …
a jej rozkład p-twa dany jest przez $\mathbf{P}_\mathbf{k}$ to rozkład zmiennej losowej $\mathbf{m} = \mathbf{k}^2$
określony jest przez p-twa $P'_0 = P_0$, $P'_m = P_{-k}+P_k$.

Funkcje zmiennych losowych ciągłych



Dana jest zmienna losowa X o gęstości $f(x)$.

oraz ciągła i jednoznaczna funkcja $y(x)$.

Znajdź gęstość p-twa $g(y)$ zmiennej losowej $\mathrm{Y} = y(\mathrm{X})$.

Żądamy aby p-two zawarte pomiędzy dowolnymi x_1 i x_2 było równe p-twu zawartemu pomiędzy $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$:

$$\mathrm{P}(x_1 < \mathrm{X} < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y))\frac{dx}{dy}dy \equiv$$

$$\equiv \int_{y_1}^{y_2} g(y)\,dy = \mathrm{P}(y_1 < \mathrm{Y} < y_2) \quad \text{gdy} \quad y_2 > y_1$$

Jeśli pochodna jest ujemna, to $y_2 < y_1$, i wówczas mamy:

$$\mathrm{P}(x_1 < \mathrm{X} < x_2) = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y))\frac{dx}{dy}dy = -\int_{y_1}^{y_2} f(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|dy = \int_{y_2}^{y_1} f(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|dy = \int_{y_2}^{y_1} g(y)\,dy = \mathrm{P}(y_2 < \mathrm{Y} < y_1)$$

Ogólnie więc zachodzi: $g(y) = f(x(y))\left|\dfrac{dx}{dy}\right|$

Funkcje zmiennych losowych

Przykład: (odwracanie dystrybuanty) Niech zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)$. Jaki jest rozkład zmiennej losowej: $y = \mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx'$

Funkcja gęstości p-twa tej zmiennej ma postać:

$$g(y) = f(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(x(y))\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = f(x)\frac{1}{f(x)} = 1$$

Zmienna losowa Y ma rozkład ciągły i jednostajny w przedziale [0,1].

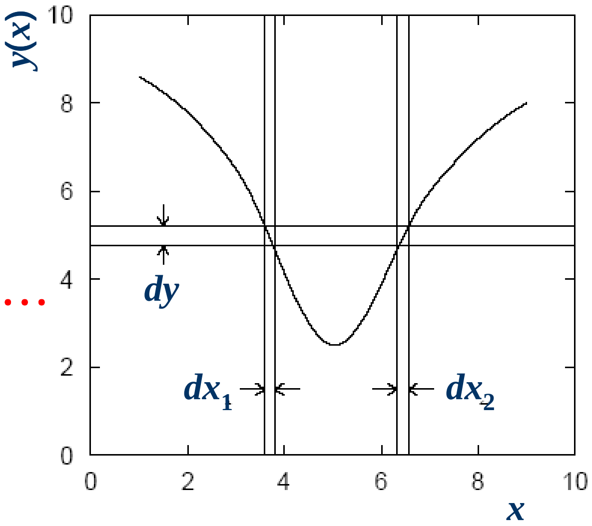
Wniosek: Dowolny rozkład możemy za pomocą transformacji przez dystrybuantę zamienić na dowolny inny rozkład.

Przykład: Rozważamy kwadraty o boku, którego długość jest zmienną losową X o rozkładzie jednostajnym $f(x) = 1$ na przedziale [0,1]. Znajdziemy rozkład $g(s)$ zmiennej losowej $S=X^2$ będącej powierzchnią kwadratów.

$$g(s) = f(x(s))\left|\frac{dx}{ds}\right| = f(\sqrt{s})\frac{1}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \qquad 0 \le s \le 1$$

Przypadek niejednoznaczny

Jeśli funkcja $y(x)$ nie jest jednoznacznie odwracalna to obszar dS musi zawierać wszystkie obszary dx pomiędzy $y(x) = y'$ i $y(x) = y'+dy'$



$$g(y) = f(x_1(y))\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + f(x_2(y))\left|\frac{dx_2}{dy}\right| + f(x_3(y))\left|\frac{dx_3}{dy}\right| + \ldots$$

Przykład: Niech zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)$, a przekształcenie ma postać $y = x^2$.

Funkcja odwrotna $x = \pm\sqrt{y}$ ma różną postać dla wartości ujemnych i dodatnich, więc:

$$g(y) = f(x_1(y))\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + f(x_2(y))\left|\frac{dx_2}{dy}\right| = \frac{f\left(-\sqrt{y}\right) + f\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}}$$

Funkcje wielu zmiennych losowych o łącznej funkcji gęstości $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$g(y')dy' = \int \ldots \int_{dS} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

dS – element objętości w przestrzeni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pomiędzy hiperpłaszczyznami

$y(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y'$ i $y(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y'+dy'$

Funkcje zmiennych losowych 2D

Niech zmienne losowe X i Y opisane będą funkcją gęstości p-twa $f(x,y)$. Chcemy znaleźć gęstość p-twa $g(u,v)$ zmiennych losowych U i V związanych ze zmiennymi X i Y wzajemnie jednoznacznymi przekształceniami $\mathrm{U}=\mathrm{U}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ oraz $\mathrm{V}=\mathrm{V}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Niech $\mathrm{X}=\mathrm{X}(\mathrm{U},\mathrm{V})$ i $\mathrm{Y}=\mathrm{Y}(\mathrm{U},\mathrm{V})$ oznaczają przekształcenia odwrotne i niech w wyniku rozważanego przekształcenia dowolny obszar prostokątny $[x_1<\mathrm{X}<x_2;\ y_1<\mathrm{Y}<y_2]$ przechodzi w obszar Q w którym jakobian jest różny od zera.

Z analizy matematycznej wiemy, że:

$$\mathrm{P}(x_1 \le \mathrm{X} \le x_2,\ \ y_1 \le \mathrm{Y} \le y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x',y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' =$$

$$= \iint_Q f(x(u,v),y(u,v))\,|\mathrm{J}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{J}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

A więc szukana funkcja gęstości zmiennych losowy U i V ma postać:

$$g(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))\,|J|$$

Ogólnie, jeśli $\begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vec{y}(\vec{x}) = (y_1(\vec{x}), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases} \Rightarrow \quad g(\vec{y}) = f(\vec{x})\,|J|$

Suma i różnica zmiennych losowych

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją gęstości zmiennych losowych $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$. Tworzymy nową zmienną losową $\mathbf{U} = a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}$ i znajdziemy jej gęstość. Do wykonania tej operacji potrzebujemy jeszcze jednego przekształcenia, najlepiej liniowego, które wybierzemy w postaci $\mathbf{V} = \mathbf{Y}$. Przekształcenie odwrotne oraz jego jakobian mają postać:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \frac{1}{a}(\mathbf{U} - b\mathbf{V}) \\ \mathbf{Y} = \mathbf{V} \end{cases} \Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a}$$

Gęstość rozkładu dwuwymiarowego ma postać: $g(u,v) = f\left(\frac{1}{a}(u-bv), v\right)\frac{1}{|a|}$

W szczególności dla sumy (różnicy) $\mathbf{U} = \mathbf{X} \pm \mathbf{Y}$ mamy $g(u,v) = f(u \mp v, v)$

- Rozkład pojedynczej zmiennej $\mathbf{U}$ uzyskamy jako rozkład brzegowy całkując po zmiennej $\mathbf{V}$ w odpowiednich granicach.
- W przypadku sumy dwóch zmiennych losowych niezależnych, o rozkładach $f_1(x)$ i $f_2(y)$ otrzymujemy:

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u-v) f_2(v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(v) f_2(u-v)\,\mathrm{d}v$$

Iloczyn i iloraz zmiennych losowych

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją gęstości zmiennych losowych X i Y. Utwórzmy nową zmienną losową $U = X^n Y^m$ i znajdźmy jej gęstość. Wybierając drugie przekształcenie w postaci $V = Y$ znajdujemy przekształcenie odwrotne i jego jakobian:

$$\begin{cases} X = \sqrt[n]{\dfrac{U}{V^m}} \\ Y = V \end{cases} \Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{1}{u^{n-1}v^m}} & -\dfrac{m}{n}\sqrt[n]{\dfrac{u}{v^{m+n}}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{u^{n-1}v^m}}$$

Stąd gęstość rozkładu dwuwymiarowego: $g(u,v) = \dfrac{1}{n} f\left(\sqrt[n]{\dfrac{u}{v^m}}, v\right)\sqrt[n]{\dfrac{1}{u^{n-1}v^m}}$

W szczególności dla iloczynu $U = X \cdot Y$ mamy $g(u,v) = f\left(\dfrac{u}{v}, v\right)\dfrac{1}{|v|}$

Natomiast dla ilorazu $U = X/Y$ dostajemy $g(u,v) = f(uv,v)\,|v|$

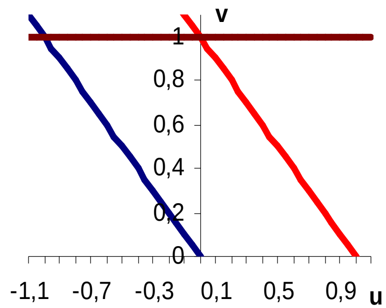
Rozkład zmiennej U znajdujemy jako rozkład brzegowy całkując po zmiennej V w odpowiednich granicach.

Iloczyn i iloraz zmiennych losowych

<u>Przykład:</u> Tadeusz i Zosia umówili się w kawiarni pomiędzy 17^{00} i 18^{00}. Obydwoje nie zamierzają czekać na partnera dłużej niż 15 minut, a moment pojawienia się każdego z nich w kawiarni traktujemy jako losowy pomiędzy ustalonymi godzinami. Ja jest szansa spotkania?

Niech zmienne losowe Z i T oznaczają czasy przybycia Zosi i Tadeusza do kawiarni.

Konstruujemy nową zmienną losową będącą ich różnicą:



$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{t} & 0 \le \mathbf{z} \le 1 & f_1(z) = 1 \\ \mathbf{v} = \mathbf{t} & 0 \le \mathbf{t} \le 1 & f_2(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} & -1 \le \mathbf{u} \le 1 \\ \mathbf{t} = \mathbf{v} & 0 \le \mathbf{v} \le 1 \end{cases}$$

Znajdujemy rozkład zmiennej losowej u:

$$\begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 - u \end{cases} \Rightarrow \quad g(u) = \int_0^{1-u} f_1(u+v)\, f_2(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{1-u} \mathrm{d}v = 1 - u$$

$$\begin{cases} -1 \le u \le 0 \\ -u \le v \le 1 \end{cases} \Rightarrow \quad g(u) = \int_{-u}^{1} f_1(u+v)\, f_2(v)\,\mathrm{d}v = \int_{-u}^{1} \mathrm{d}v = 1 + u$$

Prawdopodobieństwo spotkania dane jest przez:

$$\mathbf{P} = \int_{-1/4}^{+1/4} g(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-1/4}^{0} (1+u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1/4} (1-u)\,\mathrm{d}u = \left[u + \frac{1}{2}u^2 \right]_{-1/4}^{0} + \left[u - \frac{1}{2}u^2 \right]_{0}^{1/4} = \frac{7}{16}$$

Parametry opisowe zmiennej losowej

Parametry pozycyjne:

- Moda – najbardziej prawdopodobna wartość zmiennej losowej X, czyli taka przy której funkcja gęstości bądź rozkład p-twa osiąga wartość maksymalną.
- Kwantyl – kwantylem rzędu p zmiennej losowej X o dystrybuancie $F(x)$ nazywamy taką wartość x_p, dla której spełniona jest równość $F(x_p) = p$.
- Mediana – to kwantyl rzędu 0.5, czyli punkt który dzieli p-two na połowę.
- Kwartyle – dolny i górny to odpowiednio kwantyle rzędu 0.25 i 0.75.
- Decyle, percentyle – kwantyle będące wielokrotnościami 1/10 i 1/100

Momenty zmiennej losowej:

- zwykłe (np. wartość oczekiwana)
- centralne (np. wariancja)
- mieszane (np. kowariancja)

Wartość oczekiwana

Definicja: Niech $\mathbf{k}$ będzie dyskretną zmienną losową o rozkładzie p-twa $\mathbf{P}_k$.
Wartością oczekiwaną zmiennej losowej k nazywamy wielkość:

$$\mathcal{E}[\mathbf{k}] \equiv \langle \mathbf{k} \rangle \equiv \sum_k k \cdot P_k$$

Definicja: Niech $\mathbf{x}$ będzie ciągłą zmienną losową o funkcji gęstości $f(x)$.
Wartością oczekiwaną zmiennej losowej $\mathbf{x}$ nazywamy wielkość:

$$\mathcal{E}[\mathbf{x}] \equiv \langle \mathbf{x} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Definicja: Niech h(k) będzie losową funkcją dyskretnej zmiennej losowej o rozkładzie p-twa P_k. Wartością oczekiwaną funkcji h(k) nazywamy wielkość:

$$\mathcal{E}\left[h(\mathbf{k})\right] \equiv \left\langle h(\mathbf{k}) \right\rangle \equiv \sum_k h(k) P_k$$

Definicja: Niech h(x) będzie losową funkcją ciągłej zmiennej losowej o funkcji gęstości p-twa $f(x)$. Wartością oczekiwaną funkcji $h(\mathbf{x})$ nazywamy wielkość:

$$\mathcal{E}\left[h(\mathbf{x})\right] \equiv \left\langle h(\mathbf{x}) \right\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$$

Własności wartości oczekiwanej

- Niech $\mathrm{z} = a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c$ gdzie x, y to zmienne losowe natomiast a, b, c to stałe:

$$\langle \mathrm{z} \rangle = \langle a\,\mathrm{x} + b\,\mathrm{y} + c \rangle = \iint (ax + by + c) f(x,y)\,dxdy =$$

$$= a\iint xf(x,y)\,dxdy + b\iint yf(x,y)\,dxdy + c\iint f(x,y)\,dxdy =$$

$$= a\int xf_1(x)\,dx + b\int yf_2(y)\,dy + c = a\langle \mathrm{x} \rangle + b\langle \mathrm{y} \rangle + c$$

- Niech x i y będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wówczas:

$$\langle \mathrm{xy} \rangle = \iint xyf(x,y)\,dxdy = \iint xyf_1(x)f_2(y)\,dxdy =$$

$$= \left(\int xf_1(x)\,dx\right)\left(\int yf_2(y)\,dy\right) = \langle \mathrm{x} \rangle \langle \mathrm{y} \rangle$$

- $\langle \mathrm{x} - \langle \mathrm{x} \rangle \rangle = \int \left(x - \langle \mathrm{x} \rangle\right) f(x)\,dx = \int xf(x)\,dx - \langle \mathrm{x} \rangle \int f(x)\,dx = \langle \mathrm{x} \rangle - \langle \mathrm{x} \rangle = 0$

Uwaga: Analogiczne własności posiada wartość oczekiwana dyskretnej zmiennej losowej.

Uwaga: Wartość oczekiwana może nie istnieć.

Zmienna losowa dyskretna - przykłady

Przykład: Wartość oczekiwana rozkładu dwumianowego:
gdzie k = 0, 1, ..., n oraz 0<p<1:

$$\mathcal{B}_k(n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\langle \mathrm{k} \rangle = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathcal{B}_k(n,p) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{m!((n-1)-m)!} p^m (1-p)^{(n-1)-m} = np(p+(1-p))^{n-1} = np$$

Przykład: Gramy z drugą osobą, bankierem, w następującą grę: rzucamy rzetelną sześcienną kostką do gry i jeśli wypadnie parzysta liczba oczek, bankier płaci nam sumę złotych jaką pokazuje liczba oczek na kostce. Jeśli wypadnie liczba nieparzysta, my płacimy bankierowi sumę złotych wskazaną przez kostkę. Czy korzystniej być bankierem czy rzucającym?

$$\langle M \rangle = \sum_{k=1}^{6} (-1)^k k \cdot P_k = \frac{1}{6}(-1+2-3+4-5+6) = \frac{1}{2}$$

Zmienna losowa ciągła - przykłady

Przykład: Rozkład trójkątny: $f(t;\tau)=\frac{2}{\tau^2}(\tau-t)$ gdzie $0 \le t \le \tau$:

$$\langle t\rangle=\int_0^\tau tf(t)\,dt=\frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau t(\tau-t)\,dt=\frac{2}{\tau}\int_0^\tau t\,dt-\frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau t^2\,dt=\tau-\frac{2}{3}\tau=\frac{1}{3}\tau$$

Przykład: Wartość oczekiwana rozkładu wykładniczego: $\mathcal{E}(t;\tau)\propto e^{-t/\tau}$

$$1=\int_0^\infty \mathcal{E}(t;\tau)dt=\mathrm{N}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)=-\mathrm{N}\,\tau\left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\Bigg|_0^\infty=\mathrm{N}\,\tau \quad\Rightarrow\quad \mathrm{N}=\frac{1}{\tau}$$

$$\langle t\rangle=\int_0^\infty t\mathcal{E}(t;\tau)=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)dt=\left\|\begin{matrix}u=t & v'=\exp(-t/\tau)\\ u'=1 & v=-\tau\exp(-t/\tau)\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{\tau}\left[-\tau t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\Bigg|_0^\infty+\tau\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)dt\right]=\frac{1}{\tau}\left[\tau(-\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\Bigg|_0^\infty=\tau$$

Przykład: Pole kwadratu o boku mającym rozkład płaski na przedziale [0,1].

$$\langle s\rangle=\int_0^1 sg(s)\,ds=\int_0^1 s\frac{1}{2\sqrt{s}}ds=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{s}ds=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

Wartość oczekiwana funkcji zm. losowej

Przykład: Jaka jest wartość oczekiwana energii kinetycznej cząsteczki gazu doskonałego w którym prędkości opisane są rozkładem Maxwella:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m}{2kT}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right)$$

gdzie $-\infty < v_x, v_y, v_z < \infty$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-ax^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

Z definicji energii kinetycznej mamy:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \exp\left(-\frac{m}{2kT}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right) dv_x dv_y dv_z$$

Wartość oczekiwana kwadratu składowej v_x prędkości:

$$\langle v_x^2 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2kT}\right) dv_x = \frac{kT}{m}$$

A więc wartość oczekiwana energii kinetycznej:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \left(\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle\right) = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$