

Rachunek prawdopodobo- bieństwa i statystyka

Wykład 5

Wyższe momenty zmiennej losowej

Definicja: Momentem m_n rzędu n nazywamy wartość oczekiwaną funkcji

$h(k) = k^n$ dla dyskretnej zm. losowej oraz funkcji $h(x) = x^n$ dla ciągłej zm. losowej:

$$m_n \equiv \mathcal{E}[k^n] = \sum_k k^n P_k \qquad m_n \equiv \mathcal{E}[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Definicja: Momentem centralnym μ_n rzędu n dla zmiennej dyskretnej i ciągłej nazywamy odpowiednio wielkości ($\mu \equiv m_1$):

$$\mu_n \equiv \mathcal{E}[(k - \mu_k)^n] = \sum_k (k - \mu_k)^n P_k$$

$$\mu_n \equiv \mathcal{E}[(x - \mu_x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^n f(x) dx$$

Definicja: Momentem centralnym mieszanym μ_{rs} rzędu $r+s$ nazywamy

wielkości: $\mu_{rs} \equiv \mathcal{E}[(m - \mu_m)^r (n - \mu_n)^s] = \sum_{m,n} (m - \mu_m)^r (n - \mu_n)^s P_{mn}$

$$\mu_{rs} \equiv \mathcal{E}[(x - \mu_x)^r (y - \mu_y)^s] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^r (y - \mu_y)^s f(x, y) dx dy$$

Wariancja zmiennej losowej

Definicja: **Wariancją** nazywamy moment centralnym μ_2 rzędu 2-go. Przyjmuje ona odpowiednio dla zmiennej dyskretnej i ciągłej postać:

$$\mathcal{V}[k] \equiv \mathcal{D}^2[k] \equiv \sigma_k^2 \equiv \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \sum_k (k - \mu_k)^2 P_k$$

$$\mathcal{V}[x] \equiv \mathcal{D}^2[x] \equiv \sigma_x^2 \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

Pierwiastek kwadratowy z wariancji nazywamy **dyspersją**.

Własności wariancji (x, y, z – zmienne losowe; a, b, c – stałe, $z = ax + by + c$):

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{V}[z] &= \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle = \iint (ax + by + c - a\langle x \rangle - b\langle y \rangle - c)^2 f(x, y) dx dy = \\ &= a^2 \iint (x - \langle x \rangle)^2 f(x, y) dx dy + b^2 \iint (y - \langle y \rangle)^2 f(x, y) dx dy + \\ &\quad + 2ab \iint (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) f(x, y) dx dy = a^2 \int (x - \langle x \rangle)^2 f_1(x) dx + \\ &\quad + b^2 \int (y - \langle y \rangle)^2 f_2(y) dy + 2ab \iint (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) f(x, y) dx dy = \\ &= a^2 \mathcal{V}[x] + b^2 \mathcal{V}[y] + 2ab \iint (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Gdy zmienne x i y są statystycznie niezależne: $\mathcal{V}[z] = a^2 \mathcal{V}[x] + b^2 \mathcal{V}[y]$

Zmienna losowa dyskretna - przykład

$$\bullet \mathcal{V}[x] = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2\langle x \rangle x + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 = \mathcal{E}[x^2] - (\mathcal{E}[x])^2$$

Przykład: Wartość oczekiwana rozkładu dwumianowego:

gdzie $k = 0, 1, \dots, n$ oraz $0 < p < 1$:

$$\mathcal{B}_k(n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot \mathcal{B}_k(n, p) =$$

$$= \sum_{k=0}^n k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \frac{(n-1)!}{m!((n-1)-m)!} p^m (1-p)^{(n-1)-m} = np \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \mathcal{B}_m(n-1, p) =$$

$$= np \langle m+1 \rangle = np((n-1)p + 1)$$

Wariancja: $\mathcal{V}[k] = \mathcal{E}[k^2] - (\mathcal{E}[k])^2 = np((n-1)p + 1) - np = np(1-p)$

Korzystając z powyższego wyniku znajdujemy: $\mathcal{V}\left[\frac{k}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \mathcal{V}[k] = \frac{p(1-p)}{n}$

Zmienna losowa ciągła - przykład

Przykład: Rozkład trójkątny: $f(t; \tau) = \frac{2}{\tau^2}(\tau - t)$ gdzie $0 \leq t \leq \tau$:

$$\langle t^2 \rangle = \int_0^{\tau} t^2 f(t) dt = \frac{2}{\tau^2} \int_0^{\tau} t^2 (\tau - t) dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} t^2 dt - \frac{2}{\tau^2} \int_0^{\tau} t^3 dt = \frac{2}{3} \tau^2 - \frac{1}{2} \tau^2 = \frac{1}{6} \tau^2$$

Wariancję znajdziemy ze wzoru:

$$\mathcal{V}[t] = \mathcal{E}[t^2] - (\mathcal{E}[t])^2 = \frac{1}{6} \tau^2 - \left(\frac{1}{3} \tau\right)^2 = \frac{1}{18} \tau^2$$

Przykład: Wariancja rozkładu wykładniczego: $\mathcal{E}(t; \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$

$$\langle t^2 \rangle = \int_0^{\infty} t^2 \mathcal{E}(t; \tau) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} t^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \left\| \begin{array}{l} u = t^2 \quad v' = \exp(-t/\tau) \\ u' = 2t \quad v = -\tau \exp(-t/\tau) \end{array} \right\| =$$

$$\frac{1}{\tau} \left[-\tau t^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Big|_0^{\infty} + 2\tau \int_0^{\infty} t \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt \right] = 2 \left[-\tau t \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \Big|_0^{\infty} = 2\tau^2$$

Wariancja: $\mathcal{V}[k] = \mathcal{E}[k^2] - (\mathcal{E}[k])^2 = 2\tau^2 - \tau^2 = \tau^2$

Kowariancja

Definicja: Kowariancją nazywamy pierwszy centralny moment mieszany m_{11} :

$$\mathcal{V}[m,n] \equiv \text{cov}[m,n] = \mathcal{E}[(m - \mu_m)(n - \mu_n)] = \sum_{m,n=0}^{\infty} (m - \mu_m)(n - \mu_n) P_{mn} = \mathcal{E}[mn] - \mu_m \mu_n$$

$$\mathcal{V}[x,y] \equiv \text{cov}[x,y] = \mathcal{E}[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x,y) dx dy = \mathcal{E}[xy] - \mu_x \mu_y$$

Istotną cechą kowariancji jest jej znak: dodatni gdy wzrostowi jednej zmiennej towarzyszy wzrost drugiej i ujemny w przeciwnym wypadku.

Twierdzenie: Jeżeli zmienne x i y są statystycznie niezależne to $\text{cov}[x,y]=0$:

$$\begin{aligned} \text{cov}[x,y] &= \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle = \iint xyf(x,y) dx dy - \langle x \rangle \langle y \rangle = \iint xyf_1(x) f_2(y) dx dy - \langle x \rangle \langle y \rangle = \\ &= \left(\int x f_1(x) dx \right) \left(\int y f_2(y) dy \right) - \langle x \rangle \langle y \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle = 0 \end{aligned}$$

Uwaga: Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe – kowariancja może być równa zero, a zmienne mogą być statystycznie zależne.

Np. $f(x,y)=3(x^2+y^2)/8$ określona na kwadracie $-1 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 1$:

$$\langle x \rangle = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x(x^2 + y^2) dx dy = 0 \quad \langle y \rangle = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y(x^2 + y^2) dx dy = 0 \quad \langle xy \rangle = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy(x^2 + y^2) dx dy = 0$$

O takich zmiennych mówimy, że są **nieskorelowane** (a nie niezależne).

Współczynnik korelacji

Definicja: Współczynnikiem korelacji (Pearsona) nazywamy wielkość:

$$\rho = \frac{\text{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]}{\mathcal{D}[\mathbf{x}]\mathcal{D}[\mathbf{y}]}$$

Własności:

- brak zależności od wyboru jednostek i początku skali zmiennych losowych:

Niech $\begin{cases} \mathbf{x} = a\mathbf{u} + b \\ \mathbf{y} = c\mathbf{v} + d \end{cases}$ oraz $ac > 0$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\text{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]}{\mathcal{D}[\mathbf{x}]\mathcal{D}[\mathbf{y}]} = \frac{\mathcal{E}[\mathbf{xy}] - \mathcal{E}[\mathbf{x}]\mathcal{E}[\mathbf{y}]}{\mathcal{D}[\mathbf{x}]\mathcal{D}[\mathbf{y}]} = \frac{\mathcal{E}[(a\mathbf{u} + b)(c\mathbf{v} + d)] - \mathcal{E}[a\mathbf{u} + b]\mathcal{E}[c\mathbf{v} + d]}{\mathcal{D}[a\mathbf{u} + b]\mathcal{D}[c\mathbf{v} + d]} = \\ &= \frac{ac\mathcal{E}[\mathbf{uv}] + ad\mathcal{E}[\mathbf{u}] + bc\mathcal{E}[\mathbf{v}] + bd - ac\mathcal{E}[\mathbf{u}]\mathcal{E}[\mathbf{v}] - ad\mathcal{E}[\mathbf{u}] - bc\mathcal{E}[\mathbf{v}] - bd}{|ac|\mathcal{D}[\mathbf{u}]\mathcal{D}[\mathbf{v}]} = \\ &= \frac{\mathcal{E}[\mathbf{uv}] - \mathcal{E}[\mathbf{u}]\mathcal{E}[\mathbf{v}]}{\mathcal{D}[\mathbf{u}]\mathcal{D}[\mathbf{v}]} = \frac{\text{cov}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}{\mathcal{D}[\mathbf{u}]\mathcal{D}[\mathbf{v}]} \end{aligned}$$

Współczynnik korelacji

- zakres wartości $-1 \leq \rho \leq 1$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \mu_x}{\sigma_x}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{y} - \mu_y}{\sigma_y} \Rightarrow \mathcal{E}[\mathbf{u}] = \mathcal{E}[\mathbf{v}] = 0, \quad \mathcal{V}[\mathbf{u}] = \mathcal{V}[\mathbf{v}] = 1, \quad \text{cov}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \rho$$

$$\mathcal{V}[\mathbf{u} + \mathbf{v}] = \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 \rangle = \langle \mathbf{u}^2 \rangle + 2\langle \mathbf{u}\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}^2 \rangle = 2 + 2\rho > 0 \Rightarrow \rho \geq -1$$

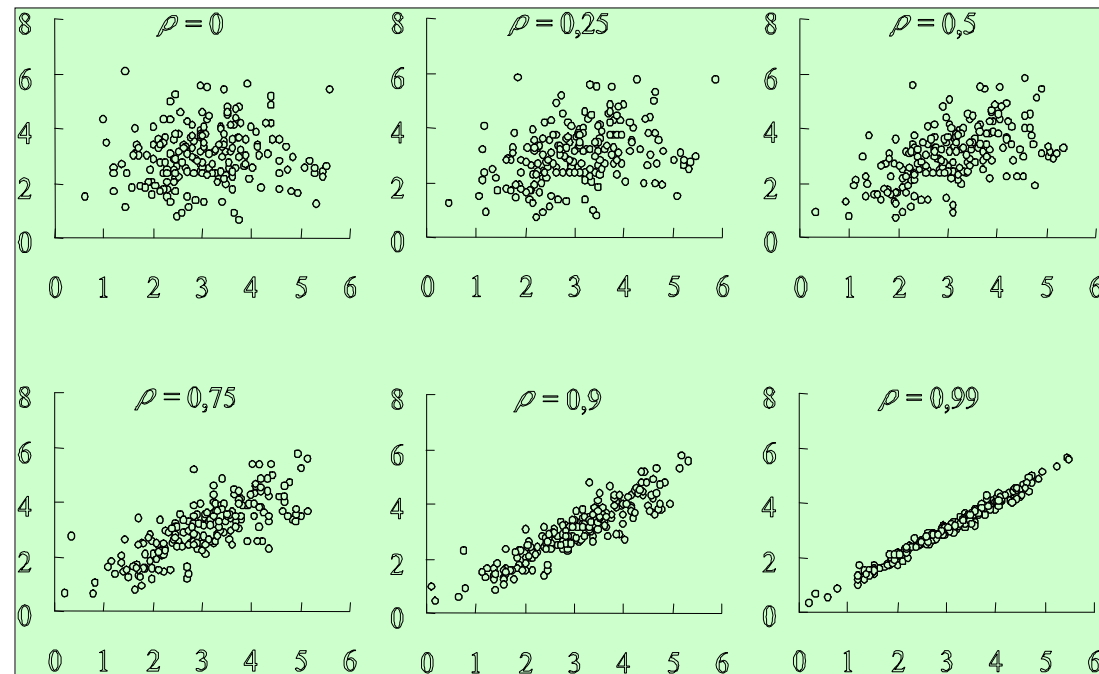
$$\mathcal{V}[\mathbf{u} - \mathbf{v}] = \langle (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 \rangle = \langle \mathbf{u}^2 \rangle - 2\langle \mathbf{u}\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}^2 \rangle = 2 - 2\rho > 0 \Rightarrow \rho \leq +1$$

$$\rho = \pm 1 \Rightarrow \mathcal{V}[\mathbf{u} \mp \mathbf{v}] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} \mp \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\mathbf{y} - \mu_y}{\sigma_y} \mp \frac{\mathbf{x} - \mu_x}{\sigma_x} = 0$$

$$\mathbf{y} = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (\mathbf{x} - \mu_x) + \mu_y$$



Macierz kowariancji

Wariancja sumy zmiennych losowych. Niech $z = ax + by + c$:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}[z] &= a^2\mathcal{V}[x] + b^2\mathcal{V}[y] + 2ab \iint (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) f(x, y) dx dy = \\ &= a^2\mathcal{V}[x] + b^2\mathcal{V}[y] + 2ab \operatorname{cov}[x, y]\end{aligned}$$

Uogólnienie na wiele zmiennych losowych $z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$:

$$\mathcal{V}[z] = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \operatorname{cov}[x_i, x_j] \equiv \vec{a} V[\vec{x}] \vec{a}^T$$

gdzie

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}[x_1] & \operatorname{cov}[x_1, x_2] & \cdots & \operatorname{cov}[x_1, x_n] \\ \operatorname{cov}[x_2, x_1] & \mathcal{V}[x_2] & \cdots & \operatorname{cov}[x_2, x_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}[x_n, x_1] & \operatorname{cov}[x_n, x_2] & \cdots & \mathcal{V}[x_n] \end{bmatrix}$$

Uwaga: gdy macierz kowariancji jest diagonalna wówczas: $\mathcal{V}[z] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathcal{V}[x_i]$

Uwaga: dla dwóch zm. nieskorelowanych: $\mathcal{V}[x+y] = \mathcal{V}[x-y] = \mathcal{V}[x] + \mathcal{V}[y]$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Problem: Jak oszacować niepewność standardową wyniku otrzymanego za pomocą danej formuły matematycznej z pomiarów wielkości wchodzących do tej formuły, których niepewności standardowe są znane?

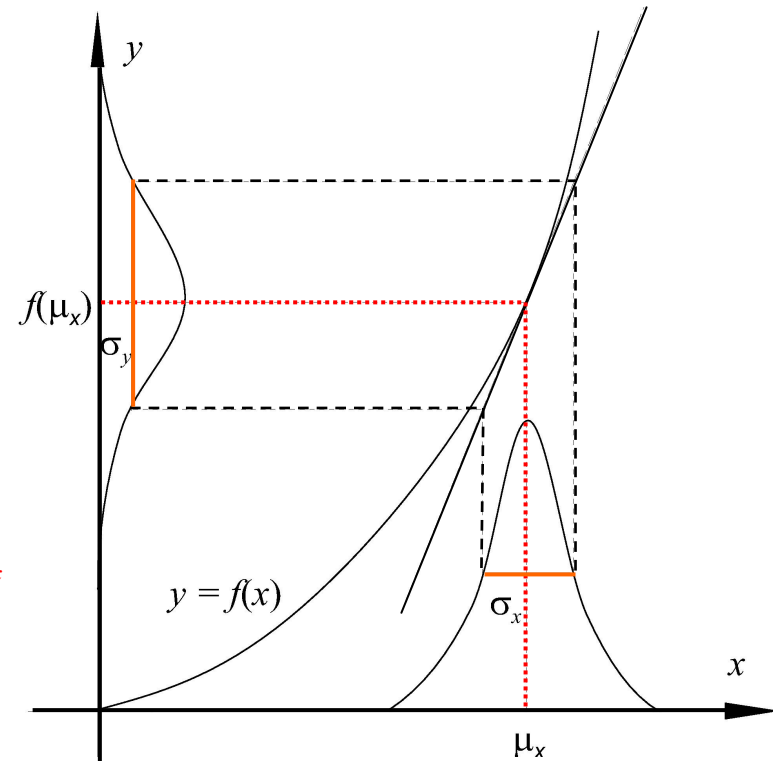
Założmy, że w obszarze niepewności argumentów zadana zależność funkcyjna może być przybliżona zależnością liniową (model małych niepewności pomiarowych).

$$y = f(x) \cong f(\mu_x) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\mu_x} (x - \mu_x) \equiv$$
$$\equiv f(\mu_x) + \frac{df}{dx} (x - \mu_x) \quad \text{gdzie} \quad \frac{df}{dx} \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\mu_x}$$

Obliczymy wartość oczekiwaną i wariancję y :

$$\mathcal{E}[y] \equiv \mu_y \cong f(\mu_x) + \frac{df}{dx} \langle \mathbf{x} - \mu_x \rangle = f(\mu_x)$$

$$\mathcal{V}[f(\mathbf{x})] = \langle (f(\mathbf{x}) - f(\mu_x))^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{df}{dx} (\mathbf{x} - \mu_x) \right)^2 \right\rangle = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \langle (\mathbf{x} - \mu_x)^2 \rangle = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \mathcal{V}[\mathbf{x}]$$



Momenty funkcji zmiennych losowych

Uogólnienie na n zmiennych losowych $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ o wartościach oczekiwanych $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ i wzajemnych relacjach opisanych macierzą kowariancji

$$V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}[x_1] & \text{cov}[x_1, x_2] & \cdots & \text{cov}[x_1, x_n] \\ \text{cov}[x_2, x_1] & \mathcal{V}[x_2] & \cdots & \text{cov}[x_2, x_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[x_n, x_1] & \text{cov}[x_n, x_2] & \cdots & \mathcal{V}[x_n] \end{bmatrix}$$

oraz m funkcji $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ które aproksymujemy liniowo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong f_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_1 - \mu_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_n - \mu_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong f_2(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_1 - \mu_1) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_n - \mu_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong f_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_1 - \mu_1) + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_n - \mu_n) \end{array} \right.$$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Powyższy układ zapisujemy wygodnie w postaci macierzowej jako:

$$\vec{f}(\vec{x}) \cong \vec{f}(\vec{\mu}) + \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right] (\vec{x} - \vec{\mu})$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$\vec{f}(\vec{\mu}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{\mu}) \\ f_2(\vec{\mu}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{\mu}) \end{pmatrix}, \quad \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\vec{x}=\vec{\mu}}, \quad \vec{x} - \vec{\mu} = \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ x_n - \mu_n \end{pmatrix}$$

Wartość oczekiwana i wariancja w przypadku gdy mamy tylko jedną funkcję n zmiennych losowych mają postać:

$$\mathcal{E}[f(\vec{x})] \cong f(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \underbrace{\langle x_i - \mu_i \rangle}_{=0} = f(\vec{\mu})$$
$$\mathcal{V}[f(\vec{x})] = \left\langle (f(\vec{x}) - f(\vec{\mu}))^2 \right\rangle = \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \text{cov}[x_i, x_k] \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \left[\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right] \mathbf{V}[\vec{x}] \left[\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right]^T$$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Gdy zmienne losowe nie są skorelowane (macierz $V[x]$ jest diagonalna) to:

$$\mathcal{V}[f] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dx_i} \right)^2 \mathcal{V}[x_i]$$

Dla dwóch funkcji n zmiennych losowych wyrażenia na wartość oczekiwaną i wariancję przyjmują postać:

$$\mathcal{E}[f_1(\vec{x})] \cong f_1(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \underbrace{\langle x_i - \mu_i \rangle}_{=0} = f_1(\vec{\mu}) \quad \mathcal{E}[f_2(\vec{x})] \cong f_2(\vec{\mu})$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[f_1, f_2] &= \langle (f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{\mu})) (f_2(\vec{x}) - f_2(\vec{\mu})) \rangle \cong \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} (x_i - \mu_i) \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_k} (x_k - \mu_k) \right\rangle = \\ &= \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \langle (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) \rangle \frac{\partial f_2}{\partial x_k} = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} V[x_i, x_k] \frac{\partial f_2}{\partial x_k} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} \right] V[\vec{x}] \left[\frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}} \right]^T \end{aligned}$$

Macierz kowariancji dla funkcji f_1 i f_2 :

$$V(\vec{f}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}[f_1] & \text{cov}[f_1, f_2] \\ \text{cov}[f_2, f_1] & \mathcal{V}[f_2] \end{bmatrix}$$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Zupełnie ogólnie, dla m funkcji i n zmiennych losowych wyrażenia na wartość oczekiwaną i wariancję przyjmują postać:

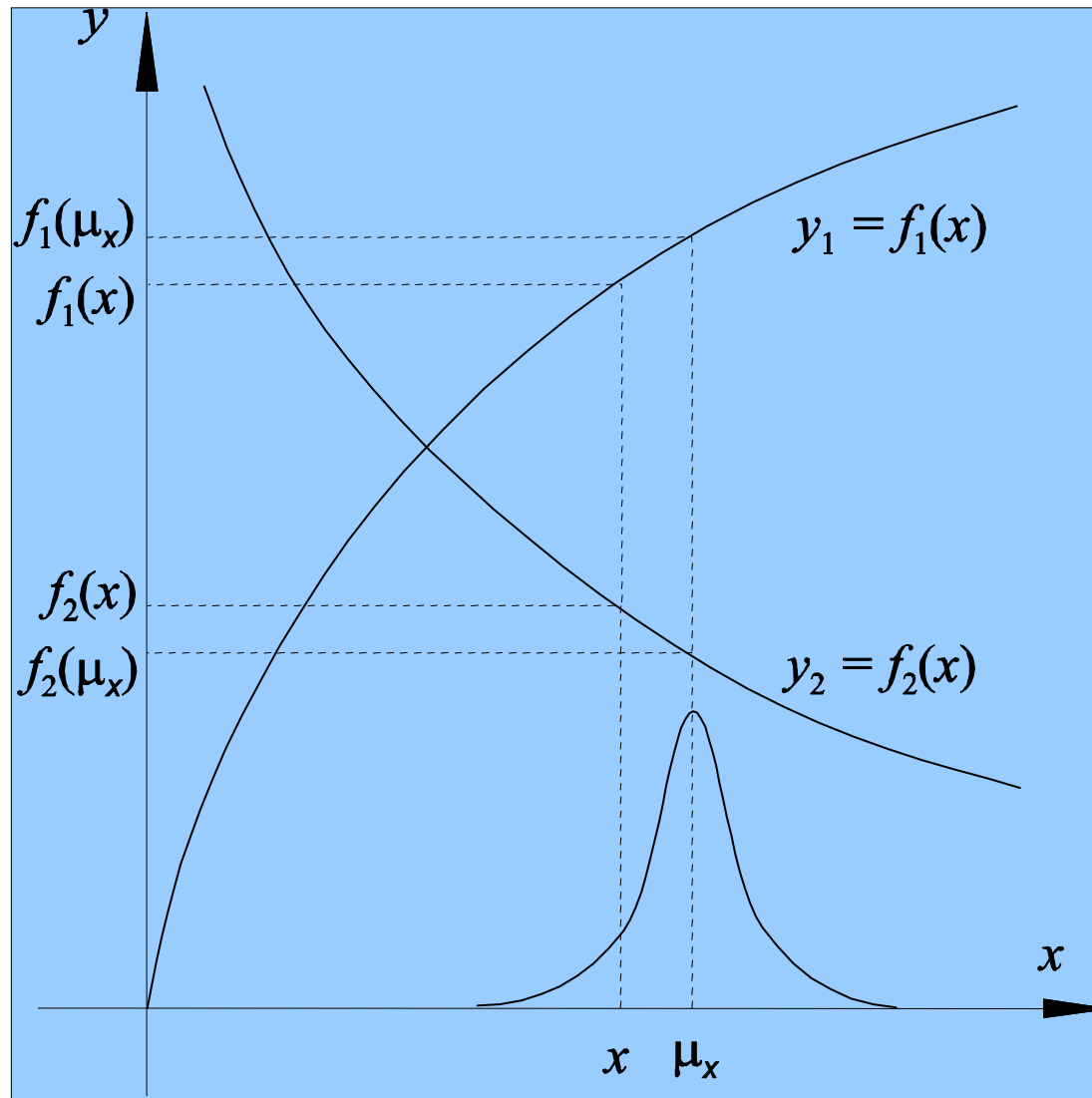
$$\mathcal{E}[\vec{f}(\vec{x})] \cong \vec{f}(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial \mathbf{x}_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \underbrace{\langle \mathbf{x}_i - \mu_i \rangle}_{=0} = \vec{f}(\vec{\mu})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[\vec{f}(\vec{x})] &= \left\langle (\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{\mu})) (\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{\mu}))^T \right\rangle \cong \left\langle \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right] (\vec{x} - \vec{\mu}) \left(\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right] (\vec{x} - \vec{\mu}) \right)^T \right\rangle = \\ &= \left\langle \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right] (\vec{x} - \vec{\mu}) (\vec{x} - \vec{\mu})^T \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right\rangle = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right] \left\langle (\vec{x} - \vec{\mu}) (\vec{x} - \vec{\mu})^T \right\rangle \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right]^T = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right] \mathbf{V}[\vec{x}] \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right]^T \end{aligned}$$

czyli

$$\mathbf{V}(\vec{f}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}[f_1] & \text{cov}[f_1, f_2] & \cdots & \text{cov}[f_1, f_n] \\ \text{cov}[f_2, f_1] & \mathcal{V}[f_2] & \cdots & \text{cov}[f_2, f_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[f_n, f_1] & \text{cov}[f_n, f_2] & \cdots & \mathcal{V}[f_n] \end{bmatrix}$$

Korelacja w pomiarach złożonych



Propagacja małych błędów

Przykład: Wyznaczamy energię kinetyczną kulki mierząc jej masę z dokładnością 1% oraz dokonując pomiaru jej prędkości poprzez niezależny pomiar przebytej odległości i czasu, przy czym te pomiary wykonujemy z dokładnością 2%. Jaka jest dokładność pomiaru energii?

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{s}{t}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \langle E_k \rangle = E_k(\bar{\mu}) = \frac{1}{2}\langle m \rangle \left(\frac{\langle s \rangle}{\langle t \rangle}\right)^2$$

$$\sigma_{E_k}^2 = \left(\frac{\partial E_k}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial E_k}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial E_k}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\langle s \rangle}{\langle t \rangle}\right)^2\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\langle m \rangle \langle s \rangle}{\langle t \rangle^2}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\langle m \rangle \langle s \rangle^2}{\langle t \rangle^3}\right)^2 \sigma_t^2$$

$$\frac{\sigma_{E_k}}{\langle E_k \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_s}{s}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_t}{t}\right)^2}$$

Uwaga: Względny błąd pomiaru złożonego wyraża się szczególnie prosto w przypadku formuł w których wielkości mierzone pośrednio występują jedynie w postaci iloczynów i ilorazów:

$$z = \frac{a^k b^j}{c^m d^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_z}{z} = \sqrt{\left(k\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(j\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(m\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 + \left(n\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

Propagacja małych błędów

Przykład: Wykonujemy pomiar spadku napięcia U i natężenia prądu I płynącego przez nieznaną opór, odpowiednio z błędami σ_U i σ_I . Wyliczamy wartość oporu R oraz moc M wydzielaną na tym oporze:

$$R = \frac{U}{I}, \quad M = UI$$

Jeśli pomiary napięcia i natężenia są niezależne, wówczas macierz kowariancji jest diagonalna:

$$V[U, I] = \begin{bmatrix} \sigma_U^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_I^2 \end{bmatrix}$$

Znajdujemy macierz pochodnych:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial U} & \frac{\partial R}{\partial I} \\ \frac{\partial M}{\partial U} & \frac{\partial M}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I} & -\frac{U}{I^2} \\ I & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{U} & -\frac{R}{I} \\ \frac{M}{U} & \frac{M}{I} \end{bmatrix}$$

Macierz kowariancji zmiennych

R oraz M ma postać:

$$V[R, M] \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \end{bmatrix} V[U, I] \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} R^2 \left(\frac{\sigma_U^2}{U^2} + \frac{\sigma_I^2}{I^2} \right) & MR \left(\frac{\sigma_U^2}{U^2} - \frac{\sigma_I^2}{I^2} \right) \\ MR \left(\frac{\sigma_U^2}{U^2} - \frac{\sigma_I^2}{I^2} \right) & M^2 \left(\frac{\sigma_U^2}{U^2} + \frac{\sigma_I^2}{I^2} \right) \end{bmatrix}$$

Małe czy duże błędy

Przykład: Chcemy zmierzyć energię kinetyczną kulki o znanej masie. Załóżmy, że mierzymy jej prędkość z dokładnością do 2%.

Korzystając z przybliżenia liniowego dostajemy:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}(\mu_v) = \frac{1}{2} m \mu_v^2$$

$$\sigma_{\mathbf{E}}^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 \sigma_v^2 = (m \mu_v)^2 \sigma_v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{\mathbf{E}}}{\mathbf{E}} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_v}{\mu_v} \right)^2} = \left| 2 \frac{\sigma_v}{\mu_v} \right|$$

Założmy, że rozkład prędkości jest rozkładem normalnym:

$$f(v) = \mathcal{N}(v; \mu_v, \sigma_v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v}} \exp\left(-\frac{(v - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right)$$

Wartość oczekiwana energii jest wówczas równa:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E} \rangle &= \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v}} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{(v - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right) dv = \left\| \begin{array}{l} \frac{(v - \mu_v)}{\sqrt{2\sigma_v}} = u \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{2\sigma_v}} = du \\ v = \sqrt{2\sigma_v}u + \mu_v \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} m \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma_v}u + \mu_v)^2 \exp(-u^2) du = \frac{1}{2} m \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[2\sigma_v^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \mu_v^2 \sqrt{\pi} \right] = \frac{1}{2} m \mu_v^2 + \frac{1}{2} m \sigma_v^2 \end{aligned}$$

Duże błędy pomiarów pośrednich

Znajdziemy rozkład jakiemu podlega energia E : $v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}} \Rightarrow \left| \frac{dv}{dE} \right| = \frac{1}{\sqrt{2mE}}$

$$g(E) = (f(v(E)) + f(-v(E))) \left| \frac{dv}{dE} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \frac{1}{\sqrt{2mE}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\sqrt{2E/m} - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right) + \exp\left(-\frac{(-\sqrt{2E/m} - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \frac{1}{\sqrt{2mE}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\sqrt{E} - \mu_v\sqrt{m/2})^2}{m\sigma_v^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{E} + \mu_v\sqrt{m/2})^2}{m\sigma_v^2}\right) \right\}$$

Korzystając z powyższego rozkładu można pokazać, że:

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E \cdot g(E) = \frac{1}{2} m \mu_v^2 + \frac{1}{2} m \sigma_v^2 \quad \langle E^2 \rangle = \frac{3}{4} m^2 \sigma_v^4 + \frac{3}{2} m^2 \mu_v^2 \sigma_v^2 + \frac{1}{4} m^2 \mu_v^4$$

$$\sigma_E^2 \equiv \mathcal{V}[E] = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = m^2 \mu_v^2 \sigma_v^2 + \frac{1}{2} m^2 \sigma_v^4$$

Identyczny wynik dostajemy zachowując wyrazy kwadratowe w rozwinięciu w szereg Taylora:

$$f(x) \cong f(\mu) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\mu} (x-\mu) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=\mu} (x-\mu)^2$$

Duże błędy pomiarów pośrednich

Prowadzi to do następujących wyrażen na wartość oczekiwaną i wariancję:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle \cong f(\mu) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{d \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\mu} \mathcal{V}[\mathbf{x}] \quad \mathcal{V}[f] \cong \left(\left. \frac{df}{d \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mu} \right)^2 \mathcal{V}[\mathbf{x}] + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{d^2 f}{d \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\mu} \right)^2 \mathcal{V}^2[\mathbf{x}]$$

Przykład: Rozpatrzmy proton poruszający się z prędkością $\beta = 0.9971$. Załóżmy, że potrafimy zmierzyć prędkość z dokładnością do 0.2%. Jaka jest dokładność pomiaru całkowitej energii?

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\sigma_\beta}{\beta} \cong \boxed{34.3\%} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sigma_E^2 = \left(\frac{dE}{d\beta} \right)^2 \sigma_\beta^2 = \left(\frac{\beta mc^2}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} \right)^2 \sigma_\beta^2$$

$$E_- = E(\beta - \sigma_\beta) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\beta - \sigma_\beta)^2}} = 9.49 \text{ GeV}$$

$$E_+ = E(\beta + \sigma_\beta) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\beta + \sigma_\beta)^2}} = 22.04 \text{ GeV}$$

Wynik podajemy w postaci:

$$\bar{E}_{-(E_+ - \bar{E})}^{+(E_+ - \bar{E})} = 12.33_{-2.84}^{+9.71}$$

