Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Wykład 5

Randomizacja – rozkład dyskretny

Przykład: Zmienna losowa X będąca liczbą jaj znoszonych przez kurę ma rozkład Poissona. P-two wyklucia się pisklęcia z każdego jaja wynosi p i jest niezależne od p-twa wyklucia z innych jaj. Jaki jest rozkład zmiennej losowej Y będącej liczbą wyklutych piskląt.

$$P(X=n)=\mathcal{P}_n(\lambda)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \qquad \text{gdzie} \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$P(Y=j\,|\,X=n)=\mathcal{B}_j(n,p)=\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \qquad \text{gdzie} \quad j=0,1,\ldots,n$$

$$P(Y=j,X=n)=P(Y=j\,|\,X=n)P(X=n)$$

$$P(Y=j)=\sum_{n=j}^{\infty}P(X=n,Y=j)=\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{n!}{j!(n-j)!}p^j(1-p)^{n-j}=$$

$$=\frac{(\lambda p)^j}{j!}e^{-\lambda}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\left[\lambda(1-p)\right]^{n-j}}{(n-j)!}=\frac{(\lambda p)^j}{j!}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda(1-p)\right]^{k}}{k!}=$$

$$=\frac{(\lambda p)^j}{j!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^j}{j!}e^{-\lambda p}=\mathcal{P}_j(\lambda p)$$

Randomizacja – rozkład ciągły

<u>Przykład:</u> Losujemy punkt X z rozkładu jednostajnego na przedziale (a,b). Następnie losujemy punkt Y z rozkładu jednostajnego na przedziale (X,b). Znajdź rozkład zmiennej Y.

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad a\le x\le b\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostalych } x\end{cases}$$

$$g_{21}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-x} & \text{dla} \quad x\le y\le b\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostalych y}\end{cases}$$

Znajdujemy łączny rozkład p-twa:

$$f(x,y)=g_{21}(y\,|\,x)\,f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\cdot\dfrac{1}{b-x} & \text{dla} \quad a\le x\le y\le b\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostalych } x,y\end{cases}$$

Oraz interesujący nas rozkład brzegowy:

$$f_2(y)=\int_a^y \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{b-x}dx=\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-a}{b-y}$$

Ogólnie proces randomizacji dla rozkładów odpowiednio dyskretnych i ciągłych przebiega według schematów:

$$P(Y=j)=\sum_n P(Y=j\,|\,X=n)\,P(X=n)$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x\,|\,y)\,h(y)\,dy$$

Randomizacja – rozkład mieszany

<u>Przykład:</u> Załóżmy, ze zmienna losowa Y przyjmuje n>1 wartości całkowitych z p-twami:

$$P(Y=i)=p_i \quad \text{przy czym} \quad p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

Załóżmy następnie, że dla ustalonej wartości $Y=i$ zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości $\varphi_i(x)$.

P-two że zmienna X przyjmuje wartości z przedziału (a,b) natomiast zmienna $Y=i$ wynosi:

$$P(a\le X\le b, Y=i)=p_i\int_a^b \varphi_i(x)\,dx$$

Korzystając z twierdzenia o p-twie całkowitym znajdujemy rozkład brzegowy zmiennej X:

$$P(a\le X\le b)=\sum_{i=1}^{n} P(a\le X\le b\,|\,Y=i)\,P(Y=i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i\int_a^b \varphi_i(x)\,dx=\int_a^b\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i(x)\,dx$$

A więc zmienna losowa X jest zmienną ciągłą o funkcji gęstości danej przez:

$$f_X(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i(x) \qquad \text{(mieszanina rozkladów)}$$

Wyższe momenty zmiennej losowej

Definicja: Momentem m_n rzędu n nazywamy wartość oczekiwaną funkcji $h(k) = k^n$ dla dyskretnej zm. losowej oraz funkcji $h(x) = x^n$ dla ciągłej zm. losowej:

$$m_n \equiv \mathcal{E}\left[\mathbf{k}^n\right] = \sum_k k^n \mathbf{P}_k \qquad m_n \equiv \mathcal{E}\left[\mathbf{x}^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$$

Definicja: Momentem centralnym μ_n rzędu n dla zmiennej dyskretnej i ciągłej nazywamy odpowiednio wielkości ($\mu \equiv \mathbf{m}_1$):

$$\mu_n \equiv \mathcal{E}\left[\left(\mathbf{k} - \mu_\mathrm{k}\right)^n\right] = \sum_k (k - \mu_\mathrm{k})^n \mathbf{P}_k$$

$$\mu_n \equiv \mathcal{E}\left[\left(\mathbf{x} - \mu_\mathrm{x}\right)^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_\mathrm{x})^n f(x)dx$$

Definicja: Momentem centralnym mieszanym μ_{rs} rzędu r+s nazywamy wielkości:

$$\mu_{rs} \equiv \mathcal{E}[(\mathbf{m} - \mu_\mathrm{m})^r (\mathbf{k} - \mu_\mathrm{k})^s] = \sum_{m,n} (m - \mu_\mathrm{m})^r (\mathbf{k} - \mu_\mathrm{k})^s \mathbf{P}_{mk}$$

$$\mu_{rs} \equiv \mathcal{E}[(\mathbf{x} - \mu_\mathrm{x})^r (\mathbf{y} - \mu_\mathrm{y})^s] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_\mathrm{x})^r (y - \mu_\mathrm{y})^s f(x,y)dxdy$$

Wariancja zmiennej losowej

Definicja: Wariancją nazywamy moment centralnym μ_2 rzędu 2-go. Przyjmuje ona odpowiednio dla zmiennej dyskretnej i ciągłej postać:

$$\mathcal{V}[\mathrm{k}] \equiv \mathcal{D}^2[\mathrm{k}] \equiv \sigma_{\mathrm{k}}^2 \equiv \left\langle \left(\mathrm{k} - \langle \mathrm{k} \rangle\right)^2 \right\rangle = \sum_k \left(k - \mu_{\mathrm{k}}\right)^2 \mathrm{P}_k$$

$$\mathcal{V}[\mathrm{x}] \equiv \mathcal{D}^2[\mathrm{x}] \equiv \sigma_{\mathrm{x}}^2 \equiv \left\langle \left(\mathrm{x} - \langle \mathrm{x} \rangle\right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_{\mathrm{x}}\right)^2 f(x)\,dx$$

Pierwiastek kwadratowy z wariancji nazywamy dyspersją.

Własności wariancji ($\mathrm{x,y,z}$ – zmienne losowe; a,b,c – stałe, $\mathrm{z} = a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c$):

- $$\mathcal{V}[\mathrm{z}] = \left\langle \left(\mathrm{z} - \langle \mathrm{z} \rangle\right)^2 \right\rangle = \iint \left(ax + by + c - a\langle \mathrm{x} \rangle - b\langle \mathrm{y} \rangle - c\right)^2 f(x,y)\,dxdy =$$

$$= a^2 \iint \left(x - \langle \mathrm{x} \rangle\right)^2 f(x,y)\,dxdy + b^2 \iint \left(y - \langle \mathrm{y} \rangle\right)^2 f(x,y)\,dxdy +$$

$$+ 2ab \iint \left(x - \langle \mathrm{x} \rangle\right)\left(y - \langle \mathrm{y} \rangle\right) f(x,y)\,dxdy = a^2 \int \left(x - \langle \mathrm{x} \rangle\right)^2 f_1(x)\,dx +$$

$$+ b^2 \int \left(y - \langle \mathrm{y} \rangle\right)^2 f_2(y)\,dy + 2ab \iint \left(x - \langle \mathrm{x} \rangle\right)\left(y - \langle \mathrm{y} \rangle\right) f(x,y)\,dxdy =$$

$$= a^2 \mathcal{V}[\mathrm{x}] + b^2 \mathcal{V}[\mathrm{y}] + 2ab \iint \left(x - \langle \mathrm{x} \rangle\right)\left(y - \langle \mathrm{y} \rangle\right) f(x,y)\,dxdy$$

Gdy zmienne x i y są statystycznie niezależne: $\mathcal{V}[\mathrm{z}] = a^2 \mathcal{V}[\mathrm{x}] + b^2 \mathcal{V}[\mathrm{y}]$

Zmienna losowa dyskretna - przykład

- $\mathcal{V}[\mathbf{x}] = \left\langle \left(\mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \rangle\right)^2 \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}^2 - 2\langle \mathbf{x} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x} \rangle^2 \right\rangle = \langle \mathbf{x}^2 \rangle - 2\langle \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} \rangle^2 = \mathcal{E}[\mathbf{x}^2] - \left(\mathcal{E}[\mathbf{x}]\right)^2$

<u>Przykład:</u> Wartość oczekiwana rozkładu dwumianowego:

gdzie k = 0, 1, ..., n oraz 0<p<1:

$$\mathcal{B}_k(n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\langle \mathbf{k}^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \mathcal{B}_k(n, p) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \frac{(n-1)!}{m!((n-1)-m)!} p^m (1-p)^{(n-1)-m} = np \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \mathcal{B}_m(n-1, p) =$$

$$= np \langle m+1 \rangle = np\left((n-1)p + 1\right)$$

Wariancja: $\mathcal{V}[\mathbf{k}] = \mathcal{E}[\mathbf{k}^2] - \left(\mathcal{E}[\mathbf{k}]\right)^2 = np\left((n-1)p+1\right) - (np)^2 = np(1-p)$

Korzystając z powyższego wyniku znajdujemy: $\mathcal{V}\left[\frac{\mathbf{k}}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \mathcal{V}[\mathbf{k}] = \frac{p(1-p)}{n}$

Zmienna losowa ciągła - przykład

Przykład: Rozkład trójkątny: $f(t;\tau)=\frac{2}{\tau^2}(\tau-t)$ gdzie $0\le t\le\tau$:

$$\langle t^2\rangle=\int_0^\tau t^2 f(t)dt=\frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau t^2(\tau-t)dt=\frac{2}{\tau}\int_0^\tau t^2dt-\frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau t^3dt=\frac{2}{3}\tau^2-\frac{1}{2}\tau^2=\frac{1}{6}\tau^2$$

Wariancję znajdziemy ze wzoru:

$$\mathcal{V}[t]=\mathcal{E}[t^2]-(\mathcal{E}[t])^2=\frac{1}{6}\tau^2-\left(\frac{1}{3}\tau\right)^2=\frac{1}{18}\tau^2$$

Przykład: Wariancja rozkładu wykładniczego: $\mathcal{E}(t;\tau)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$

$$\langle t^2\rangle=\int_0^\infty t^2E(t;\tau)=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty t^2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)dt=\left\|\begin{matrix}u=t^2 & v'=\exp(-t/\tau)\\ u'=2t & v=-\tau\exp(-t/\tau)\end{matrix}\right\|=$$

$$\frac{1}{\tau}\left[-\tau t^2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\Big|_0^\infty+2\tau\int_0^\infty t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)dt\right]=2\left[-\tau t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)-\tau^2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\Big|_0^\infty=2\tau^2$$

Wariancja: $\mathcal{V}[k]=\mathcal{E}[k^2]-(\mathcal{E}[k])^2=2\tau^2-\tau^2=\tau^2$

Kowariancja

Definicja: Kowariancją nazywamy pierwszy centralny moment mieszany m_{11}:

$$\mathcal{V}[\mathrm{m,n}] \equiv \mathrm{cov}[\mathrm{m,n}] = \mathcal{E}\left[(\mathrm{m}-\mu_\mathrm{m})(\mathrm{n}-\mu_\mathrm{n})\right] = \sum_{m,n=0}^{\infty}(m-\mu_\mathrm{m})(n-\mu_\mathrm{n})\mathrm{P}_{mn} = \mathcal{E}[\mathrm{mn}] - \mu_\mathrm{m}\mu_\mathrm{n}$$

$$\mathcal{V}[\mathrm{x,y}] \equiv \mathrm{cov}[\mathrm{x,y}] = \mathcal{E}\left[(\mathrm{x}-\mu_\mathrm{x})(\mathrm{y}-\mu_\mathrm{y})\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_\mathrm{x})(y-\mu_\mathrm{y})f(x,y)dxdy = \mathcal{E}[\mathrm{xy}] - \mu_\mathrm{x}\mu_\mathrm{y}$$

Istotną cechą kowariancji jest jej znak: dodatni gdy wzrostowi jednej zmiennej towarzyszy wzrost drugiej i ujemny w przeciwnym wypadku.

Twierdzenie: Jeżeli zmienne x i y są statystycznie niezależne to cov[x,y]=0:

$$\mathrm{cov}[\mathrm{x,y}] = \langle\mathrm{xy}\rangle - \langle\mathrm{x}\rangle\langle\mathrm{y}\rangle = \iint xyf(x,y)dxdy - \langle\mathrm{x}\rangle\langle\mathrm{y}\rangle = \iint xyf_1(x)f_2(y)dxdy - \langle\mathrm{x}\rangle\langle\mathrm{y}\rangle =$$

$$= \left(\int xf_1(x)dx\right)\left(\int yf_2(y)dy\right) - \langle\mathrm{x}\rangle\langle\mathrm{y}\rangle = \langle\mathrm{x}\rangle\langle\mathrm{y}\rangle - \langle\mathrm{x}\rangle\langle\mathrm{y}\rangle = 0$$

Uwaga: Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe – kowariancja może być równa zero, a zmienne mogą być statystycznie zależne.

Np. $f(x,y)=3(x^2+y^2)/8$ określona na kwadracie $-1 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$:

$$\langle\mathrm{x}\rangle = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x(x^2+y^2)dxdy = 0 \qquad \langle\mathrm{y}\rangle = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}y(x^2+y^2)dxdy = 0 \qquad \langle\mathrm{xy}\rangle = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xy(x^2+y^2)dxdy = 0$$

O takich zmiennych mówimy, że są nieskorelowane (a nie niezależne).

Współczynnik korelacji

Definicja: Współczynnikiem korelacji (Pearsona) nazywamy wielkość:

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[\mathrm{x},\mathrm{y}]}{\mathcal{D}[\mathrm{x}]\mathcal{D}[\mathrm{y}]}$$

Własności:

- brak zależności od wyboru jednostek i początku skali zmiennych losowych:

Niech $\begin{cases} \mathrm{x} = a\,\mathrm{u} + b \\ \mathrm{y} = c\,\mathrm{v} + d \end{cases}$ oraz $ac > 0$

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[\mathrm{x},\mathrm{y}]}{\mathcal{D}[\mathrm{x}]\mathcal{D}[\mathrm{y}]} = \frac{\mathcal{E}[\mathrm{xy}] - \mathcal{E}[\mathrm{x}]\mathcal{E}[\mathrm{y}]}{\mathcal{D}[\mathrm{x}]\mathcal{D}[\mathrm{y}]} = \frac{\mathcal{E}[(a\mathrm{u}+b)(c\mathrm{v}+d)] - \mathcal{E}[a\mathrm{u}+b]\mathcal{E}[c\mathrm{v}+d]}{\mathcal{D}[a\mathrm{u}+b]\mathcal{D}[c\mathrm{v}+d]} =$$

$$= \frac{ac\mathcal{E}[\mathrm{uv}] + ad\mathcal{E}[\mathrm{u}] + bc\mathcal{E}[\mathrm{v}] + bd - ac\mathcal{E}[\mathrm{u}]\mathcal{E}[\mathrm{v}] - ad\mathcal{E}[\mathrm{u}] - bc\mathcal{E}[\mathrm{v}] - bd}{|ac|\mathcal{D}[\mathrm{u}]\mathcal{D}[\mathrm{v}]} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}[\mathrm{uv}] - \mathcal{E}[\mathrm{u}]\mathcal{E}[\mathrm{v}]}{\mathcal{D}[\mathrm{u}]\mathcal{D}[\mathrm{v}]} = \frac{\mathrm{cov}[\mathrm{u},\mathrm{v}]}{\mathcal{D}[\mathrm{u}]\mathcal{D}[\mathrm{v}]}$$

Współczynnik korelacji

- zakres wartości $-1 \le \rho \le 1$

$$u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}, \quad v = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[u] = \mathcal{E}[v] = 0, \quad \mathcal{V}[u] = \mathcal{V}[v] = 1, \quad \mathrm{cov}[u,v] = \rho$$

$$\mathcal{V}[u+v] = \left\langle (u+v)^2 \right\rangle = \left\langle u^2 \right\rangle + 2\left\langle uv \right\rangle + \left\langle v^2 \right\rangle = 2 + 2\rho \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \ge -1$$

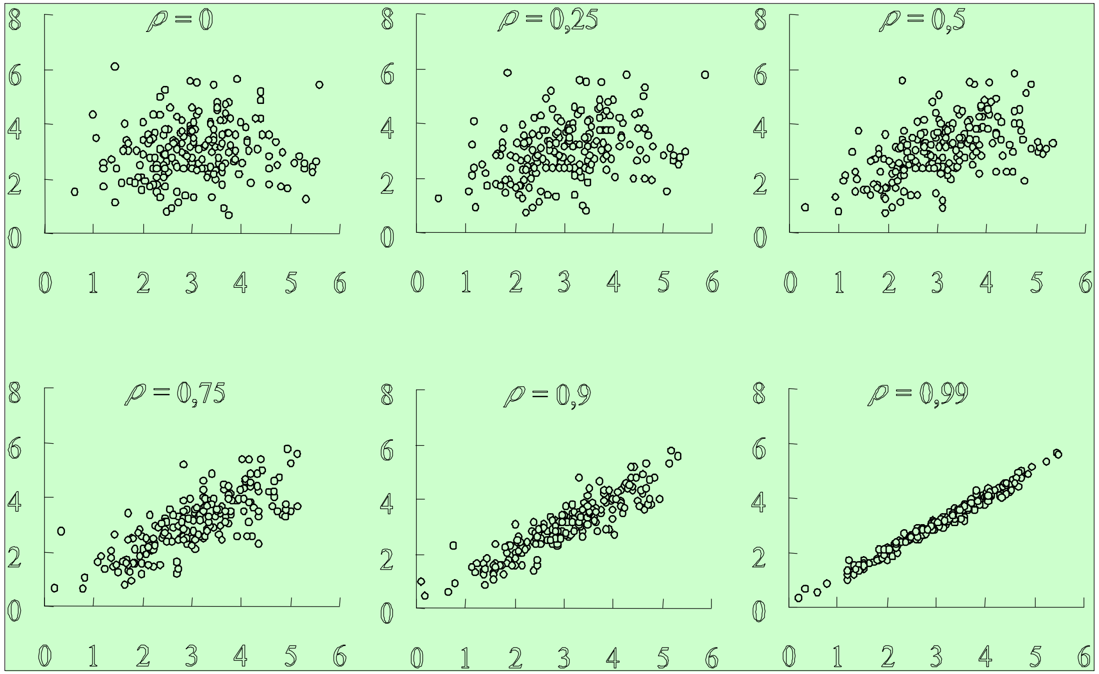
$$\mathcal{V}[u-v] = \left\langle (u-v)^2 \right\rangle = \left\langle u^2 \right\rangle - 2\left\langle uv \right\rangle + \left\langle v^2 \right\rangle = 2 - 2\rho \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \le +1$$

$$\rho = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}[u \mp v] = 0$$

$$\Rightarrow \quad u \mp v = 0$$

$$\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \mp \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} = 0$$

$$y = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x) + \mu_y$$



Macierz kowariancji

Wariancja sumy zmiennych losowych. Niech $\mathrm{z} = a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c$:

$$\mathcal{V}[\mathrm{z}] = a^2\mathcal{V}[\mathrm{x}] + b^2\mathcal{V}[\mathrm{y}] + 2ab\iint \left(x - \langle \mathrm{x}\rangle\right)\left(y - \langle \mathrm{y}\rangle\right) f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= a^2\mathcal{V}[\mathrm{x}] + b^2\mathcal{V}[\mathrm{y}] + 2ab\,\mathrm{cov}[\mathrm{x},\mathrm{y}]$$

Uogólnienie na wiele zmiennych losowych $\mathrm{z} = a_1\mathrm{x}_1 + a_2\mathrm{x}_2 + \ldots + a_n\mathrm{x}_n + b$:

$$\mathcal{V}[\mathrm{z}] = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \,\mathrm{cov}[\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_j] \equiv \vec{a}\,\mathrm{V}[\vec{\mathrm{x}}]\,\vec{a}^T$$

gdzie

$$\vec{a} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right), \qquad \mathrm{V}(\vec{\mathrm{x}}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}[\mathrm{x}_1] & \mathrm{cov}[\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2] & \cdots & \mathrm{cov}[\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_n] \\ \mathrm{cov}[\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_1] & \mathcal{V}[\mathrm{x}_2] & \cdots & \mathrm{cov}[\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}[\mathrm{x}_n,\mathrm{x}_1] & \mathrm{cov}[\mathrm{x}_n,\mathrm{x}_2] & \cdots & \mathcal{V}[\mathrm{x}_n] \end{bmatrix}$$

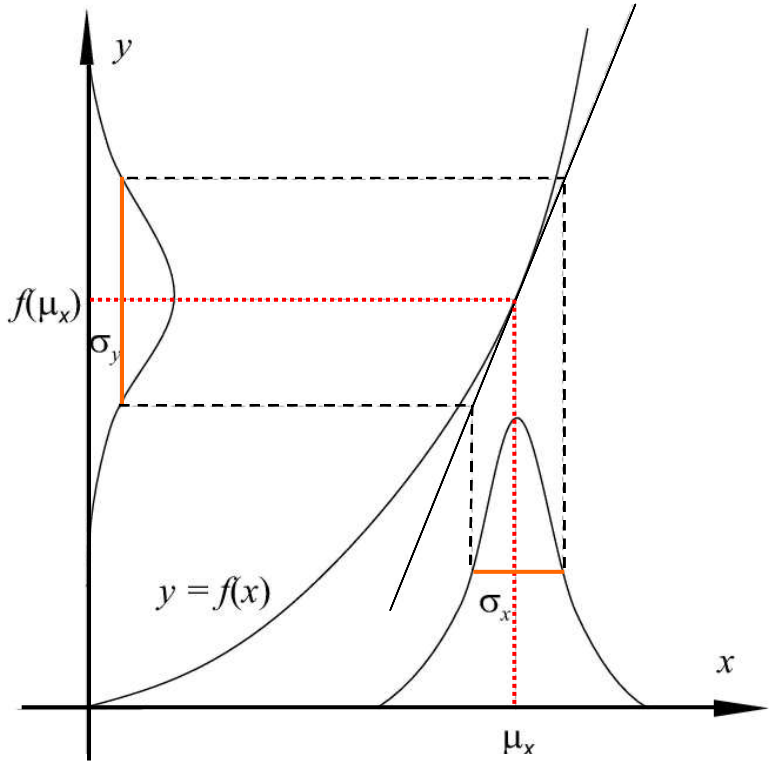
<u>Uwaga:</u> gdy macierz kowariancji jest diagonalna wówczas: $\mathcal{V}[\mathrm{z}] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathcal{V}[\mathrm{x}_i]$

<u>Uwaga:</u> dla dwóch zm. nieskorelowanych: $\mathcal{V}[\mathrm{x}+\mathrm{y}] = \mathcal{V}[\mathrm{x}-\mathrm{y}] = \mathcal{V}[\mathrm{x}] + \mathcal{V}[\mathrm{y}]$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Problem: Jak oszacować niepewność standardową wyniku otrzymanego za pomocą danej formuły matematycznej z pomiarów wielkości wchodzących do tej formuły, których niepewności standardowe są znane?

Załóżmy, że w obszarze niepewności argumentów zadana zależność funkcyjna może być przybliżona zależnością liniową (model małych niepewności pomiarowych).



$$y = f(x) \cong f(\mu_x) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\mu_x} (x - \mu_x) \equiv$$

$$\equiv f(\mu_x) + \frac{df}{dx}(x - \mu_x) \qquad \text{gdzie} \qquad \frac{df}{dx} \equiv \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\mu_x}$$

Obliczymy wartość oczekiwaną i wariancję y:

$$\mathcal{E}[\mathrm{y}] \equiv \mu_\mathrm{y} \cong f(\mu_\mathrm{x}) + \frac{df}{dx}\langle \mathrm{x} - \mu_\mathrm{x} \rangle = f(\mu_\mathrm{x})$$

$$\mathcal{V}[f(\mathrm{x})] = \left\langle \left(f(\mathrm{x}) - f(\mu_\mathrm{x}) \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{df}{dx}(\mathrm{x} - \mu_\mathrm{x}) \right)^2 \right\rangle = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \left\langle (\mathrm{x} - \mu_\mathrm{x})^2 \right\rangle = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \mathcal{V}[\mathrm{x}]$$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Uogólnienie na n zmiennych losowych $\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$ o wartościach oczekiwanych $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ i wzajemnych relacjach opisanych macierzą kowariancji

$$\mathrm{V}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}[\mathbf{x}_1] & \mathrm{cov}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] & \cdots & \mathrm{cov}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n] \\ \mathrm{cov}[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1] & \mathcal{V}[\mathbf{x}_2] & \cdots & \mathrm{cov}[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}[\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1] & \mathrm{cov}[\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2] & \cdots & \mathcal{V}[\mathbf{x}_n] \end{bmatrix}$$

oraz m funkcji $f_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$ które aproksymujemy liniowo:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \cong f_1(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right|_{\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mu}} (\mathbf{x}_1 - \mu_1) + ... + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_n}\right|_{\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mu}} (\mathbf{x}_n - \mu_n) \\ f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \cong f_2(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_1}\right|_{\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mu}} (\mathbf{x}_1 - \mu_1) + ... + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_n}\right|_{\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mu}} (\mathbf{x}_n - \mu_n) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \cong f_m(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) + \left.\dfrac{\partial f_m}{\partial \mathbf{x}_1}\right|_{\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mu}} (\mathbf{x}_1 - \mu_1) + ... + \left.\dfrac{\partial f_m}{\partial \mathbf{x}_n}\right|_{\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mu}} (\mathbf{x}_n - \mu_n) \end{cases}$$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Powyższy układ zapisujemy wygodnie w postaci macierzowej jako:

$$\vec{f}\,(\vec{\mathbf{x}}) \cong \vec{f}\,(\vec{\mu}) + \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\mathbf{x}}}\right](\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mu})$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$\vec{f}\,(\vec{\mu}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{\mu}) \\ f_2(\vec{\mu}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{\mu}) \end{pmatrix}, \qquad \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\mathbf{x}}}\right] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix}_{\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mu}}, \qquad \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mu_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n - \mu_n \end{pmatrix}$$

Wartość oczekiwana i wariancja w przypadku gdy mamy tylko jedną funkcję n zmiennych losowych mają postać:

$$\mathcal{E}[\,f\,(\vec{\mathbf{x}})] \cong f\,(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}\right|_{\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mu}} \underbrace{\left\langle \mathbf{x}_i - \mu_i \right\rangle}_{=0} = f\,(\vec{\mu})$$

$$\mathcal{V}[\,f\,(\vec{\mathbf{x}})] = \left\langle \left(f\,(\vec{\mathbf{x}}) - f\,(\vec{\mu}) \right)^2 \right\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}\right) \mathrm{cov}[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k] \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}\right) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \vec{\mathbf{x}}}\right] \mathbf{V}[\vec{\mathbf{x}}] \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \vec{\mathbf{x}}}\right]^T$$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Gdy zmienne losowe nie są skorelowane (macierz V[x] jest diagonalna) to:

$$\mathcal{V}[f] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{df}{dx_i} \right)^2 \mathcal{V}[x_i]$$

Dla dwóch funkcji n zmiennych losowych wyrażenia na wartość oczekiwaną i wariancję przyjmują postać:

$$\mathcal{E}[f_1(\vec{x})] \cong f_1(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \underbrace{\langle x_i - \mu_i \rangle}_{=0} = f_1(\vec{\mu}) \qquad \mathcal{E}[f_2(\vec{x})] \cong f_2(\vec{\mu})$$

$$\mathrm{cov}[f_1, f_2] = \langle (f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{\mu}))(f_2(\vec{x}) - f_2(\vec{\mu})) \rangle \cong \left\langle \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_i} (\mathbf{x}_i - \mu_i) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_k} (\mathbf{x}_k - \mu_k) \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_i} \langle (\mathbf{x}_i - \mu_i)(\mathbf{x}_k - \mu_k) \rangle \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_k} = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{V}[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k] \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_k} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \vec{\mathbf{x}}} \right] \mathbf{V}[\vec{\mathbf{x}}] \left[\frac{\partial f_2}{\partial \vec{\mathbf{x}}} \right]^{\mathrm{T}}$$

Macierz kowariancji dla funkcji f_1 i f_2:

$$\mathbf{V}(\vec{f}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}[f_1] & \mathrm{cov}[f_1, f_2] \\ \mathrm{cov}[f_2, f_1] & \mathcal{V}[f_2] \end{bmatrix}$$

Momenty funkcji zmiennych losowych

Zupełnie ogólnie, dla m funkcji i n zmiennych losowych wyrażenia na wartość oczekiwaną i wariancję przyjmują postać:

$$\mathcal{E}[\vec{f}(\vec{x})] \cong \vec{f}(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \underbrace{\langle x_i - \mu_i \rangle}_{=0} = \vec{f}(\vec{\mu})$$

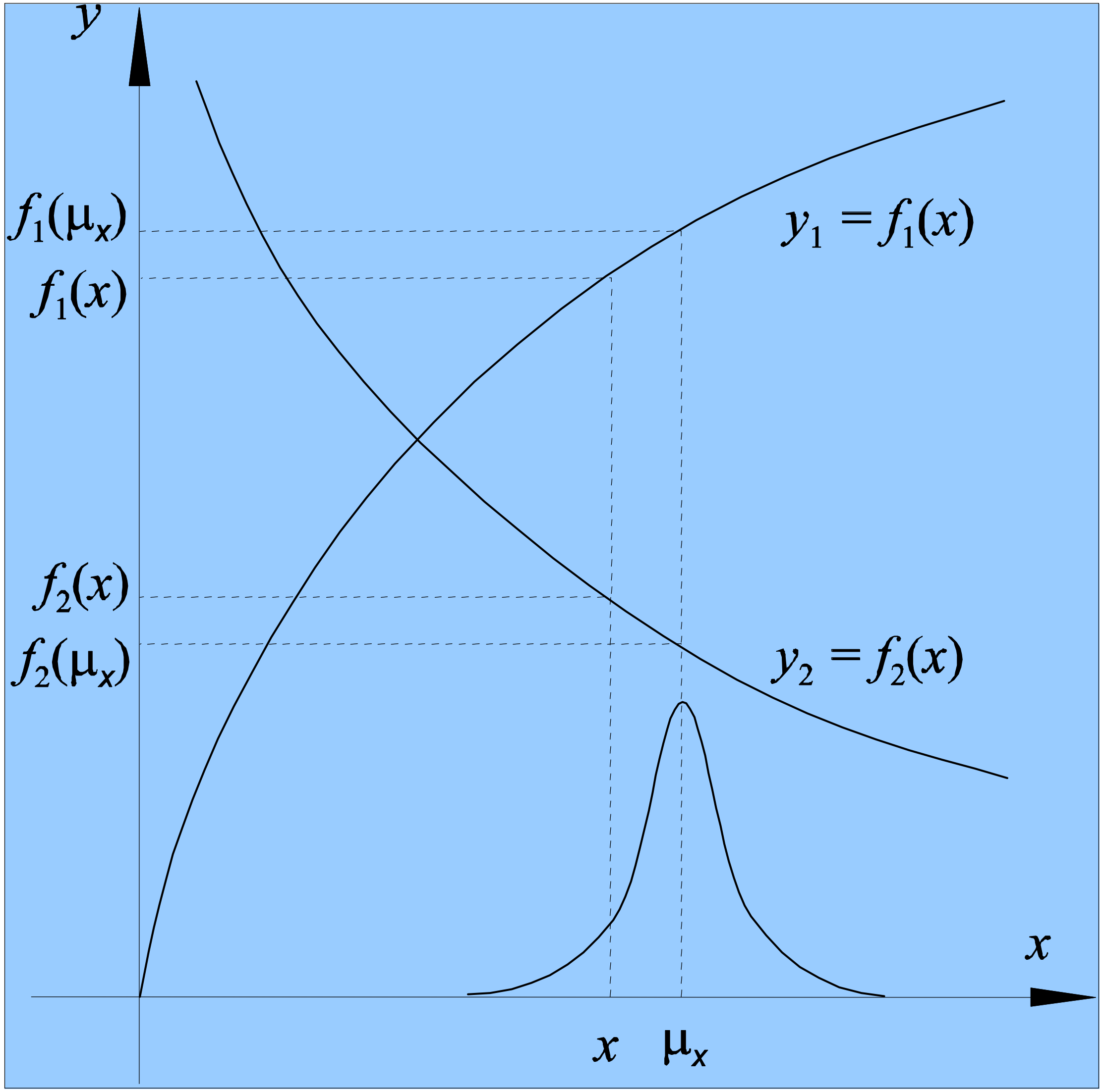
$$V\left[\vec{f}(\vec{x})\right] = \left\langle \left(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{\mu})\right)\left(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{\mu})\right)^{T} \right\rangle \cong \left\langle \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right](\vec{x}-\vec{\mu})\left(\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right](\vec{x}-\vec{\mu})\right)^{T} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right](\vec{x}-\vec{\mu})(\vec{x}-\vec{\mu})^{T}\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right]^{T} \right\rangle = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right]\left\langle (\vec{x}-\vec{\mu})(\vec{x}-\vec{\mu})^{T} \right\rangle \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right]^{T} = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right] V[\vec{x}] \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right]^{T}$$

czyli

$$V(\vec{f}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}[f_1] & \mathrm{cov}[f_1, f_2] & \cdots & \mathrm{cov}[f_1, f_n] \\ \mathrm{cov}[f_2, f_1] & \mathcal{V}[f_2] & \cdots & \mathrm{cov}[f_2, f_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}[f_n, f_1] & \mathrm{cov}[f_n, f_2] & \cdots & \mathcal{V}[f_n] \end{bmatrix}$$

Korelacja w pomiarach złożonych



Propagacja małych błędów

Przykład: Wyznaczamy energię kinetyczną kulki mierząc jej masę z dokładnością 1% oraz dokonując pomiaru jej prędkości poprzez niezależny pomiar przebytej odległości i czasu, przy czym te pomiary wykonujmy z dokładnością 2%. Jaka jest dokładność pomiaru energii?

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{s}{t}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \langle E_k \rangle = E_k(\vec{\mu}) = \frac{1}{2} \langle m \rangle \left(\frac{\langle s \rangle}{\langle t \rangle}\right)^2$$

$$\sigma_{E_k}^2 = \left(\frac{\partial E_k}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial E_k}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial E_k}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\langle s \rangle}{\langle t \rangle}\right)^2\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\langle m \rangle \langle s \rangle}{\langle t \rangle^2}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\langle m \rangle \langle s \rangle^2}{\langle t \rangle^3}\right)^2 \sigma_t^2$$

$$\frac{\sigma_{E_k}}{\langle E_k \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_s}{s}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_t}{t}\right)^2}$$

Uwaga: Względny błąd pomiaru złożonego wyraża się szczególnie prosto w przypadku formuł w których wielkości mierzone pośrednio występują jedynie w postaci iloczynów i ilorazów:

$$z = \frac{a^k b^j}{c^m d^n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma_z}{z} = \sqrt{\left(k\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(j\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(m\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 + \left(n\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

Propagacja małych błędów

<u>Przykład:</u> Wykonujemy pomiar spadku napięcia U i natężenia prądu I płynącego przez nieznany opór, odpowiednio z błędami σ_U i σ_I. Wyliczamy wartość oporu R oraz moc M wydzielaną na tym oporze:

$$R = \frac{U}{I}, \qquad M = UI$$

Jeśli pomiary napięcia i natężenia są niezależne, wówczas macierz kowariancji jest diagonalna:

$$V[U,I] = \begin{bmatrix} \sigma_U^2 & 0 \\ 0 & \sigma_I^2 \end{bmatrix}$$

Znajdujemy macierz pochodnych:

$$\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right] \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial U} & \dfrac{\partial R}{\partial I} \\ \dfrac{\partial M}{\partial U} & \dfrac{\partial M}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{I} & -\dfrac{U}{I^2} \\ I & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{R}{U} & -\dfrac{R}{I} \\ \dfrac{M}{U} & \dfrac{M}{I} \end{bmatrix}$$

Macierz kowariancji zmiennych R oraz M ma postać:

$$V[R,M] \cong \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right] V[U,I] \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right]^T = \begin{bmatrix} R^2\left(\dfrac{\sigma_U^2}{U^2} + \dfrac{\sigma_I^2}{I^2}\right) & MR\left(\dfrac{\sigma_U^2}{U^2} - \dfrac{\sigma_I^2}{I^2}\right) \\ MR\left(\dfrac{\sigma_U^2}{U^2} - \dfrac{\sigma_I^2}{I^2}\right) & M^2\left(\dfrac{\sigma_U^2}{U^2} + \dfrac{\sigma_I^2}{I^2}\right) \end{bmatrix}$$

Małe czy duże błędy

<u>Przykład:</u> Chcemy zmierzyć energię kinetyczną kulki o znanej masie. Załóżmy, że mierzymy jej prędkość z dokładnością do 2%.

Korzystając z przybliżenia liniowego dostajemy:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\mathbf{v}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}(\mu_v) = \frac{1}{2}\mathbf{m}\,\mu_v^2$$

$$\sigma_E^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{v}}\right)^2 \sigma_v^2 = (\mathbf{m}\,\mu_v)^2\,\sigma_v^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma_E}{\mathbf{E}} = \sqrt{\left(2\frac{\sigma_v}{\mu_v}\right)^2} = \left|2\frac{\sigma_v}{\mu_v}\right|$$

Załóżmy, że rozkład prędkości jest rozkładem normalnym:

$$f(v) = \mathcal{N}(v;\mu_v,\sigma_v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\exp\left(-\frac{(v-\mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right)$$

Wartość oczekiwana energii jest wówczas równa:

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2}\mathbf{m}\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \frac{1}{2}m\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{(v-\mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right)dv = \left\| \begin{array}{c} \dfrac{(v-\mu_v)}{\sqrt{2}\sigma_v} = u \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{\sqrt{2}\sigma_v} = du \\ v = \sqrt{2}\sigma_v u + \mu_v \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{m}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma_v u + \mu_v)^2 \exp(-u^2)\,du = \frac{1}{2}\mathbf{m}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\sigma_v^2\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \mu_v^2\sqrt{\pi}\right] = \frac{1}{2}m\mu_v^2 + \frac{1}{2}m\sigma_v^2$$

Duże błędy pomiarów pośrednich

Znajdziemy rozkład jakiemu podlega energia E: $\mathrm{v} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}} \Rightarrow \left|\frac{dv}{dE}\right| = \frac{1}{\sqrt{2mE}}$

$$g(E) = \left(f(v(E)) + f(-v(E))\right)\left|\frac{dv}{dE}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\frac{1}{\sqrt{2mE}}\left\{\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{2E/m}-\mu_v\right)^2}{2\sigma_v^2}\right) + \exp\left(-\frac{\left(-\sqrt{2E/m}-\mu_v\right)^2}{2\sigma_v^2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\frac{1}{\sqrt{2mE}}\left\{\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{E}-\mu_v\sqrt{m/2}\right)^2}{m\sigma_v^2}\right) + \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{E}+\mu_v\sqrt{m/2}\right)^2}{m\sigma_v^2}\right)\right\}$$

Korzystając z powyższego rozkładu można pokazać, że:

$$\langle E\rangle = \int_0^\infty E\cdot g(E) = \frac{1}{2}m\mu_v^2 + \frac{1}{2}m\sigma_v^2 \qquad \langle E^2\rangle = \frac{3}{4}m^2\sigma_v^4 + \frac{3}{2}m^2\mu_v^2\sigma_v^2 + \frac{1}{4}m^2\mu_v^4$$

$$\sigma_E^2 \equiv \mathcal{V}[E] = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = m^2\mu_v^2\sigma_v^2 + \frac{1}{2}m^2\sigma_v^4$$

Identyczny wynik dostajemy zachowując wyrazy kwadratowe w rozwinięciu w szereg Taylora:

$$f(x) \cong f(\mu) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\mu}(x-\mu) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=\mu}(x-\mu)^2$$

Duże błędy pomiarów pośrednich

Prowadzi to do następujących wyrażeń na wartość oczekiwaną i wariancję:

$$\langle f(x)\rangle \cong f(\mu)+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{d x^2}\right|_{x=\mu} \mathcal{V}[x] \qquad \mathcal{V}[f] \cong \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\mu}\right)^2 \mathcal{V}[x]+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{d^2 f}{d x^2}\right|_{x=\mu}\right)^2 \mathcal{V}^2[x]$$

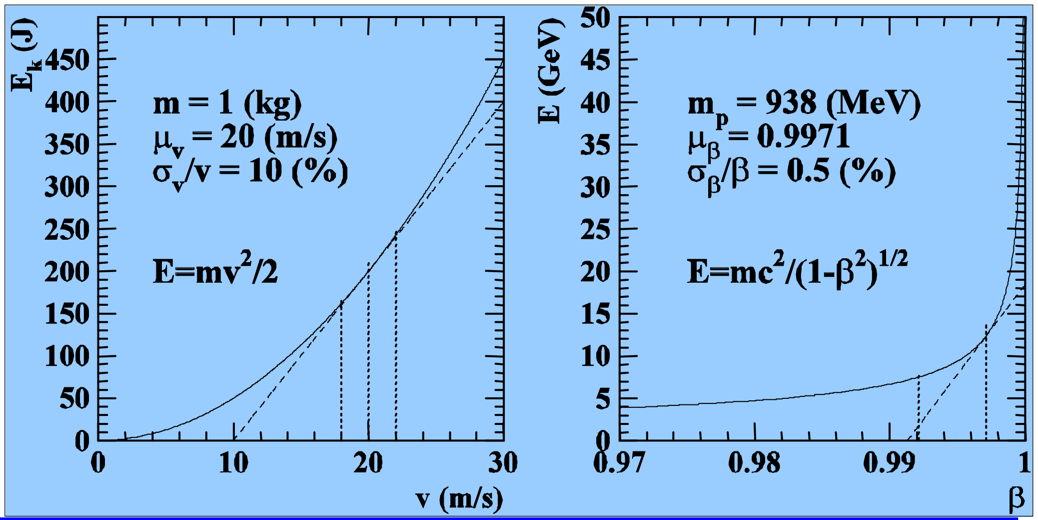
<u>Przykład:</u> Rozpatrzmy proton poruszający się z prędkością $\beta = 0.9971$. Załóżmy, że potrafimy zmierzyć prędkość z dokładnością do 0.2%. Jaka jest dokładność pomiaru całkowitej energii?

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_E^2=\left(\frac{dE}{d\beta}\right)^2 \sigma_\beta^2=\left(\frac{\beta\, mc^2}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3}\right)^2 \sigma_\beta^2$$

$$\frac{\sigma_E}{E}=\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\sigma_\beta}{\beta} \cong \boxed{34.3\%}$$

$$E_- = E\left(\beta-\sigma_\beta\right)=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\beta-\sigma_\beta\right)^2}}=9.49 \quad \text{GeV}$$

$$E_+ = E\left(\beta+\sigma_\beta\right)=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\beta+\sigma_\beta\right)^2}}=22.04 \quad \text{GeV}$$



Wynik podajemy w postaci:

$$\bar{E}^{+(E_+-\bar{E})}_{-(\bar{E}-E_-)} = 12.33^{+9.71}_{-2.84}$$