Rachunek prawdopodo-bieństwa i statystyka

Wykład 7

Ważniejsze rozkłady p-twa

Rozkłady zmiennej losowej dyskretnej:

- rozkład płaski (jednostajny)
- rozkład dwupunktowy (Bernoulliego)
- rozkład dwu- i wielomianowy
- rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)
- rozkład geometryczny
- rozkład hipergeometryczny
- rozkład Poissona

Rozkłady zmiennej losowej ciągłej:

- rozkład płaski (jednostajny)
- rozkład wykładniczy i Erlanga
- rozkład normalny (Gaussa)
- rozkład Studenta
- rozkład χ^2
- rozkład $\mathcal{F}$ Snedecora-Fishera

Rozkład płaski - zmienna dyskretna

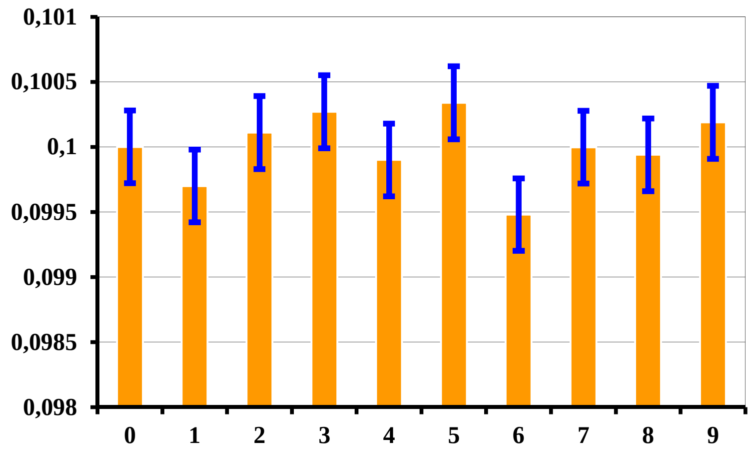
W **rozkładzie płaskim** (jednostajnym, stałym, jednorodnym) każdy spośród n możliwych wyników losowania jest równie prawdopodobny:

$$\boxed{\mathrm{P}_k(n) = \frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n}$$

Wartość oczekiwana:
$$\mathcal{E}[\mathrm{k}] = \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{1}{2} n(n+1) = \boxed{\frac{1}{2}(n+1)}$$

Wariancja:
$$\mathcal{V}[\mathrm{k}] = \mathcal{E}[\mathrm{k}^2] - (\mathcal{E}[\mathrm{k}])^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{1}{n} - (\mathcal{E}[\mathrm{k}])^2 = \frac{1}{n}\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{4}(n+1)^2 = \boxed{\frac{n^2-1}{12}}$$

Przykład: Rozkład cyfr w liczbie π jest zgodny z modelem rozkładu płaskiego.



Przykład: Pomiar za pomocą miernika cyfrowego. Jako błąd zaokrąglenia warto przyjąć dyspersję rozkładu płaskiego, a nie błąd wynikający z klasy przyrządu.

Rozkład płaski - zmienna ciągła

W rozkładzie płaskim (jednostajnym, stałym, jednorodnym) każda wartość z przedziału [a,b] może być wylosowana z jednakowym prawdopodobieństwem:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{b-a} \quad \text{dla} \quad a\le x\le b}$$

Wartość oczekiwana:

$$\mathcal{E}[\mathrm{x}]=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]\Bigg|_a^b=\frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a}=\boxed{\frac{1}{2}(a+b)}$$

Wariancja:

$$\mathcal{V}[\mathrm{x}]=\mathcal{E}[\mathrm{x}^2]-(\mathcal{E}[\mathrm{x}])^2=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x-(\mathcal{E}[\mathrm{x}])^2=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_a^b-\frac{1}{4}(a+b)^2=\boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Przykład: Niech zmienna losowa x ma rozkład jednostajny na przedziale [0,1]. Wówczas zmienna losowa t określona równaniem

$$\mathrm{x}=\lambda\int_0^t \exp(-\lambda t')\,dt'=1-\exp(-\lambda t)$$

czyli $\quad \mathrm{t}=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)=-\tau\ln(1-x) \quad$ albo $\quad \mathrm{t}=-\tau\ln(x)$

ma rozkład wykładniczy $\quad \mathcal{E}(t;\lambda)=\lambda\exp(-\lambda t)$

Rozkład dwupunktowy (Bernoulliego)

Eksperyment Bernoulliego ma dwa możliwe wyniki „sukces” i „porażka”, które się wzajemnie wykluczają i występują losowo.

Próbą Bernoulliego nazywamy ustaloną sekwencję n powtórzeń eksperymentu Bernoulliego. W każdej próbie p-two sukcesu p i porażki $q = 1 - p$ są identyczne, kolejne próby są niezależne: wyniki dotychczasowych prób nie mają wpływu na wyniki kolejnych prób.

Rozkład dwupunktowy (Bernoulliego) ma postać:

$$\mathrm{P}_k(p) = p^k (1-p)^{1-k} \qquad \text{gdzie } k = 0,1$$

Wartość oczekiwana: $$\mathcal{E}[\mathrm{k}] = \sum_{k=0}^{1} k \cdot \mathrm{P}_k = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

Wariancja: $$\mathcal{V}[\mathrm{k}] = \sum_{k=0}^{1} (\mathrm{k} - p)^2 \cdot \mathrm{P}_k = \sum_{k=0}^{1} \mathrm{k}^2 \cdot \mathrm{P}_k - p^2 = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p - p^2 = p(1-p)$$

<u>Przykład:</u> Urna zawiera 10 kul czerwonych i 10 kul czarnych.

– Losujemy kolejno 10 kul, zwracając wylosowaną kulę do urny przed kolejnym losowaniem. Ten schemat odpowiada definicji próby Bernoulliego gdzie p=q=0.5

– Losujemy kolejno 10 kul, nie zwracając wylosowanych kul do urny. To nie są próby Bernoulliego, ponieważ p-two sukcesu p zmienia się podczas każdej próby.

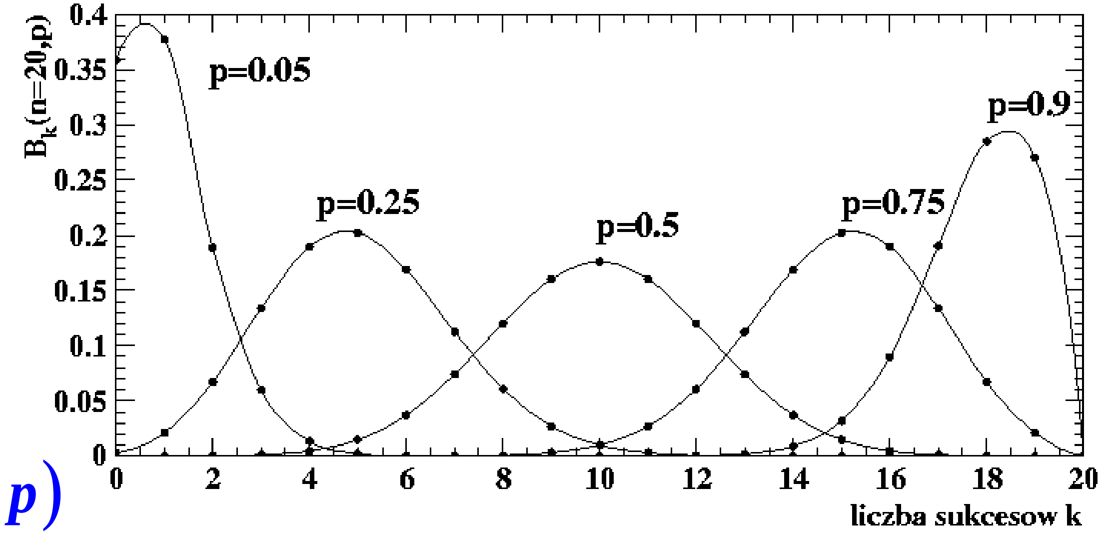
Rozkład dwumianowy

Rozkład dwumianowy to rozkład p-twa k sukcesów w n próbach Bernoulliego, czyli rozkład p-twa sumy n zmiennych losowych $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ każda z rozkładu dwupunktowego.

Rozkład p-twa dany jest przez:

$$\mathcal{B}_k(n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots, n$



Wartość oczekiwana i wariancja:

$$\mathcal{E}[\mathrm{k}] = np \qquad \mathcal{V}[\mathrm{k}] = np(1-p)$$

Przykład: Pewna linia lotnicza stwierdziwszy, że 4% pasażerów którzy wykupią bilety, nie pojawia się na lotnisku, przyjęła politykę sprzedaży stu biletów na samolot, który ma tylko 98 miejsc. Jaka jest szansa na to, że wszyscy którzy przyjdą na lotnisko znajdą się w samolocie? $p = 0.96$ $\quad n = 100$

$$\mathrm{P}(\mathrm{k} \le 98) = 1 - \mathcal{B}_{100}(n,p) - \mathcal{B}_{99}(n,p) = 1 - \binom{100}{100} \cdot p^{100} + \binom{100}{99} \cdot p^{99} \cdot (1-p) \cong 0.913$$

Rozkład wielomianowy

Eksperyment wielomianowy (uogólnienie eksperymentu dwumianowego) polega na:

1. wykonaniu n identycznych prób, przy czym w każdej próbie mamy do czynienia z j wzajemnie rozłącznymi i jedynie możliwymi zdarzeniami $A_1, A_2, \ldots, A_j$
2. p-two zajścia zdarzenia A_i wynosi p_i i nie zmienia się w kolejnych próbach, przy czym $\sum_i p_i = 1$.
3. kolejne próby są niezależne, tzn. rezultaty dotychczasowych prób nie mają wpływu na wyniki przyszłych prób.

Niech zmienne losowe $k_1, k_2, \ldots, k_j$ oznaczają liczby zajść poszczególnych zdarzeń w n próbach, przy czym $k_1 + k_2 + \ldots + k_j = n$. Funkcja p-twa rozkładu wielomianowego dana jest przez:

$$\mathcal{W}_{k_1 \ldots k_j}(n, p_1, \ldots, p_j) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_j!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_j^{k_j}$$

Wartości oczekiwane i wariancje: $\mathcal{E}[\mathbf{k}_i] = np_i \qquad \mathcal{V}[\mathbf{k}_i] = np_i(1 - p_i)$

<u>Przykład:</u> Urna zawiera 10 kul: cztery R, trzy G, trzy B. Losujemy 5 kul ze zwracaniem. Jaka jest szansa wylosowania $k_1 = 2$ kul R, $k_2 = 2$ kul G i $k_3 = 1$ kuli B?

$$P = \frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{4}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^1 = 0.1296$$

Rozkład geometryczny

Rozkład geometryczny opisuje p-two pierwszego sukcesu w k-tej próbie Bernoulliego:

$$\mathcal{G}_k(p) = p(1-p)^{k-1}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Wartość oczekiwana:

$$\mathcal{E}[\mathrm{k}] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathcal{G}_k(p) = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = (1-q)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dq}(q^k) = (1-q)\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) =$$

$$= (1-q)\frac{d}{dq}\left(q\sum_{m=0}^{\infty} q^m\right) = (1-q)\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

Wariancja:

$$\langle \mathrm{k}^2\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \mathcal{G}_k(p) = p\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)^2 q^{k-1} = \| m = k-1 \| = p\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^2 q^m =$$

$$= p\sum_{m=0}^{\infty} m^2 q^m + 2p\sum_{m=0}^{\infty} m q^m + p\sum_{m=0}^{\infty}(1-p)^m = pq\sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} + 2pq\sum_{m=1}^{\infty} m q^{m-1} + \frac{p}{1-q} =$$

$$= q\langle \mathrm{k}^2\rangle + 2\frac{q}{p} + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \langle \mathrm{k}^2\rangle = 2\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} \qquad \mathcal{V}[\mathrm{k}] = \langle \mathrm{k}^2\rangle - \langle \mathrm{k}\rangle^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Przykład: Kontrola jakości. Niech p-two wadliwego wyrobu będzie równe $p=2{\cdot}10^{-6}$. Jaka jest szansa, że na pierwszy wadliwy wyrób natkniemy się wśród pierwszych 10000 skontrolowanych wyrobów?

$$P = \sum_{k=1}^{10000} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{m=0}^{9999}(1-p)^m = p\frac{(1-p)^{10000}-1}{(1-p)-1} = 1-(1-p)^{10000} \cong 0.02$$

Rozkład ujemny dwumianowy

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala) opisuje p-two, że do uzyskania n sukcesów musimy wykonać $k \geq n$ prób według schematu Bernoulliego, przy czym ostatnia próba zakończona jest sukcesem:

$$\mathcal{U}_{\mathrm{k}}(n,p) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad k = n, n+1, n+2, \ldots$$

Rozkład ujemny dwumianowy opisuje rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych, każda z rozkładu geometrycznego $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$:

$$\mathrm{P}_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(p) = p(1-p)^{k_1-1} \cdot p(1-p)^{k_2-1} \cdot \ldots \cdot p(1-p)^{k_n-1} = p^n (1-p)^{k_1+k_2+\ldots+k_n-n}$$

Aby uzyskać rozkład sumy $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ musimy zsumować łączny rozkład p-twa po takich wartościach $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ dla których suma jest stała i równa k:

$$\mathcal{U}_{\mathrm{k}}(n,p) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} p^n (1-p)^{k_1+k_2+\ldots+k_n-n} = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

Wartość oczekiwana i wariancja rozkładu ujemnego dwumianowego jako sumy n niezależnych zmiennych każda z rozkładu geometrycznego z tym samym parametrem p dane są przez:

$$\mathcal{E}[\mathrm{k}] = \frac{n}{p} \qquad \mathcal{V}[\mathrm{k}] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

Rozkład hipergeometryczny

Eksperyment hipergeometryczny polega na wylosowaniu bez zwracania n obiektów z populacji złożonej z N obiektów wśród których jest K obiektów posiadających pewną cechę i $N-K$ nie posiadających tej cechy.

Funkcja p-twa rozkładu hipergeometrycznego dana jest przez:

$$\mathcal{H}_k(N,K,n)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}\qquad \begin{array}{l} N=0,1,2,\ldots \\ n=0,1,2,\ldots,N \\ K=0,1,2,\ldots,N \\ 0\le k\le \min(n,K) \end{array}$$

Wartość oczekiwana i wariancja:

$$\mathcal{E}[k]=np \qquad \mathcal{V}[k]=npq\frac{N-n}{N-1} \qquad \text{gdzie} \qquad p=\frac{K}{N}, \qquad q=1-p$$

Gdy $N\to\infty,\ K\to\infty$ ale tak, że $\frac{K}{N}\to p,\ 0<p<1$ wtedy: $\mathcal{H}_k(N,K,n)\to\mathcal{B}_k(n,p)$

Przykład: Z partii 40 sztuk bezpieczników sprawdza się 4 losowo wybrane. Jeśli choć jeden jest wadliwy, to całą partię się odrzuca. Jakie jest p-two przyjęcia partii zawierającej 10% wadliwych bezpieczników?

$$\mathrm{P}_{acc}=\mathcal{H}_0(N=40,K=4,n=4)=\frac{\binom{4}{0}\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}=0.6445$$

Rozkład wykładniczy

Rozważmy czas oczekiwania na przejazd samochodu. Brak samochodu w ciągu n kolejnych przedziałów czasowych $\Delta t = t/n$ dany jest rozkładem dwumianowym:

$$Q_n = B_0(n,p) = (1-p)^n$$

Niech $p = \lambda \Delta t = \frac{\lambda t}{n}$ gdzie λ (tzw. intensywność) określa typową liczbę zdarzeń na jednostkę czasu:

$$p = \frac{\langle k \rangle}{n} = \frac{\lambda t}{n} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\langle k \rangle}{t}$$

Przechodząc z n do nieskończoności $Q_n = \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} Q(t;\lambda) = \exp(-\lambda t)$

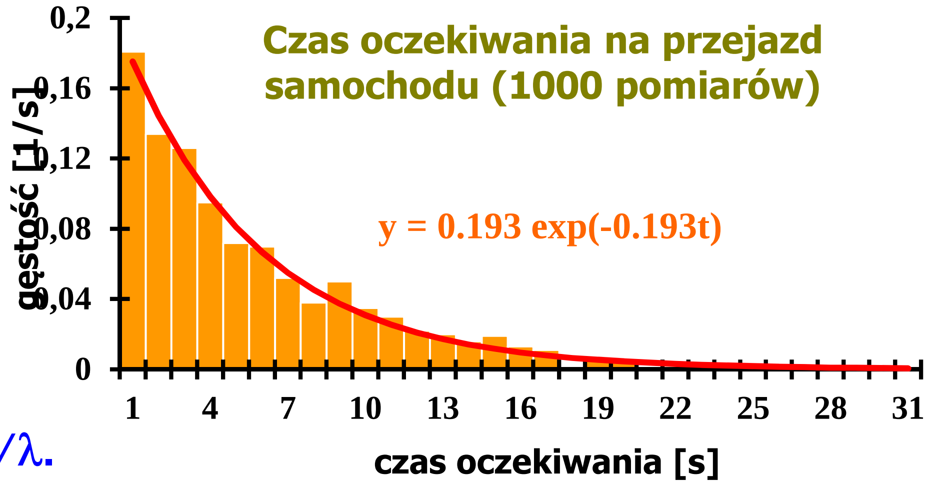
P-two sukcesu w przedziale $(0, t)$:

$$P(0 \le t \le t;\lambda) \equiv F(t;\lambda) = 1 - Q(t;\lambda) =$$
$$= 1 - \exp(-\lambda t)$$

Funkcja gęstości p-twa rozkładu wykładniczego ma postać:

$$\mathcal{E}(t;\lambda) = \frac{d\,F(t;\lambda)}{dt} = \lambda \exp(-\lambda t)$$

gdzie $t \geqslant 0$ oraz $\lambda > 0$. Czas życia to $\tau = 1/\lambda$.



Rozkład wykładniczy

Wartość oczekiwana i wariancja:

$$\mathcal{E}[\mathrm{t}] = \lambda \int_0^\infty t \exp(-\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda} = \tau \qquad \mathcal{V}[\mathrm{t}] = \lambda \int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \exp(-\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda^2} = \tau^2$$

<u>Przykład:</u> („Brak pamięci”) P-two braku samochodu w ciągu czasu T:

$$Q(T) = 1 - \mathrm{F}(T) = \exp(-\lambda T)$$

P-two, że samochód nie przejedzie jeszcze dodatkowo w czasie t jeśli nie przejechał w poprzedzającym czasie T to p-two warunkowe:

$$Q(t\,|\,T) = \mathrm{P}(\mathrm{t} > t+T \,|\, \mathrm{t} > T) = \frac{\mathrm{P}((\mathrm{t} > t+T) \cap (\mathrm{t} > T))}{\mathrm{P}(\mathrm{t} > T)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{t} > t+T)}{\mathrm{P}(\mathrm{t} > T)} = \frac{Q(T+t)}{Q(T)} =$$

$$= \frac{\exp(-\lambda(t+T))}{\exp(-\lambda T)} = \exp(-\lambda t) = Q(t)$$

A więc $Q(t+T) = Q(t)Q(T)$ czyli pozostały okres życia nie zależy od przeszłości.

<u>Uwagi:</u>

- „brak pamięci” jest cechą wyłącznie funkcji wykładniczej (oraz y=0 i y=1)
- prosty matematycznie, ale nie intuicyjny (starzenie się człowieka, urządzeń)
- stosowany do opisu czasu życia urządzeń, których czas życia jest długi

Rozkład wykładniczy

<u>Przykład:</u> W pewnym szpitalu, w niedziele wieczorem pomiędzy 18:00 i 22:00 zgłasza się na izbę przyjęć średnio 5 pacjentów w ciągu godziny. Zakładając, że liczba zgłoszeń podlega rozkładowi Poissona, a czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami rozkładowi wykładniczemu, znajdź:

- średni czas pomiędzy kolejnymi przyjęciami: $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ h}$
- p-two, że kolejne przyjęcie nastąpi w ciągu 15 minut od poprzedniego:

$$P(x \le 0.25) = \int_0^{0.25} \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = -\exp\left(-\frac{t}{0.2}\right)\Big|_0^{0.25} = 1 - \exp\left(-\frac{0.25}{0.2}\right) = 0.7135$$

- p-two, że czas pomiędzy kolejnymi przyjęciami będzie dłuższy niż 10 minut:

$$P(x > 0.1667) = \int_{0.1667}^{\infty} \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = -\exp\left(-\frac{t}{0.2}\right)\Big|_{0.1667}^{\infty} = \exp\left(-\frac{0.1667}{0.2}\right) = 0.4345$$

- p-two, że w dowolnej chwili czas do następnego przyjęcia będzie pomiędzy 15 i 25 minut:

$$P(0.25 < x < 0.4167) = \int_{0.25}^{0.4167} \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = -\exp\left(-\frac{t}{0.2}\right)\Big|_{0.25}^{0.4167} =$$

$$= -\exp\left(-\frac{0.4167}{0.2}\right) + \exp\left(-\frac{0.25}{0.2}\right) = 0.1620$$

Rozkład Erlanga

Znajdziemy rozkład czasów oczekiwania na *n*-te zdarzenie. Łączny czas oczekiwania na *n* zdarzeń dany jest przez:
$$\mathrm{t} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{t}_i \qquad \text{gdzie} \qquad \mathcal{E}(t_i;\lambda) = \lambda \exp(-\lambda t_i)$$

Dla n = 2 mamy t = $\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_2$ oraz (wybieramy $\mathrm{v} = \mathrm{t}_2$, a więc $\mathrm{t}_1 = \mathrm{u}-\mathrm{v}$ i $\mathrm{t}_2 = \mathrm{v}$ oraz |J| = 1):

$$\mathcal{E}_2(t;\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t-v;\lambda)\,\mathcal{E}(v;\lambda)\,dv = \lambda^2 \int_0^t \exp(-\lambda(t-v))\exp(-\lambda v)\,dv =$$

$$= \lambda^2 \exp(-\lambda t)\int_0^t dv = \lambda(\lambda t)\exp(-\lambda t)$$

Podobnie znajdujemy:
$$\mathcal{E}_3(t;\lambda) = \int_0^t \mathcal{E}(t-v;\lambda)\,\mathcal{E}_2(v;\lambda)\,dv =$$

$$= \lambda^2 \int_0^t (\lambda v)\exp(-\lambda(t-v))\exp(-\lambda v)\,dv = \lambda^3 \exp(-\lambda t)\int_0^t v\,dv = \lambda\frac{(\lambda t)^2}{2}\exp(-\lambda t)$$

Rozkład czasu oczekiwania na *n* zdarzeń ma postać (rozkład Erlanga):

$$\mathcal{E}_n(t;\lambda) = \lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{\Gamma(n)}\exp(-\lambda t)$$

Zadanie: Udowodnij powyższy wzór metodą indukcji matematycznej.

Rozkład Erlanga

<u>Przykład:</u> Przychodzimy do urzędu gdzie są dwa okienka. Przed jednym czeka jedna osoba, a przed drugim dwie. Jakie jest p-two, że ustawiając się w dłuższej kolejce dotrzemy do okienka szybciej?

$$\mathcal{E}(t_1;\lambda)=\lambda\exp(-\lambda t_1) \qquad \mathcal{E}_2(t_2;\lambda)=\lambda^2 t_2\exp(-\lambda t_2)$$

Łączny rozkład czasów oczekiwania dany jest przez:

$$f(t_1,t_2;\lambda)=\mathcal{E}(t_1;\lambda)\mathcal{E}_2(t_2;\lambda)=\lambda^3 t_2\exp\left(-\lambda(t_1+t_2)\right)$$

Szukane p-two wynosi:

$$\mathrm{P}(t_2<t_1)=\iint\limits_{t_2<t_1} f(t_1,t_2;\lambda)\,dt_1dt_2=\lambda^3\iint\limits_{t_2<t_1} t_2\exp\left(-\lambda(t_1+t_2)\right)dt_1dt_2=$$

$$=\lambda^3\int_0^\infty t_2\exp(-\lambda t_2)\left(\int_{t_2}^\infty \exp(-\lambda t_1)dt_1\right)dt_2=\lambda^2\int_0^\infty t_2\exp(-2\lambda t_2)\,dt_2=\frac{1}{4}$$

<u>Zadanie:</u> Pokaż, że w ogólnym przypadku dwóch kolejek ($m>n$) p-two to dane jest przez:

$$\mathrm{P}(t_m<t_n)=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m-1+k}{m-1}\frac{1}{2^k}$$

Rozkład Poissona

Rozważmy proces podlegający rozkładowi wykładniczemu.

Ze względu na „brak pamięci" po każdym sygnale (np. przejazd samochodu) historia powtarza się od nowa, tak jakbyśmy oczekiwali na pierwsze zdarzenie.

Jaki jest rozkład p-twa wystąpienia *k* sygnałów w ustalonym czasie t obserwacji?

Niech zmienna losowa $T_k = t_1+t_2+\ldots+t_k$ oznacza moment przybycia k-tego sygnału.

Szukamy p-twa $P((T_k \le t) \cap (T_{k+1} > t))$, gdzie zmienna losowa $T_{k+1} = T_k + t_{k+1}$.

Łączną funkcję gęstości p-twa niezależnych zmiennych losowych T_k i T_{k+1} znajdujemy pamiętając, że zmienna T_k podlega rozkładowi Erlanga:

$$\lambda \frac{(\lambda T_k)^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\lambda T_k) \cdot \lambda \exp(-\lambda t_{k+1}) = \lambda^2 \frac{(\lambda T_k)^{k-1}}{(k-1)!} \exp\left(-\lambda\left(T_k + t_{k+1}\right)\right) = \lambda^2 \frac{(\lambda T_k)^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\lambda T_{k+1})$$

Ponieważ dla przejścia od zmiennych T_k, t_{k+1} do T_k, T_{k+1} , Jakobian jest równy 1, więc:

$$f(T_k, T_{k+1}; \lambda) = \lambda^2 \frac{(\lambda T_k)^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\lambda T_{k+1}) \qquad 0 \le T_k < T_{k+1} < \infty$$

Szukane p-two jest więc równe: $\quad \mathrm{P}\left(\left(\mathrm{T}_k \le t\right) \cap \left(\mathrm{T}_{k+1} > t\right)\right) =$

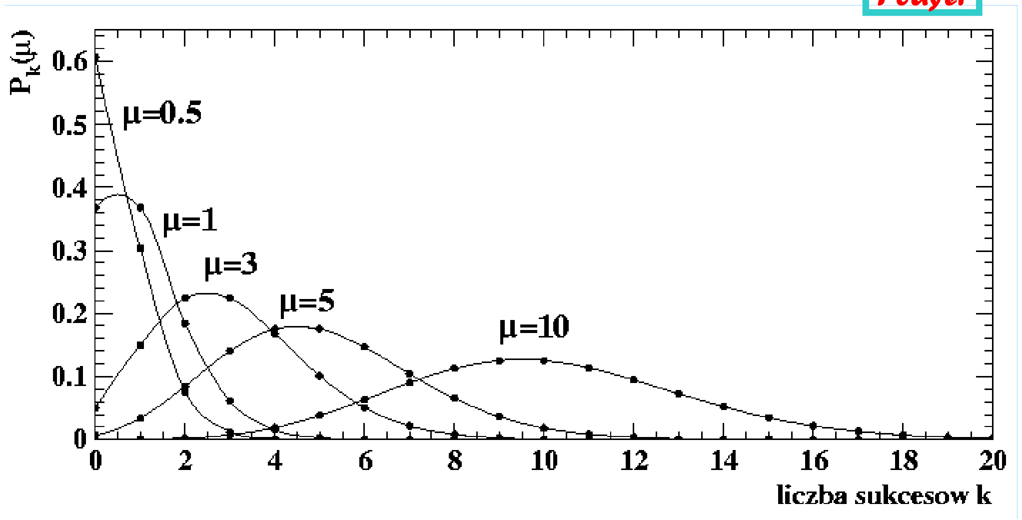
$$= \int_0^t \int_t^\infty f(T_k, T_{k+1}; \lambda)\, dT_{k+1} dT_k = \lambda^2 \int_0^t \frac{(\lambda T_k)^{k-1}}{(k-1)!} dT_k \int_t^\infty \exp(-\lambda T_{k+1})\, dT_{k+1} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

Rozkład Poissona

Oznaczając przez $\mu = \lambda t$ otrzymujemy rozkład Poissona liczby sygnałów k=0,1,... w określonym przedziale czasu:

Math Player

$$\mathcal{P}_k(\mu) = \frac{\mu^k}{k!}\exp(-\mu)$$

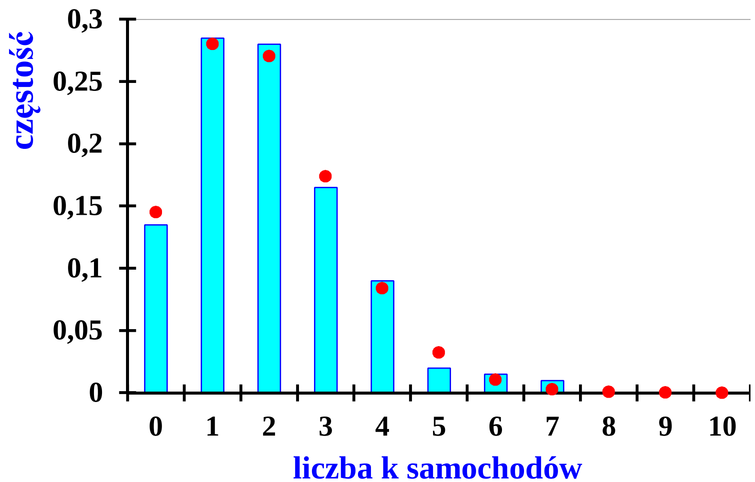


Wartość oczekiwana i wariancja:

$$\mathcal{E}[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathcal{P}_k(\mu) = \mu$$

$$\mathcal{V}[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathcal{P}_k(\mu) - \mu^2 = \mu$$

Błąd liczby zliczeń jest równy pierwiastkowi z tej liczby: $\mathcal{D}[k] = \sqrt{\mu}$ $\quad \dfrac{\mathcal{D}[k]}{\mathcal{E}[k]} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$



Przykład: Wyniki dotyczące obserwacji liczby k samochodów w 10 sekundowych przedziałach czasu. Parametr rozkładu Poissona:

$$\mu = \lambda t = 0.193\ [1/s] \times 10\ [s] = 1.93$$

Rozkład Poissona

Związek rozkładu dwumianowego z rozkładem Poissona.

Jakie jest p-two wystąpienia dokładnie k zdarzeń w przedziale czasu $[0, t]$?

$$\mathcal{B}_k(n,p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\, p^k (1-p)^{n-k}$$

Jeśli p-two sukcesu w pojedynczej próbie dane jest przez $p = \lambda t / n$ to dostajemy:

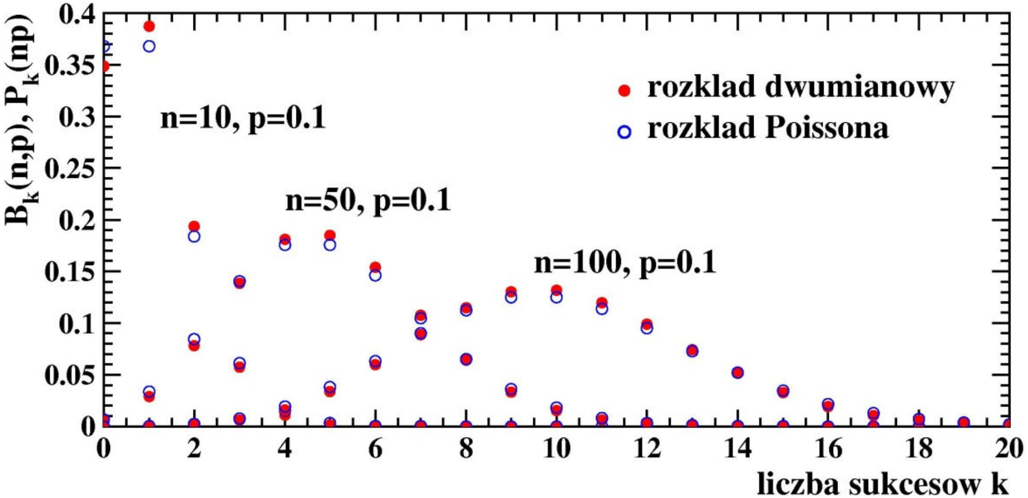
$$\mathcal{B}_k(n,p) = \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)(\lambda t)^k \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k}$$

Dokonując przejścia granicznego dostajemy:

$$\mathcal{B}_k(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{P}_k(\lambda t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Zastosowanie do rzadkich zdarzeń (np. liczba katastrof, błędów drukarskich, rzadkich rozpadów jądrowych, itp.)



Rozkład Poissona

Eksperyment Poissona polega na zliczaniu zdarzeń (sukcesów) w określonej jednostce czasu lub przestrzeni generowanych przez proces Poissona o następujących cechach:

- istnieje eksperymentalnie określona stała λ, będąca średnią częstością pojawiania się sukcesów w ustalonej jednostce czasu lub przestrzeni,
- liczby sukcesów występujące w dowolnych ustalonych i nie przekrywających się podjednostkach są wzajemnie niezależne,
- jeśli ustaloną jednostkę podzielimy na bardzo małe podjednostki h, to p-two dokładnie jednego sukcesu w każdej z podjednostek jest małe i takie samo, i w granicy dąży do λh,
- p-two więcej niż jednego sukcesu w bardzo małej podjednostce dąży do zera.

Przykład: Producent kabli chce używać rozkładu Poissona do oceny liczby defektów. Badając wiele 4-metrowych odcinków stwierdza, że średnio zawierają one 4 defekty. Czy spełnione są warunki procesu Poissona?

Przykład: Pod koniec każdego tygodnia zlicza się w klinice w dużym mieście liczby nowych przypadków zakaźnej choroby. W ciągu ostatnich trzech tygodni zanotowano odpowiednio 2, 10 i 30 przypadków. Czy spełnione są warunki procesu Poissona?