Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Wykład 8

Nierówność Chebyshev'a

Niech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ będą niezależnymi i pochodzącymi z tego samego rozkładu (o wartości oczekiwanej μ i dyspersji σ) zmiennymi losowymi.

Wartość średnia: $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[\bar{\mathbf{x}}] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}[\mathbf{x}_i] = \frac{1}{n} n\mathcal{E}[\mathbf{x}] = \mathcal{E}[\mathbf{x}] \equiv \mu$

$$\mathcal{V}[\bar{\mathbf{x}}] = \mathcal{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{V}[\mathbf{x}_i] = \frac{1}{n^2} n\mathcal{V}[\mathbf{x}] \equiv \frac{\sigma^2}{n}$$

Twierdzenie: (Nierówność Chebyshev'a). Dla dowolnej zmiennej losowej $\mathbf{x}$ i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi: $\mathbf{P}\left(\left|\mathbf{x} - E[\mathbf{x}]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{V}[\mathbf{x}]$

Dowód: $\mathcal{V}[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx \geq$

$$\geq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}(x-\mu)^2 f(x)\,dx \geq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\varepsilon^2 f(x)\,dx = \varepsilon^2 P\left(|x-\mu| \geq \varepsilon\right)$$

Uwaga: „Większość p-twa dla dowolnej zmiennej losowej skoncentrowana jest wokół wartości oczekiwanej w zakresie kilku dyspersji”:

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{x}-\mu| < k\sigma\right) = 1 - \mathbf{P}\left(|\mathbf{x}-\mu| \geq k\sigma\right) \geq 1 - \frac{\mathcal{V}[x]}{k^2\sigma^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$$

Prawo wielkich liczb

Przykład: Zastosowanie nierówności Chebyshev'a do rozkłady wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$.

$$\mathbf{P}\left(\left|x-\mu\right|<k\sigma\right)=\mathbf{P}\left(\left|x-1\right|<k\right)=\mathbf{P}\left(1-k<\mathbf{x}<1+k\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{x}<1+k\right)=1-\mathbf{e}^{-k-1}$$

k	1	2	3	4
Chebyshev	0	0.750	0.889	0.938
P(|x-m|<k)	0.865	0.950	0.982	0.993

Zastosujmy nierówność Chebyshev'a do wartości średniej:

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{\mathbf{x}}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{V}[\overline{\mathbf{x}}]=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Math Player

Twierdzenie: (Prawo wielkich liczb). Dla dwu dowolnych liczb δ i ε istnieje taka liczba naturalna N, że dla wszystkich liczb naturalnych n > N zachodzi:

$$\mathbf{P}\left(|\,\overline{\mathbf{x}}_n-\mu\,|>\varepsilon\right)<\delta \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(|\,\overline{\mathbf{x}}_n-\mu\,|>\varepsilon\right)=0$$

Math Player

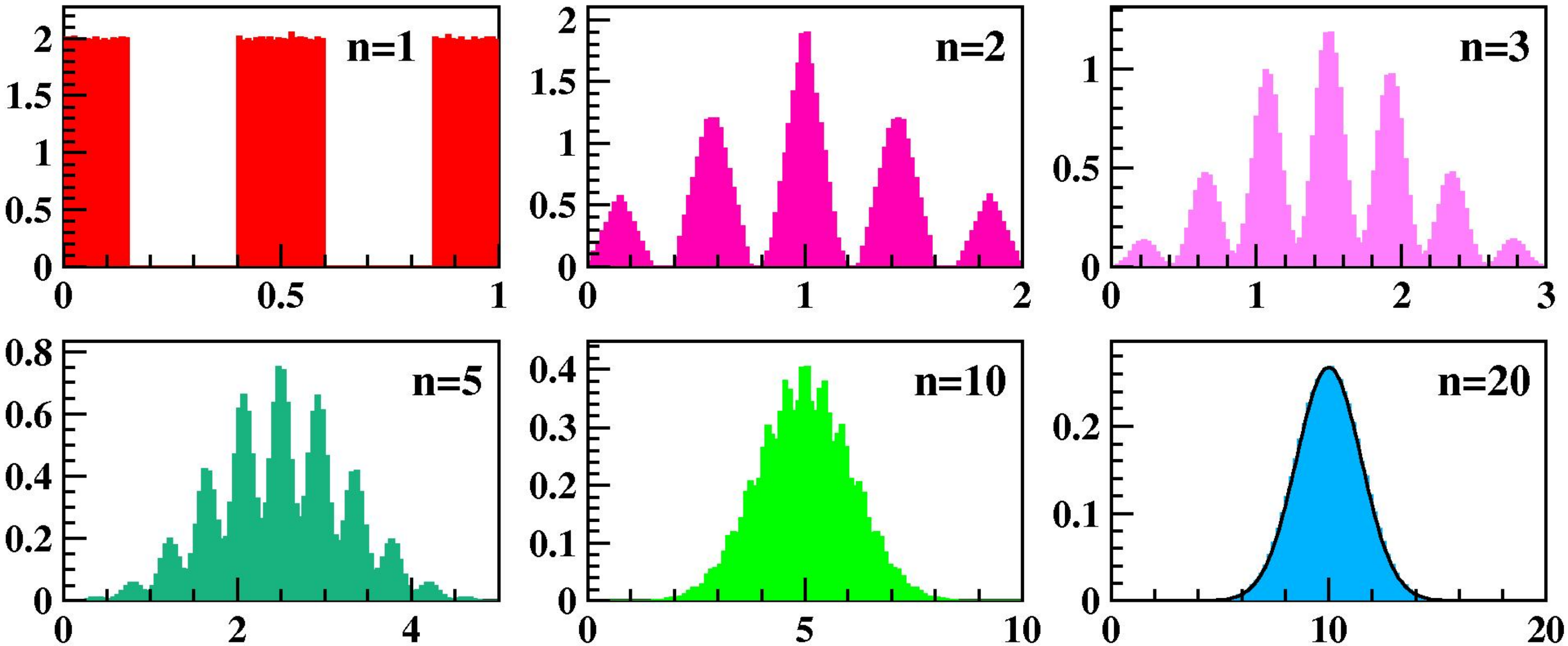
Centralne twierdzenie graniczne

Jeśli dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pochodzących z dowolnego rozkładu, o skończonych wartości oczekiwanej μ i dyspersji σ,

to rozkład gęstości zmiennej losowej $z_n = \dfrac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ **gdzie** $\bar{x}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Math Player

dąży do standaryzowanego rozkładu Gaussa.



Suma zmiennych poissonowskich

Przykład: Rozważmy sumę dwóch niezależnych zmiennych losowych k oraz j obie z rozkładu Poissona o tym samym parametrze μ.

Łączny rozkład p-twa zmiennych k oraz j ma postać:

$$P_{k,j}(\mu) = \mathcal{P}_k(\mu)\mathcal{P}_j(\mu) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu} = \frac{\mu^k\mu^j}{k!\,j!}e^{-2\mu}$$

Rozkład zmiennej losowej $m = k+j$ otrzymujemy z powyższego łącznego rozkładu sumując po wszystkich parach (k, j) takich których suma jest stała i równa m:

$$P_m = \sum_{k+j=m} P_{k,j}(\mu) = e^{-2\mu}\sum_{k=0}^{m}\frac{\mu^k\mu^{m-k}}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m!}e^{-2\mu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mu^k\mu^{m-k} = \frac{(2\mu)^m}{m!}e^{-2\mu}$$

Zmienna losowa m będąca sumą n niezależnych zmiennych losowych z rozkładu Poissona, będzie więc miała rozkład:

$$\mathcal{P}_m(n\mu) = \frac{(n\mu)^m}{m!}e^{-n\mu}$$

Zachowanie graniczne r. Poissona

$$\mathcal{P}_k(\mu)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}\cong\frac{\mu^k}{\sqrt{2\pi k}\,k^{k+\frac{1}{2}}e^{-k}}e^{-\mu}=\frac{\mu^{k+\frac{1}{2}}e^{k-\mu}}{\sqrt{2\pi\mu}\;k^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{e^{k-\mu}}{\sqrt{2\pi\mu}}\left(\frac{k}{\mu}\right)^{-k-\frac{1}{2}}=\qquad \boxed{k\equiv\mu+x}$$

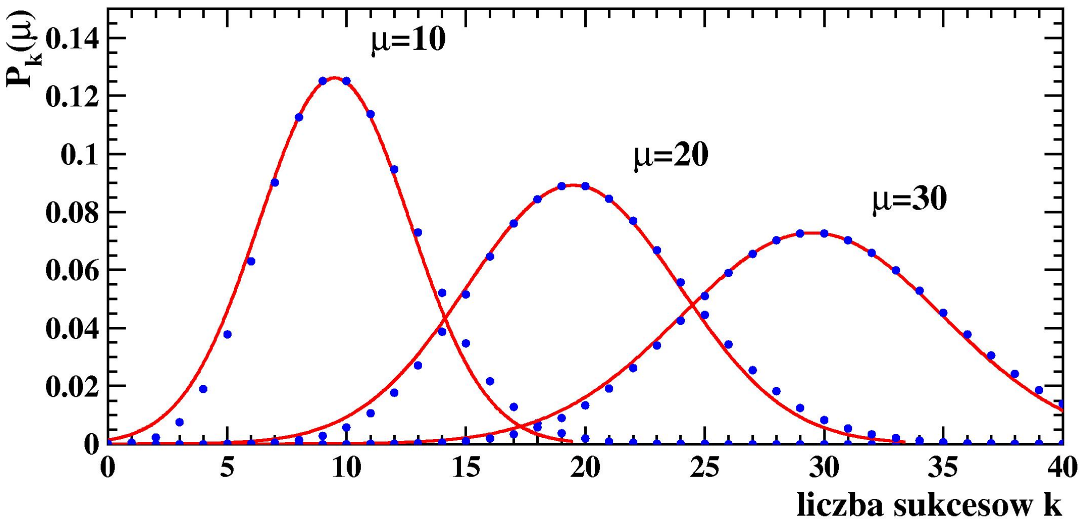
$$=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi\mu}}\left(\frac{\mu+x}{\mu}\right)^{-\mu-x-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\exp\left(x-\left(\mu+x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{\mu}\right)\right)\cong\qquad \boxed{\ln(1+z)\cong z-\frac{1}{2}z^2}$$

$$\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\exp\left(x-\left(\mu+x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\mu}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mu}\right)^2\right)\right)\cong\qquad \boxed{\mu(\mu-1)\cong\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\mu}}\exp\left(-\frac{x^2+x}{2\mu}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\left(k-(\mu-0.5)\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\boxed{\sigma=\sqrt{\mu}}$$



Zachowanie graniczne r. dwumianowego

<u>Przykład:</u> P-two, że w czasie T przestanie świecić jedna żarówka jest równe $p = 0.1$. Jakie jest p-two, że w czasie T spośród $n = 100$ żarówek przestanie świecić od 7 do 19 przy założeniu, że żarówki przepalają się niezależnie?

Obliczenia bezpośrednio z rozkładu dwumianowego są czasochłonne:

$$\mathrm{P}(7 \le \mathrm{k} \le 19) = \sum_{k=7}^{19} \mathcal{B}_k(n = 100, p = 0.1) = \sum_{k=7}^{19} \binom{100}{k} (0.1)^k (1 - 0.1)^{100-k} = 0.8809$$

Korzystając z tw. de Moivre'a – Laplace'a mamy:

$$\boxed{\mathcal{B}_k(n,p) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)}$$

Math Player

$$\mathrm{P}(7 \le \mathrm{k} \le 19) = \mathrm{P}\left(\frac{7 - 0.5 - np}{\sqrt{npq}} < \frac{\mathrm{k} - np}{\sqrt{npq}} < \frac{19 + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{7 - 0.5 - 10}{\sqrt{9}} < \mathrm{z} < \frac{19 + 0.5 - 10}{\sqrt{9}}\right) = \mathrm{P}(-1.17 < \mathrm{z} < 3.17) =$$

$$= \Phi(3.17) - \Phi(-1.17) = \Phi(3.17) + \Phi(1.17) - 1 = 0.9992 + 0.8790 - 1 = 0.8782$$

Bez „0.5” otrzymalibyśmy: $\mathrm{P}(7 \le \mathrm{k} \le 19) = \mathrm{P}(-1 \le \mathrm{z} \le 3) = \Phi(3) - \Phi(-1) \cong 0.8400$

Estymacja - podstawowe pojęcia

Celem pomiarów jest znalezienie rozkładu p-twa leżącego u podstaw badanej cechy (bądź przynajmniej jego najważniejszych parametrów).

Populacja – zbiór wszystkich przedstawicieli posiadających badaną cechę.

Próbka losowa – reprezentatywna próbka całej populacji, tzn. taka, która odzwierciedla wszystkie cechy i związki w niej występujące.

Próbka obciążona – próbka w której brakuje pewnych klas przypadków, (np. ze względu na skończone rozmiary detektora, skończony czas pomiaru, itd.)

Mówimy, że próbka jest **prosta**, jeśli wszystkie występujące w niej zmienne losowe są niezależne (schemat losowania niezależnego).
W przeciwnym wypadku próbkę nazywamy **złożoną**.

Statystyka – dowolna funkcja $f\,(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ próby losowej $x_1, x_2, \ldots , x_n$.

Niech rozkład badanej cechy X populacji zależy od nieznanego parametru θ, który będziemy szacowali na podstawie n elementowej próby prostej $x_1, x_2, \ldots , x_n$ pobranej z tej populacji.

Estymator i estymata

Estymatorem parametru θ nazywamy każdą statystykę $\hat{\theta}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$, której wartości przyjmujemy jako oceny tego parametru.

Estymata (oszacowanie, ocena) parametru θ to wartość estymatora $\hat{\theta}_n$ jaką przyjmuje on dla konkretnej próbki losowej.

Estymator, którego wartość oczekiwana jest równa wielkości estymowanej, $\mathcal{E}\left[\hat{\theta}_n\right] = \theta$, nazywamy estymatorem nieobciążonym.

Jeśli istnieje $\mathcal{E}\left[\hat{\theta}_n\right]$, lecz $\mathcal{E}\left[\hat{\theta}_n\right] \neq \theta$, to $\hat{\theta}_n$ nazywamy estymatorem obciążonym parametru θ, natomiast różnicę $B_n(\theta) = \mathcal{E}\left[\hat{\theta}_n\right] - \theta$ - obciążeniem estymatora.

Estymator nazywamy asymptotycznie nieobciążonym jeśli zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\left[\hat{\theta}_n\right] - \theta = 0$$

Estymator nazywamy zgodnym, jeśli wariancja tego estymatora dąży do zera dla liczebności próby dążącej do nieskończoności.

Przykład: Estymatorem nieobciążonym wartości oczekiwanej jest średnia arytmetyczna: $\langle \bar{\mathbf{x}} \rangle = \left\langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \right\rangle = \frac{1}{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}_i \rangle = \frac{1}{n} n \langle \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} \rangle = \mu$

Estymator wariancji

Sprawdźmy czy estymatorem wariancji jest wielkość: $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

$$\langle S_x^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \right\rangle = \frac{1}{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\mu)-(\bar{x}-\mu)\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\mu)^2 - 2(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu)+(\bar{x}-\mu)^2\right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - 2(\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) + n(\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle = \frac{1}{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - 2n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu) + n(\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle = \frac{1}{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \right\rangle - \left\langle (\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle = \left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle - \left\langle (\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle = \mathcal{V}[x] - \mathcal{V}[\bar{x}]$$

Wariancja wartości średniej:

$$\mathcal{V}[\bar{x}] = \left\langle (\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{n^2}\left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{n^2}\left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) \right)^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\langle \sum_{i,j=1}^{n}(x_i-\mu)(x_j-\mu) \right\rangle = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle (x_i-\mu)(x_j-\mu) \right\rangle = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\langle (x_i-\mu)^2 \right\rangle + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \underbrace{\langle x_i-\mu \rangle}_{=0} \underbrace{\langle x_j-\mu \rangle}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{n^2} n\mathcal{V}[x] = \frac{1}{n}\mathcal{V}[x]$$

Nieobciążony estymator wariancji: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \langle s_x^2 \rangle = \mathcal{V}[x]$

Błąd błędu

Wariancja estymatora błędu pojedynczego pomiaru dana jest przez:

$$\mathcal{V}\left[s_x^2\right] = \left\langle s_x^4 \right\rangle - \left\langle s_x^2 \right\rangle^2 = \frac{1}{n}\left\langle (x-\mu)^4 \right\rangle - \frac{n-3}{n(n-1)}\mathcal{V}^2[x]$$

Estymatorem wielkości $\mathcal{V}\left[s_x^2\right]$ jest kwadrat błędu kwadratu błędu:

$$s_{s_x^2}^2 = \frac{n}{(n-2)(n-3)}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4 - \frac{n^2-3}{n^2}s_x^4\right) \cong \frac{1}{(n-2)(n-3)}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\bar{x})^2 - s_x^2\right)^2$$

Gdy próbę pobieramy z rozkładu normalnego wówczas mamy:

$$\mathcal{D}\left[s_x^2\right] = \sqrt{\frac{3}{n}\sigma^4 - \frac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\sigma^2 \qquad \boxed{\left\langle (x-\mu)^{2k} \right\rangle = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}}$$

Potraktujmy wielkość s_x^2 jako kwadrat błędu ($u = v^2 \quad \Rightarrow \quad s_u \cong 2\langle v \rangle s_v$):

$$\mathcal{D}\left[s_x^2\right] \cong 2\sigma_x \mathcal{D}\left[s_x\right]$$

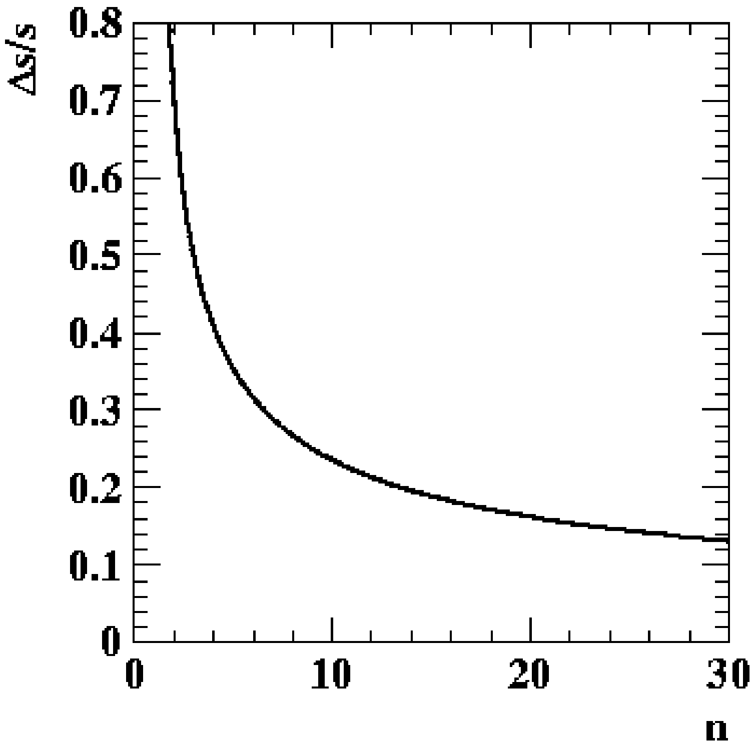
W przypadku rozkładu normalnego dostajemy:

$$\mathcal{D}\left[s_x\right] \cong \frac{\mathcal{D}\left[s_x^2\right]}{2\sigma_x} = \frac{1}{2\sigma_x}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\sigma_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\sigma_x$$

Błąd błędu – uwagi praktyczne

Podobnie dla średniej arytmetycznej mamy:

$$\frac{\Delta s}{s} \equiv \frac{\mathcal{D}[s_{\bar{x}}]}{s_{\bar{x}}} \cong \frac{\mathcal{D}[s_{\bar{x}}]}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$$



<u>Przykład:</u> Dokładność zapisu wyniku pomiaru.

$$\bar{x} = 9.87654321 \qquad s_{\bar{x}} = 1.23456789$$

Dla n=5 mamy $\Delta\sigma/\sigma \cong 35\%$ czyli $\Delta\sigma \cong 0.4$

dlatego wynik zapisujemy w postaci 10 ± 1

Dla n=50 mamy $\Delta\sigma/\sigma \cong 10\%$ czyli $\Delta\sigma \cong 0.1$

dlatego wynik zapisujemy w postaci 9.8 ± 1.2

Interpretacja zapisu „wynik ± błąd”:

- wartość zmierzona estymuje wartość oczekiwaną,
- błąd jest statystyczny, a jego kwadrat estymuje wariancję,
- rozkład p-twa wielkości mierzonej jest symetryczny.

Estymator kowariancji i wsp. korelacji

Nieobciążony estymator kowariancji to $\mathbf{R} \equiv \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$

$$\langle R\rangle = \frac{1}{n-1}\left\langle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right\rangle = \frac{1}{n-1}\left\langle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_x-(\bar{x}-\mu_x)\right)\left(y_i-\mu_y-(\bar{y}-\mu_y)\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\langle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)-(\bar{y}-\mu_y)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)-(\bar{x}-\mu_x)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)+\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu_x)(\bar{y}-\mu_y)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)\right\rangle - n\left\langle(\bar{x}-\mu_x)(\bar{y}-\mu_y)\right\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\left\langle(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right\rangle - \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)\right\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\,\mathrm{cov}[x,y] - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)\right\rangle + \sum_{i\neq j=1}^{n}\left\langle(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)\right\rangle\right)\right) =$$

$$= \frac{n\,\mathrm{cov}[x,y]-\mathrm{cov}[x,y]}{n-1} = \mathrm{cov}[x,y]$$

Asymptotycznie nieobciążony estymator współczynnika korelacji: $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{s_x s_y}$

Estymatory – rozkład dwumianowy

Estymator parametru p: $$\langle \hat{\mathrm{p}} \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{k}}{n} \right\rangle = \frac{1}{n}\langle \mathrm{k} \rangle = \frac{1}{n} np = p$$

Wariancja estymatora parametru p:

$$\mathcal{V}[\hat{\mathrm{p}}] = \langle \hat{\mathrm{p}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathrm{p}} \rangle^2 = \left\langle \left(\frac{\mathrm{k}}{n} \right)^2 \right\rangle - p^2 = \frac{1}{n^2}\langle \mathrm{k}^2 \rangle - p^2 = \frac{1}{n^2} np\big((n-1)p+1\big) - p^2 = \frac{1}{n} p(1-p)$$

Estymator wariancji estymatora parametru p:

$$\frac{1}{n}\langle \hat{p} \rangle - \frac{1}{n}\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{1}{n} p - \frac{1}{n}\frac{1}{n^2} np\big((n-1)p+1\big) = \frac{1}{n} p - \frac{1}{n^2}\big(np^2 - p^2 + p\big) =$$

$$= \frac{1}{n} p - \frac{1}{n} p^2 + \frac{1}{n^2} p^2 - \frac{1}{n^2} p = \frac{1}{n} p(1-p) - \frac{1}{n^2} p(1-p) = \frac{n-1}{n^2} p(1-p)$$

Nieobciążonym estymatorem wariancji jest: $$\hat{\mathcal{V}}[\hat{\mathrm{p}}] \equiv \mathrm{s}^2_{\hat{\mathrm{p}}} = \frac{1}{n-1} \hat{\mathrm{p}}(1-\hat{\mathrm{p}})$$

Estymator wariancji zmiennej losowej k:

$$\langle n\hat{\mathrm{p}}(1-\hat{\mathrm{p}}) \rangle = n\left\langle \frac{\mathrm{k}}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{k}}{n}\right) \right\rangle = \langle \mathrm{k} \rangle - \frac{1}{n}\langle \mathrm{k}^2 \rangle = np - \frac{1}{n} np\big((n-1)p+1\big) = (n-1)pq$$

Nieobciążonym estymatorem wariancji jest: $$\hat{\mathcal{V}}[\mathrm{k}] \equiv \mathrm{s}^2_{\mathrm{k}} = \frac{n}{n-1} n\hat{\mathrm{p}}(1-\hat{\mathrm{p}})$$

Estymatory – rozkład wykładniczy

Estymator parametru τ:

$$\langle\hat{\tau}\rangle = \langle\bar{t}\rangle = \left\langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle t_i\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau = \tau$$

Wariancja estymatora parametru τ:

$$\mathcal{V}[\hat{\tau}] = \mathcal{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right] = \frac{1}{n^2}\mathcal{V}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{V}[t_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\tau^2 = \frac{1}{n}\tau^2$$

Estymator wariancji estymatora parametru τ:

$$\langle\hat{\tau}^2\rangle = \left\langle\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right\rangle = \frac{1}{n^2}\left\langle \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n} t_i\, t_j \right\rangle = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle t_i^2\rangle + \sum_{i\neq j=1}^{n}\langle t_i\rangle\langle t_j\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n2\tau^2 + n(n-1)\tau^2\right) = \frac{n+1}{n}\tau^2$$

Nieobciążonym estymatorem wariancji jest:

$$\hat{\mathcal{V}}[\hat{\tau}] \equiv s_{\hat{\tau}}^2 = \frac{1}{n+1}\hat{\tau}^2$$

Estymator parametru λ:

$$\left\langle\frac{1}{t}\right\rangle = \left\| t = \sum_{i=1}^{n} t_i \right\| = \left\langle\frac{n}{t}\right\rangle = n\lambda\int_0^\infty \frac{1}{t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\,dt = \|x = \lambda t\| = \frac{n}{n-1}\lambda\int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}e^{-x}\,dx = \frac{n}{n-1}\lambda$$

Estymatory - rozkład wykładniczy

Nieobciążonym estymatorem parametru λ jest: $\hat{\lambda} = \frac{n-1}{\mathbf{t}} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{t}_i}$

Wariancja estymatora parametru λ:

$$\mathcal{E}[\hat{\lambda}^2] = \lambda (n-1)^2 \int_0^\infty \frac{1}{t^2} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt = \lambda^2 \frac{n-1}{n-2}$$

$$\mathcal{V}[\hat{\lambda}] = \frac{n-1}{n-2}\lambda^2 - \lambda^2 = \frac{1}{n-2}\lambda^2$$

Nieobciążonym estymatorem wariancji jest: $\hat{\mathcal{V}}[\hat{\lambda}] \equiv s_{\hat{\lambda}}^2 = \frac{1}{n-1}\hat{\lambda}^2$

Uwaga: Jeśli $\hat{\varphi}$ jest estymatorem parametru φ rozkładu, a $\theta = h(\varphi)$ jest funkcją tego estymatora to w ogólności $\hat{\theta} \neq h(\hat{\varphi})$

Estymator wariancji zmiennej losowej t z rozkładu wykładniczego:

$$\langle \hat{\tau}^2 \rangle = \langle \overline{\mathbf{t}}^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{t}_i \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{n^2} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \mathbf{t}_i^2 + \sum_{i \neq j=1}^{n} \mathbf{t}_i \mathbf{t}_j \right\rangle = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{t}_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j=1}^{n} \langle \mathbf{t}_i \rangle \langle \mathbf{t}_j \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n 2\tau^2 + n(n-1)\tau^2\right) = \frac{n+1}{n}\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{V}}[\mathbf{t}] \equiv s_{\mathbf{t}}^2 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{t}_i\right)^2$$

Metoda momentów

Przykład: Rozważmy rozkład liniowy z nieznanym parametrem θ:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2}(1+\theta x) \qquad -1 \le x \le 1, \quad -1 \le \theta \le 1$$

Wartość oczekiwana zmiennej x: $\mathcal{E}[\mathrm{x}] = \int_{-1}^{1} x f(x;\theta)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(1+\theta x)\,dx = \frac{1}{3}\theta$

Estymator parametru θ: $\bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{3}\hat{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\theta} = 3\,\bar{\mathrm{x}}$

Jego wariancja: $\mathcal{V}[\hat{\theta}] = 9\mathcal{V}[\bar{\mathrm{x}}] = \frac{9}{n}\mathcal{V}[\mathrm{x}] = \frac{1}{n}(3-\theta^2)$

Estymator parametru θ na podstawie wariancji:

$$\mathcal{V}[\mathrm{x}] = \mathcal{E}[\mathrm{x}^2] - \mathcal{E}^2[\mathrm{x}] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1+\theta x)\,dx - \frac{1}{9}\theta^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\theta^2$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\hat{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\theta} = \sqrt{3 - 9\,\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2}$$

W ogólnym przypadku do znalezienia estymatorów dla n parametrów rozkładu potrzebujemy n momentów (najłatwiej wykorzystać najniższe).