Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Wykład 8

Funkcja generująca rozkład (p-two)

Definicja: Funkcją generującą rozkład (prawdopodobieństwo) (FGP) dla zmiennej losowej X przyjmującej wartości całkowite nieujemne, nazywamy:

$$g_{\mathrm{X}}(t)=\mathcal{E}\left[t^{\mathrm{X}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} t^{n}\cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)$$

Twierdzenie: (o jednoznaczności) Jeśli X i Y są zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości całkowite nieujemne to $g_{\mathrm{X}}=g_{\mathrm{Y}} \Rightarrow p_{\mathrm{X}}=p_{\mathrm{Y}}$

Twierdzenie: Niech $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\ldots,\mathrm{X}_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach całkowitych nieujemnych, oraz niech $\mathrm{S}_n=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\ldots+\mathrm{X}_n$ wówczas:

$$g_{\mathrm{S}_n}(t)=\prod_{k=1}^{n} g_{\mathrm{X}_k}(t)$$

Dowód:

$$g_{\mathrm{S}_n}(t)=\mathcal{E}\left[t^{\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\ldots+\mathrm{X}_n}\right]=\mathcal{E}\left[\prod_{k=1}^{n} t^{\mathrm{X}_k}\right]=\prod_{k=1}^{n}\mathcal{E}\left[t^{\mathrm{X}_k}\right]=\prod_{k=1}^{n} g_{\mathrm{X}_k}(t)$$

Wniosek: Jeśli wszystkie zmienne $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\ldots,\mathrm{X}_n$ podlegają temu samemu rozkładowi, wtedy:

$$g_{\mathrm{S}_n}(t)=\left(g_{\mathrm{X}}(t)\right)^{n}$$

Funkcja generująca rozkład (p-two)

FGP generuje prawdopodobieństwo, ponieważ:

$$g_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)t^{n-k}\cdot \mathrm{P}(X=n) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(X=n) = \frac{g_X^{(n)}(t)\big|_{t=0}}{n!}$$

Twierdzenie: Niech X będzie nieujemną zmienna losową o wartościach całkowitych oraz niech $\mathcal{E}|X|^k < \infty$ dla pewnego $k=1,2,\dots$, wtedy

$$\mathcal{E}\left[X(X-1)\dots(X-k+1)\right] = g_X^{(k)}(1)$$

Wniosek: W szczególności dla $k=1$ i $k=2$ mamy

$$\mathcal{E}|X| < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[X] = g'_X(1)$$

$$\mathcal{E}[X^2] < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2$$

Przykład: FGP dla rozkładu Bernouliego:

$$g_X(t) = (1-p)t^0 + pt^1 = q + pt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{E}[X] = g'_X(1) = p \\ \mathcal{V}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = pq \end{cases}$$

Przykład: FGP dla rozkładu dwumianowego:

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (q+pt)^n \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}[X] = g'_X(1) = np \\ \mathcal{V}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = npq \end{cases}$$

Funkcja generująca rozkład (p-two)

<u>Przykład:</u> FGP dla rozkładu geometrycznego ($P(X=k)=pq^k,\ k=0,1,\ldots$)

znajdujemy FGP:

$$g_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k pq^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(tq)^k=\frac{p}{1-qt},\quad \text{dla}\quad |t|<\frac{1}{q}$$

Znajdziemy FGP dla sumy n niezależnych zmiennych z rozkładu geometrycznego (Fs):

$$S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n \qquad\qquad g_{S_n}(t)=\left(g_X(t)\right)^n=\left(\frac{p}{1-qt}\right)^n$$

oraz sam rozkład p-twa:

$$P(S_n=k)=\frac{1}{k!}g_{S_n}^{(k)}(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{k!}p^n n(n+1)\cdots(n+k-1)q^k(1-qt)^{-n-k}\Big|_{t=0}=$$

$$=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}p^nq^k=\binom{n+k-1}{n-1}p^nq^k,\qquad k=0,1,\ldots$$

Dokonując zmiany indeksu, otrzymujemy rozkład ujemny dwumianowy w standardowej postaci:

$$n+k=j \quad\Rightarrow\quad P(S_n=j)=\binom{j-1}{n-1}p^nq^{j-n},\quad j=n,\ n+1,\ \ldots$$

Funkcja generująca moment

Definicja: Funkcją generującą moment (FGM) dla zmiennej losowej X nazywamy funkcję zmiennej rzeczywistej t postaci:

$$\psi_{\mathrm{X}}(t) = \mathcal{E}\left[e^{t\mathrm{X}}\right]$$

pod warunkiem, że istnieje stała $h>0$ taka, że powyższa wartość oczekiwana istnieje dla $|t|<h$

Twierdzenie: (o jednoznaczności) Jeśli X i Y są zmiennymi losowymi dla których w pewnym obszarze istnieją FGM, to

$$\psi_{\mathrm{X}}(t) = \psi_{\mathrm{Y}}(t) \quad \Rightarrow \quad f_{\mathrm{X}}(x) = f_{\mathrm{Y}}(y)$$

Twierdzenie: Niech $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi dla których istnieją FGM, oraz niech $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots + \mathrm{X}_n$ wówczas:

$$\psi_{\mathrm{S}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{\mathrm{X}_k}(t)$$

Dowód:

$$\psi_{\mathrm{S}_n}(t) = \mathcal{E}\left[e^{t(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\ldots+\mathrm{X}_n)}\right] = \mathcal{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{t\mathrm{X}_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{E}\left[e^{t\mathrm{X}_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \psi_{\mathrm{X}_k}(t)$$

Wniosek: Jeśli wszystkie zmienne $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ podlegają temu samemu rozkładowi, wtedy:

$$\psi_{\mathrm{S}_n}(t) = \left(\psi_{\mathrm{X}}(t)\right)^n$$

Funkcja generująca moment

Twierdzenie: Niech X będzie zmienną losową, dla której FGM $\psi_X(t)$ istnieje dla $|t| < h,$ gdzie $h > 0$, wtedy istnieją wszystkie momenty zmiennej X i są określone przez:

$$\mathcal{E}[X^k] = \frac{d^k}{dt^k}\psi_X(t)\Big|_{t=0} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

Dowód (zmienna ciągła):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \forall x_1 > 0 \text{ mamy } \int_{x_1}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx < \infty \text{ i } \int_{-\infty}^{-x_1} e^{tx} f_X(x)\,dx < \infty$$

Ponieważ dla dowolnego $r > 0$ zachodzi $|x|^r / e^{|tx|} \to 0$ dla $x \to \infty$ więc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-x_0} |x|^r f_X(x)\,dx + \int_{-x_0}^{x_0} |x|^r f_X(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} |x|^r f_X(x)\,dx \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{-x_0} e^{-tx} f_X(x)\,dx + |x_0|^r P\left(|X| \le x_0\right) + \int_{x_0}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx < \infty$$

Różniczkując FGM n-krotnie dostajemy:

$$\psi_X^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{tx} f_X(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \psi_X^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\,dx \equiv \mathcal{E}[X^n]$$

Funkcja generująca moment

<u>Przykład:</u> FGM dla rozkładu dwumianowego

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

$$\psi'_X(t) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[X] = \psi'_X(0) = np$$

$$\psi''_X(t) = n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2}\left(pe^t\right)^2 + n\left(e^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}[X^2] = \psi''_X(0) = n(n-1)p^2 + np$$

<u>Przykład:</u> FGM dla rozkładu wykładniczego

$$\psi_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - t/\lambda}, \quad \text{dla } t < \lambda$$

$$\psi_X^{(n)}(t) = \frac{n!\lambda}{(\lambda - t)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$\psi_X(t) = \frac{1}{1 - t/\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\lambda^n} \cdot \frac{t^n}{n!}$$

Ogólnie: $$\psi_X(t) = \mathcal{E}[e^{tX}] = \mathcal{E}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{E}[X^n]$$

Funkcja generująca moment

Twierdzenie: Jeśli $\psi_X(t)$ jest FGM zmiennej X, to FGM zmiennej $Y = \alpha X + \beta$ dana jest przez

$$\psi_Y(t) = e^{\beta t}\psi_X(\alpha t)$$

Dowód:

$$\psi_Y(t) = \mathcal{E}\left[e^{tY}\right] = \mathcal{E}\left[e^{t(\alpha X+\beta)}\right] = \mathcal{E}\left[e^{t\alpha X}e^{\beta t}\right] = e^{\beta t}\psi_X(\alpha t)$$

Przykład: FGM dla rozkładu normalnego

$$\mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad \psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]dx = e^{t^2/2}, \text{ dla } -\infty < t < \infty$$

Aby znaleźć FGM dla rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ wykonujemy transformację zmiennej i korzystamy z powyższego twierdzenia:

$$Y = \sigma X + \mu \quad \Rightarrow \quad \psi_Y(t) = e^{t\mu}\psi_X(\sigma t) = e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2}, \text{ dla } -\infty < t < \infty$$

Definicja: Funkcją generującą moment (FGM) dla wektora losowego $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ nazywamy funkcję

$$\psi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \mathcal{E}\left[e^{t_1X_1+\ldots+t_nX_n}\right]$$

pod warunkiem, że istnieją stałe $h_1, h_2, \ldots, h_n > 0$ takie, że powyższa wartość oczekiwana istnieje dla $|t_k| < h_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Funkcja charakterystyczna

Definicja: Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X nazywamy funkcję zmiennej rzeczywistej t postaci:

$$\varphi_X(t) = \mathcal{E}\left[e^{itX}\right] = \mathcal{E}\left[\cos(tX) + i\sin(tX)\right]$$

Własności:

- $|\varphi_X(t)| = \left|\mathcal{E}\left[e^{itX}\right]\right| \le \mathcal{E}\left|e^{itX}\right| = 1 = \varphi_X(0)$
- $\left(\varphi_X(t)\right)^* = \mathcal{E}\left[\cos(tX) - i\sin(tX)\right] = \mathcal{E}\left[\cos(-tX) + i\sin(-tX)\right] = \varphi_X(-t)$
- Rozkład zm. l. X jest symetryczny wtedy i tylko wtedy gdy f. ch. jest rzeczywista

$$\varphi_{-X}(t) = \mathcal{E}\left[e^{-itX}\right] = \varphi_X(-t) = \left(\varphi_X(t)\right)^* = \varphi_X(t)$$

Twierdzenie: (o jednoznaczności) Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Wtedy:

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = f_Y(y)$$

Przykład: Funkcja charakterystyczna dla rozkładu dwumianowego

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n$$

Przykład: Funkcja charakterystyczna dla rozkładu wykładniczego

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Funkcja charakterystyczna

<u>Twierdzenie:</u> Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F i funkcji charakterystycznej φ. Jeśli F jest ciągła w punktach a i b, to wtedy:

$$F(b)-F(a)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\cdot\varphi(t)\,dt$$

<u>Twierdzenie:</u> Jeśli spełniony jest warunek $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|\,dt<\infty$ to wówczas zmienna X ma rozkład ciągły o gęstości:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)\,dt$$

<u>Przykład:</u> Znajdź gęstość p-twa zmiennej losowej X, której funkcja charakterystyczna dana jest przez

$$\varphi(t)=\exp\left(2it-3|t|\right)$$

Sprawdzamy czy funkcja charakterystyczna jest całkowalna:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3|t|}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-3t}dt=\frac{2}{3}<\infty$$

Znajdujemy funkcję gęstości p-twa: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\exp\left(-itx+2it-3|t|\right)=\frac{1}{\pi}\frac{3}{(x-2)^2+9}$

Funkcja charakterystyczna

Twierdzenie: Jeśli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny to wówczas:

$$p_k \equiv \mathrm{P}\left(\mathrm{K}=k\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{-itk}\varphi\left(t\right)dt$$

Przykład: Znajdź rozkład p-twa, którego funkcja charakterystyczna ma postać $\varphi\left(t\right)=e^{2it}$

Sprawdzamy czy funkcja charakterystyczna jest całkowalna: $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi\left(t\right)\right|dt=\int_{-\infty}^{+\infty}dt=\infty$

Ponieważ mamy do czynienia ze zmienną dyskretną, więc:

$$p_k=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp\left[-it\left(k-2\right)\right]dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left.\frac{\exp\left[-it\left(k-2\right)\right]}{-i(k-2)}\right|_{-T}^{T}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\sin\left(T\left(k-2\right)\right)}{T(k-2)}=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad k\neq 2\\ 1 & \text{dla} \quad k=2\end{cases}$$

Twierdzenie: Niech $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\ldots,\mathrm{X}_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi dla których istnieją funkcje ch., oraz niech $\mathrm{S}_n=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\ldots+\mathrm{X}_n$ wówczas:

$$\varphi_{\mathrm{S}_n}\left(t\right)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\mathrm{X}_k}\left(t\right)$$

Twierdzenie: Jeśli $\varphi_{\mathrm{X}}\left(t\right)$ jest f. ch. zmiennej X, to f.ch. zmiennej $\mathrm{Y}=\alpha\mathrm{X}+\beta$ dane jest przez

$$\varphi_{\mathrm{Y}}\left(t\right)=e^{i\beta t}\varphi_{\mathrm{X}}\left(\alpha t\right)$$

Funkcje charakterystyczne

Przykład: Znajdź rozkład sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych z rozkładu Poissona o parametrach μ_1 i μ_2.

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\mu e^{it}\right)^k}{k!} = \exp\left(\mu\left(e^{it} - 1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_k(t)\varphi_l(t) = \exp\left(\mu_1\left(e^{it}-1\right)\right)\exp\left(\mu_2\left(e^{it}-1\right)\right) = \exp\left(\left(\mu_1+\mu_2\right)\left(e^{it}-1\right)\right)$$

Z postaci funkcji charakterystycznej wynika, że rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych z rozkładu Poissona o parametrach μ_1 i μ_2 podlega rozkładowi Poissona o parametrze $\mu_1 + \mu_2$.

Twierdzenie: Jeśli istnieje n-ty moment zmiennej losowej X to jej funkcja charakterystyczna jest n-krotnie różniczkowalna i zachodzi:

$$m_k \equiv \mathcal{E}\left[\mathrm{X}^k\right] = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \varphi_{\mathrm{X}}(t)\Big|_{t=0} \qquad \text{dla} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\varphi_{\mathrm{X}}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}\left[\mathrm{X}^k\right] \frac{(it)^k}{k!} + \mathcal{O}\left(|t|^n\right) \qquad \text{dla} \qquad t \to 0$$

Uwaga: F. charakterystyczna istnieje dla dowolnego rozkładu, w szczególności dla takiego, który nie posiada wszystkich momentów.

Randomizacja i sumy losowe

Przykład: (kontynuacja przykładu ze strony 6-10)

$$g_X(t) = e^{\mu(t-1)}$$

$$g_Y(t) = (q + pt)^n$$

$$Y \mid X = n \in \mathcal{B}_k(n, p) \quad \text{gdzie} \quad X \in \mathcal{P}_n(\lambda)$$

Korzystając z FGP oraz twierdzenia o warunkowej wartości oczekiwanej otrzymujemy:

$$g_Y(t) = \mathcal{E}\left[t^Y\right] = \mathcal{E}\left[\mathcal{E}\left[t^Y \mid X = n\right]\right] = \mathcal{E}\left[(q + pt)^n\right] = g_X(q + pt) = e^{\lambda((q+pt)-1)} = e^{\lambda p(t-1)}$$

A więc zmienna losowa Y podlega rozkładowi Poissona z parametrem λp.

Twierdzenie: Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi, nieujemnymi, zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie oraz niech N będzie nieujemną zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Definiujemy $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$, wówczas:

$$g_{S_N}(t) = g_N\left(g_X(t)\right)$$

Dowód:

$$g_{S_N}(t) = \mathcal{E}\left[e^{tS_N}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}\left[e^{tS_N} \mid N = n\right] \cdot P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}\left[e^{tS_n} \mid N = n\right] \cdot P(N = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}\left[e^{tS_n}\right] \cdot P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_X(t)\right)^n \cdot P(N = n) = g_N\left(g_X(t)\right)$$

Losowe sumy zmiennych losowych

Twierdzenie: Załóżmy, że spełnione są warunki poprzedniego twierdzenia.

a) Jeśli $\mathcal{E}[\mathrm{N}] < \infty$ i $\mathcal{E}[\mathrm{X}] < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[\mathrm{S_N}] = \mathcal{E}[\mathrm{N}] \cdot \mathcal{E}[\mathrm{X}]$

b) Jeśli dodatkowo

$$\mathcal{V}[\mathrm{N}] < \infty \text{ i } \mathcal{V}[\mathrm{X}] < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}[\mathrm{S_N}] = \mathcal{E}[\mathrm{N}] \cdot \mathcal{V}[\mathrm{X}] + (\mathcal{E}[\mathrm{X}])^2 \cdot \mathcal{V}[\mathrm{N}]$$

Dowód (a):

$$g_{\mathrm{S_N}}(t) = g_{\mathrm{N}}(g_{\mathrm{X}}(t)) \quad \Rightarrow \quad g'_{\mathrm{S_N}}(t)\Big|_{t=1} = g'_{\mathrm{N}}(g_{\mathrm{X}}(t)) \cdot g'_{\mathrm{X}}(t)\Big|_{t=1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[\mathrm{S_N}] = \mathcal{E}[\mathrm{N}] \cdot \mathcal{E}[\mathrm{X}]$$

(b) $$g''_{\mathrm{S_N}}(t)\Big|_{t=1} = g''_{\mathrm{N}}(g_{\mathrm{X}}(t)) \cdot (g'_{\mathrm{X}}(t))^2\Big|_{t=1} + g'_{\mathrm{N}}(g_{\mathrm{X}}(t)) \cdot g''_{\mathrm{X}}(t)\Big|_{t=1} =$$

$$= \mathcal{E}[\mathrm{N(N-1)}] \cdot (\mathcal{E}[\mathrm{X}])^2 + \mathcal{E}[\mathrm{N}] \cdot \mathcal{E}[\mathrm{X(X-1)}]$$

$$\mathcal{V}[\mathrm{S_N}] = g''_{\mathrm{S_N}}(t)\Big|_{t=1} + g'_{\mathrm{S_N}}(t)\Big|_{t=1} - (g'_{\mathrm{S_N}}(t))^2\Big|_{t=1} =$$

$$= \mathcal{E}[\mathrm{N(N-1)}] \cdot (\mathcal{E}[\mathrm{X}])^2 + \mathcal{E}[\mathrm{N}] \cdot \mathcal{E}[\mathrm{X(X-1)}] + \mathcal{E}[\mathrm{N}] \cdot \mathcal{E}[\mathrm{X}] - (\mathcal{E}[\mathrm{N}] \cdot \mathcal{E}[\mathrm{X}])^2 =$$

$$= \mathcal{E}[\mathrm{N}] \cdot \mathcal{V}[\mathrm{X}] + (\mathcal{E}[\mathrm{X}])^2 \cdot \mathcal{V}[\mathrm{N}]$$

Losowe sumy zmiennych losowych

Twierdzenie: Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym Rozkładzie, dla których istnieje FGM dla $|t| < h$ gdzie $h>0$. Niech N będzie nieujemną zmienną losową o wartościach całkowitych, niezależną od $X_1, X_2, ..., X_n$. Definiujemy $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ dla $n \geq 1$, wówczas:

$$\psi_{S_N}(t) = g_N(\psi_X(t))$$

Przykład: Niech $X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi z rozkładu wykładniczego oraz niech $N \in Fs(p)$ będzie niezależna od $X_1, X_2, ..., X_n$. Znajdź rozkład $S_N = X_1 + X_2 + ... + X_n$

$$N \in Fs(p) = pq^{k-1} \qquad \psi_{S_N}(t) = g_N(\psi_X(t)) = \frac{p\frac{\lambda}{\lambda - t}}{1 - q\frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p\lambda}{p\lambda - t} = \psi_{Exp(p\lambda)}(t)$$

$$N \in Ge(p) = pq^{k} \qquad \psi_{S_N}(t) = g_N(\psi_X(t)) = \frac{p}{1 - q\frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p\lambda - pt}{p\lambda - t} = p + q\frac{p\lambda}{p\lambda - t}$$

Twierdzenie: Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie oraz niech N będzie nieujemną zmienną losową o wartościach całkowitych, niezależną od $X_1, X_2, ..., X_n$. Definiujemy $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ dla $n \geq 1$, wówczas:

$$\varphi_{S_N}(t) = g_N(\varphi_X(t))$$