Analiza danych

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 3

Funkcja generująca rozkład (p-two)

Definicja: Funkcją generującą rozkład (prawdopodobieństwo) (FGP) dla zmiennej losowej $\mathbf{X}$ przyjmującej wartości całkowite nieujemne, nazywamy:

$$g_{\mathrm{X}}(t) = \mathcal{E}\left[t^{\mathrm{X}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$$

Twierdzenie: (o jednoznaczności) Jeśli $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości całkowite nieujemne to $g_{\mathrm{X}} = g_{\mathrm{Y}} \Rightarrow p_{\mathrm{X}} = p_{\mathrm{Y}}$

Twierdzenie: Niech $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach całkowitych nieujemnych, oraz niech $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots + \mathrm{X}_n$ wówczas:

$$g_{\mathrm{S}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{\mathrm{X}_k}(t)$$

Dowód:

$$g_{\mathrm{S}_n}(t) = \mathcal{E}\left[t^{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots + \mathrm{X}_n}\right] = \mathcal{E}\left[\prod_{k=1}^{n} t^{\mathrm{X}_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{E}\left[t^{\mathrm{X}_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} g_{\mathrm{X}_k}(t)$$

Wniosek: Jeśli wszystkie zmienne $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ podlegają temu samemu rozkładowi, wtedy:

$$g_{\mathrm{S}_n}(t) = \left(g_{\mathrm{X}}(t)\right)^n$$

Funkcja generująca rozkład (p-two)

FGP generuje prawdopodobieństwo, ponieważ:

$$g_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)t^{n-k} \cdot \mathrm{P}(X=n) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(X=n) = \frac{g_X^{(n)}(t)\big|_{t=0}}{n!}$$

Twierdzenie: Niech X będzie nieujemną zmienna losową o wartościach całkowitych oraz niech $\mathcal{E}|X|^k < \infty$ dla pewnego k=1,2,… , wtedy

$$\mathcal{E}\left[X(X-1)\dots(X-k+1)\right] = g_X^{(k)}(1)$$

Wniosek: W szczególności dla k=1 i k=2 mamy

$$\mathcal{E}|X| < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[X] = g'_X(1)$$

$$\mathcal{E}[X^2] < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2$$

Przykład: FGP dla rozkładu Bernouliego:

$$g_X(t) = (1-p)t^0 + pt^1 = q + pt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{E}[X] = g'_X(1) = p \\ \mathcal{V}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = pq \end{cases}$$

Przykład: FGP dla rozkładu dwumianowego:

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (q+pt)^n \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}[X] = g'_X(1) = np \\ \mathcal{V}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = npq \end{cases}$$

Funkcja generująca rozkład (p-two)

<u>Przykład:</u> FGP dla rozkładu geometrycznego ($\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=pq^k,\ k=0,1,\ldots$)

znajdujemy FGP:

$$g_{\mathrm{X}}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k pq^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(tq)^k=\frac{p}{1-qt},\quad \text{dla}\quad |t|<\frac{1}{q}$$

Znajdziemy FGP dla sumy n niezależnych zmiennych z rozkładu geometrycznego (Fs):

$$\mathrm{S}_n=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\ldots+\mathrm{X}_n \qquad\qquad g_{\mathrm{S}_n}(t)=\left(g_{\mathrm{X}}(t)\right)^n=\left(\frac{p}{1-qt}\right)^n$$

oraz sam rozkład p-twa:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n=k)=\frac{1}{k!}g_{\mathrm{S}_n}^{(k)}(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{k!}p^n n(n+1)\cdots(n+k-1)q^k(1-qt)^{-n-k}\Big|_{t=0}=$$

$$=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}p^n q^k=\binom{n+k-1}{n-1}p^n q^k,\qquad k=0,1,\ldots$$

Dokonując zmiany indeksu, otrzymujemy rozkład ujemny dwumianowy w standardowej postaci:

$$n+k=j\quad\Rightarrow\quad P(\mathrm{S}_n=j)=\binom{j-1}{n-1}p^n q^{j-n},\quad j=n,\ n+1,\ \ldots$$

Funkcja generująca moment

Definicja: Funkcją generującą moment (FGM) dla zmiennej losowej X nazywamy funkcję zmiennej rzeczywistej t postaci:

$$\psi_X(t) = \mathcal{E}\left[e^{tX}\right]$$

pod warunkiem, że istnieje stała $h>0$ taka, że powyższa wartość oczekiwana istnieje dla $|t| < h$

Twierdzenie: (o jednoznaczności) Jeśli X i Y są zmiennymi losowymi dla których w pewnym obszarze istnieją FGM, to

$$\psi_X(t) = \psi_Y(t) \;\Rightarrow\; f_X(x) = f_Y(y)$$

Twierdzenie: Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi dla których istnieją FGM, oraz niech $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ wówczas:

$$\psi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(t)$$

Dowód:

$$\psi_{S_n}(t) = \mathcal{E}\left[e^{t(X_1+X_2+...+X_n)}\right] = \mathcal{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{E}\left[e^{tX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(t)$$

Wniosek: Jeśli wszystkie zmienne $X_1, X_2, ..., X_n$ podlegają temu samemu rozkładowi, wtedy:

$$\psi_{S_n}(t) = \left(\psi_X(t)\right)^n$$

Funkcja generująca moment

Twierdzenie: Niech X będzie zmienną losową, dla której FGM $\psi_{\mathrm{X}}(t)$ istnieje dla $|t| < h$, gdzie $h > 0$, wtedy istnieją wszystkie momenty zmiennej X i są określone przez:

$$\mathcal{E}[\mathrm{X}^k] = \frac{d^k}{dt^k}\psi_{\mathrm{X}}(t)\Big|_{t=0} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

Dowód (zmienna ciągła):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_{\mathrm{X}}(x)dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \forall x_1 > 0 \ \text{ mamy } \int_{x_1}^{+\infty} e^{tx} f_{\mathrm{X}}(x)dx < \infty \ \text{ i } \int_{-\infty}^{-x_1} e^{tx} f_{\mathrm{X}}(x)dx < \infty$$

Ponieważ dla dowolnego $r > 0$ zachodzi $|x|^r / e^{|tx|} \to 0$ dla $x \to \infty$ więc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f_{\mathrm{X}}(x)dx = \int_{-\infty}^{-x_0} |x|^r f_{\mathrm{X}}(x)dx + \int_{-x_0}^{x_0} |x|^r f_{\mathrm{X}}(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} |x|^r f_{\mathrm{X}}(x)dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{-x_0} e^{-tx} f_{\mathrm{X}}(x)dx + |x_0|^r P(|\mathrm{X}| \leq x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} e^{tx} f_{\mathrm{X}}(x)dx < \infty$$

Różniczkując FGM n-krotnie dostajemy:

$$\psi_{\mathrm{X}}^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{tx} f_{\mathrm{X}}(x)dx \quad \Rightarrow \quad \psi_{\mathrm{X}}^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_{\mathrm{X}}(x)dx \equiv \mathcal{E}[\mathrm{X}^n]$$

Przykład: FGM dla rozkładu dwumianowego

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

$$\psi'_X(t) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[X] = \psi'_X(0) = np$$

$$\psi''_X(t) = n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2} \left(pe^t\right)^2 + n\left(e^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}[X^2] = \psi''_X(0) = n(n-1)p^2 + np$$

Przykład: FGM dla rozkładu wykładniczego

$$\psi_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - t/\lambda}, \quad \text{dla } t < \lambda$$

$$\psi_X^{(n)}(t) = \frac{n!\lambda}{(\lambda - t)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$\psi_X(t) = \frac{1}{1 - t/\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\lambda^n} \cdot \frac{t^n}{n!}$$

Ogólnie: $$\psi_X(t) = \mathcal{E}[e^{tX}] = \mathcal{E}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{E}[X^n]$$

Funkcja generująca moment

Twierdzenie: Jeśli $\psi_X(t)$ jest FGM zmiennej X, to FGM zmiennej $Y = \alpha X + \beta$ dana jest przez

$$\psi_Y(t) = e^{\beta t}\psi_X(\alpha t)$$

Dowód:

$$\psi_Y(t) = \mathcal{E}\left[e^{tY}\right] = \mathcal{E}\left[e^{t(\alpha X+\beta)}\right] = \mathcal{E}\left[e^{t\alpha X}e^{\beta t}\right] = e^{\beta t}\psi_X(\alpha t)$$

Przykład: FGM dla rozkładu normalnego

$$\mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad \psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]dx = e^{t^2/2}, \text{ dla } -\infty < t < \infty$$

Aby znaleźć FGM dla rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ wykonujemy transformację zmiennej i korzystamy z powyższego twierdzenia:

$$Y = \sigma X + \mu \quad \Rightarrow \quad \psi_Y(t) = e^{t\mu}\psi_X(\sigma t) = e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2}, \text{ dla } -\infty < t < \infty$$

Definicja: **Funkcją generującą moment** (FGM) dla wektora losowego $X = (X_1, X_2, \dots X_n)$ nazywamy funkcję

$$\psi_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = \mathcal{E}\left[e^{t_1 X_1+\dots+t_n X_n}\right]$$

pod warunkiem, że istnieją stałe $h_1, h_2, \dots, h_n > 0$ takie, że powyższa wartość oczekiwana istnieje dla $|t_k| < h_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Kumulanty

- Definicja: Kumulanty κ_n zmiennej losowej X zdefiniowane są jako współczynniki w rozwinięciu funkcji generującej kumulanty $g(t)$:

$$g(t) = \ln\left(\mathcal{E}\left[e^{t\mathrm{X}}\right]\right), \qquad g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{t^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad \kappa_n = \left.\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right|_{t=0}$$

- Przykład: Kumulanty dla rozkładu dwumianowego

$$g(t) = \ln\left(\Psi(t)\right) = n\ln\left(1-p+pe^t\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \kappa_1 &= \left.\tfrac{d}{dt} g(t)\right|_{t=0} = np \\ \kappa_2 &= \left.\tfrac{d^2}{dt^2} g(t)\right|_{t=0} = np(1-p) \\ \kappa_3 &= \left.\tfrac{d^3}{dt^3} g(t)\right|_{t=0} = n(2p^3-3p^2+p) \end{aligned}$$

- Własności kumulant (niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$. oraz c jest dowolną stałą)

$$g_{\mathrm{Z}}(t) = \ln\left(\mathcal{E}\left[e^{t(\mathrm{X}+\mathrm{Y})}\right]\right) = \ln\left(\mathcal{E}\left[e^{t\mathrm{X}}\right]\right) + \ln\left(\mathcal{E}\left[e^{t\mathrm{Y}}\right]\right) = g_{\mathrm{X}}(t) + g_{\mathrm{Y}}(t)$$

$$\kappa_n^{(\mathrm{Z})} = \left.\frac{d^n}{dt^n} g_{\mathrm{Z}}(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d^n}{dt^n} g_{\mathrm{Z}}(t)\right|_{t=0} + \left.\frac{d^n}{dt^n} g_{\mathrm{Y}}(t)\right|_{t=0} = \kappa_n^{(\mathrm{X})} + \kappa_n^{(\mathrm{Y})}$$

$$\kappa_1(\mathrm{X}+c) = \kappa_1(\mathrm{X}) + c, \qquad \kappa_n(\mathrm{X}+c) = \kappa_n(\mathrm{X})$$

$$\kappa_n(c\mathrm{X}) = c^n \kappa_n(\mathrm{X})$$

Kumulanty

- Relacje pomiędzy kumulantami κ i momentami $m_k = \mathcal{E}[\mathrm{X}^k]$:

$$\Psi(t) = \exp\left(g(t)\right) \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n t^n}{n!} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k t^k}{k!}\right)$$

  Można pokazać, że zachodzi relacja: $\kappa_n = m_n - \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-1}{m-1} \kappa_m m_{n-m}$

- Łączne kumulanty zmiennych losowych $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n$ są zdefiniowane jako pochodne łącznej funkcji generującej:

$$g(t_1, t_2, ..., t_n) = \ln\left(\mathcal{E}\left[\exp \sum\nolimits_{j=1}^{n} t_j \mathrm{X}_j\right]\right)$$

- Kumulanta 1-go rzędu n zmiennych losowych ma postać:

$$\kappa\left[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n\right] = \sum_{P} (|P| - 1)!(-1)^{|P|-1} \prod_{B \in P} \mathcal{E}\left[\prod_{i \in B} \mathrm{X}_i\right]$$

  gdzie P oznacza partycje zbioru $1, 2, ..., n$, $|P|$ liczbę części w partycji, B bloki w partycji, i numeruje elementy w bloku.

- Kumulanta 1-go rzędu dla dwóch i trzech zmiennych ma postać:

$$\kappa\left[\mathrm{X}, \mathrm{Y}\right] = \mathcal{E}[\mathrm{XY}] - \mathcal{E}[\mathrm{X}]\,\mathcal{E}[\mathrm{Y}]$$

$$\kappa\left[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\right] = \mathcal{E}[\mathrm{XYZ}] - \mathcal{E}[\mathrm{XY}]\,\mathcal{E}[\mathrm{Z}] - \mathcal{E}[\mathrm{XZ}]\,\mathcal{E}[\mathrm{Y}] - \mathcal{E}[\mathrm{YZ}]\,\mathcal{E}[\mathrm{X}] + 2\mathcal{E}[\mathrm{X}]\,\mathcal{E}[\mathrm{Y}]\,\mathcal{E}[\mathrm{Z}]$$

Kumulanty

- Kumulanta dowolnej liczby niezależnych zmiennych losowych jest równa zero (ponieważ wartość oczekiwana iloczynu takich zmiennych jest równa iloczynowi wartości oczekiwanych).
- Łączną wartość oczekiwaną n zmiennych losowych można wyrazić za pomocą kumulant:

$$\mathcal{E}[\mathrm{X}_1 \cdot \mathrm{X}_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{X}_n] = \sum_{P} \prod_{B \in P} \kappa\,[\mathrm{X}_i; i \in B]$$

- Przykład: $\mathcal{E}[\mathrm{XYZ}] = \kappa\,[\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}] + \kappa\,[\mathrm{X},\mathrm{Y}]\,\kappa\,[\mathrm{Z}] + \kappa\,[\mathrm{X},\mathrm{Z}]\,\kappa\,[\mathrm{Y}] + \kappa\,[\mathrm{Y},\mathrm{Z}]\,\kappa\,[\mathrm{X}] + \kappa\,[\mathrm{X}]\,\kappa\,[\mathrm{Y}]\,\kappa\,[\mathrm{Z}]$

Funkcja charakterystyczna

Definicja: Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X nazywamy funkcję zmiennej rzeczywistej t postaci:

$$\varphi_X(t) = \mathcal{E}\left[e^{itX}\right] = \mathcal{E}\left[\cos(tX) + i\sin(tX)\right]$$

Własności:

- $\left|\varphi_X(t)\right| = \left|\mathcal{E}\left[e^{itX}\right]\right| \leq \mathcal{E}\left|e^{itX}\right| = 1 = \varphi_X(0)$
- $\left(\varphi_X(t)\right)^* = \mathcal{E}\left[\cos(tX) - i\sin(tX)\right] = \mathcal{E}\left[\cos(-tX) + i\sin(-tX)\right] = \varphi_X(-t)$
- Rozkład zm. l. X jest symetryczny wtedy i tylko wtedy gdy f. ch. jest rzeczywista

$$\varphi_{-X}(t) = \mathcal{E}\left[e^{-itX}\right] = \varphi_X(-t) = \left(\varphi_X(t)\right)^* = \varphi_X(t)$$

Twierdzenie: (o jednoznaczności) Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Wtedy:

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \;\Rightarrow\; f_X(x) = f_Y(y)$$

Przykład: Funkcja charakterystyczna dla rozkładu dwumianowego

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n$$

Przykład: Funkcja charakterystyczna dla rozkładu wykładniczego

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Funkcja charakterystyczna

Twierdzenie: Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F i funkcji charakterystycznej φ. Jeśli F jest ciągła w punktach a i b, to wtedy:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \cdot \varphi(t)\, dt$$

Twierdzenie: Jeśli spełniony jest warunek $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$ to wówczas zmienna X ma rozkład ciągły o gęstości:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt$$

Przykład: Znajdź gęstość p-twa zmiennej losowej X, której funkcja charakterystyczna dana jest przez

$$\varphi(t) = \exp(2it - 3|t|)$$

Sprawdzamy czy funkcja charakterystyczna jest całkowalna:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-3t} dt = \frac{2}{3} < \infty$$

Znajdujemy funkcję gęstości p-twa: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-itx + 2it - 3|t|) = \frac{1}{\pi} \frac{3}{(x-2)^2 + 9}$

Twierdzenie: **Jeśli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny to wówczas:**

$$p_k \equiv \mathrm{P}(\mathrm{K}=k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itk}\varphi(t)\,dt$$

Przykład: **Znajdź rozkład p-twa, którego funkcja charakterystyczna ma postać** $\varphi(t) = e^{2it}$

Sprawdzamy czy funkcja charakterystyczna jest całkowalna: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \infty$

Ponieważ mamy do czynienia ze zmienną dyskretną, więc:

$$p_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp[-it(k-2)]\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left.\frac{\exp[-it(k-2)]}{-i(k-2)}\right|_{-T}^{T} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\sin(T(k-2))}{T(k-2)} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad k \neq 2 \\ 1 & \text{dla} \quad k = 2 \end{cases}$$

Twierdzenie: **Niech $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi dla których istnieją funkcje ch., oraz niech $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots + \mathrm{X}_n$ wówczas:**

$$\varphi_{\mathrm{S}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\mathrm{X}_k}(t)$$

Twierdzenie: **Jeśli $\varphi_{\mathrm{X}}(t)$ jest f. ch. zmiennej X, to f.ch. zmiennej $\mathrm{Y} = \alpha\mathrm{X} + \beta$ dane jest przez**

$$\varphi_{\mathrm{Y}}(t) = e^{i\beta t}\varphi_{\mathrm{X}}(\alpha t)$$

Przykład: Znajdź rozkład sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych z rozkładu Poissona o parametrach μ_1 i μ_2.

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\mu e^{it}\right)^k}{k!} = \exp\left(\mu\left(e^{it} - 1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_k(t)\varphi_l(t) = \exp\left(\mu_1\left(e^{it}-1\right)\right)\exp\left(\mu_2\left(e^{it}-1\right)\right) = \exp\left(\left(\mu_1+\mu_2\right)\left(e^{it}-1\right)\right)$$

Z postaci funkcji charakterystycznej wynika, że rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych z rozkładu Poissona o parametrach μ_1 i μ_2 podlega rozkładowi Poissona o parametrze $\mu_1 + \mu_2$.

Twierdzenie: Jeśli istnieje n-ty moment zmiennej losowej X to jej funkcja charakterystyczna jest n-krotnie różniczkowalna i zachodzi:

$$m_k \equiv \mathcal{E}\left[\mathrm{X}^k\right] = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \varphi_{\mathrm{X}}(t)\bigg|_{t=0} \qquad \text{dla} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\varphi_{\mathrm{X}}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}\left[\mathrm{X}^k\right] \frac{(it)^k}{k!} + \mathcal{O}\left(|t|^n\right) \qquad \text{dla} \qquad t \to 0$$

Uwaga: F. charakterystyczna istnieje dla dowolnego rozkładu, w szczególności dla takiego, który nie posiada wszystkich momentów.

Randomizacja i sumy losowe

Przykład: Źródło emituje n cząstek α w ciągu godziny. Cząstki te rejestrujemy za pomocą detektora o wydajności p. Jaki jest rozkład liczby zarejestrowanych cząstek?

$$g_X(t) = e^{\mu(t-1)}$$

$$\mathbf{Y} \mid \mathbf{X} = n \in \mathcal{B}_k(n, p) \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{X} \in \mathcal{P}_n(\lambda)$$

$$g_Y(t) = (q + pt)^n$$

Korzystając z FGP oraz twierdzenia o warunkowej wartości oczekiwanej otrzymujemy:

$$g_Y(t) = \mathcal{E}\left[t^Y\right] = \mathcal{E}\left[\mathcal{E}\left[t^Y \mid X = n\right]\right] = \mathcal{E}\left[(q+pt)^n\right] = g_X(q+pt) = e^{\lambda((q+pt)-1)} = e^{\lambda p(t-1)}$$

A więc zmienna losowa $\mathbf{Y}$ podlega rozkładowi Poissona z parametrem λp.

Twierdzenie: **Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi, nieujemnymi, zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie oraz niech $\mathbf{N}$ będzie nieujemną zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Definiujemy $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$, wówczas:**

$$g_{S_N}(t) = g_N\left(g_X(t)\right)$$

Dowód:

$$g_{S_N}(t) = \mathcal{E}\left[t^{S_N}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}\left[t^{S_N} \mid N = n\right] \cdot P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}\left[t^{S_n} \mid N = n\right] \cdot P(N = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}\left[t^{S_n}\right] \cdot P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_X(t)\right)^n \cdot P(N = n) = g_N\left(g_X(t)\right)$$

Twierdzenie: **Załóżmy, że spełnione są warunki poprzedniego twierdzenia.**

a) **Jeśli** $\mathcal{E}[N]<\infty$ **i** $\mathcal{E}[X]<\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[S_N]=\mathcal{E}[N]\cdot\mathcal{E}[X]$

b) **Jeśli dodatkowo**

$$\mathcal{V}[N]<\infty \text{ i } \mathcal{V}[X]<\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}[S_N]=\mathcal{E}[N]\cdot\mathcal{V}[X]+(\mathcal{E}[X])^2\cdot\mathcal{V}[N]$$

Dowód (a):

$$g_{S_N}(t)=g_N(g_X(t)) \quad \Rightarrow \quad g'_{S_N}(t)\Big|_{t=1}=g'_N(g_X(t))\cdot g'_X(t)\Big|_{t=1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}[S_N]=\mathcal{E}[N]\cdot\mathcal{E}[X]$$

(b) $$g''_{S_N}(t)\Big|_{t=1}=g''_N(g_X(t))\cdot(g'_X(t))^2\Big|_{t=1}+g'_N(g_X(t))\cdot g''_X(t)\Big|_{t=1}=$$

$$=\mathcal{E}[N(N-1)]\cdot(\mathcal{E}[X])^2+\mathcal{E}[N]\cdot\mathcal{E}[X(X-1)]$$

$$\mathcal{V}[S_N]=g''_{S_N}(t)\Big|_{t=1}+g'_{S_N}(t)\Big|_{t=1}-(g'_{S_N}(t))^2\Big|_{t=1}=$$

$$=\mathcal{E}[N(N-1)]\cdot(\mathcal{E}[X])^2+\mathcal{E}[N]\cdot\mathcal{E}[X(X-1)]+\mathcal{E}[N]\cdot\mathcal{E}[X]-(\mathcal{E}[N]\cdot\mathcal{E}[X])^2=$$

$$=\mathcal{E}[N]\cdot\mathcal{V}[X]+(\mathcal{E}[X])^2\cdot\mathcal{V}[N]$$

Twierdzenie: Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym Rozkładzie, dla których istnieje FGM dla $|t| < h$ gdzie $h>0$. Niech N będzie nieujemną zmienną losową o wartościach całkowitych, niezależną od $X_1, X_2, ..., X_n$. Definiujemy $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ dla $n \geq 1$, wówczas:

$$\psi_{S_N}(t) = g_N\left(\psi_X(t)\right)$$

Przykład: Niech $X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi z rozkładu wykładniczego oraz niech $N \in Fs(p)$ będzie niezależna od $X_1, X_2, ..., X_n$. Znajdź rozkład $S_N = X_1 + X_2 + ... + X_n$

$$N \in Fs(p) = pq^{k-1} \qquad \psi_{S_N}(t) = g_N\left(\psi_X(t)\right) = \frac{p\frac{\lambda}{\lambda - t}}{1 - q\frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p\lambda}{p\lambda - t} = \psi_{Exp(p\lambda)}(t)$$

$$N \in Ge(p) = pq^{k} \qquad \psi_{S_N}(t) = g_N\left(\psi_X(t)\right) = \frac{p}{1 - q\frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p\lambda - pt}{p\lambda - t} = p + q\frac{p\lambda}{p\lambda - t}$$

Twierdzenie: Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie oraz niech N będzie nieujemną zmienną losową o wartościach całkowitych, niezależną od $X_1, X_2, ..., X_n$. Definiujemy $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ dla $n \geq 1$, wówczas:

$$\varphi_{S_N}(t) = g_N\left(\varphi_X(t)\right)$$