Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 1

Literatura

- Mechanika, L.D. Landau, J.M. Lifszyc, PWN, 2006.
- Mechanika Klasyczna, tom 1 i 2, J.R. Taylor, PWN, 2008.
- Classical Dynamics of Particles and Systems, S.T. Thornton, J.B. Marion, Brooks Cole, 2003.
- Classical Mechanics: Point Particles and Relativity, W. Greiner, Springer, 2003.
- Introduction to Classical Mechanics, D. Morin, Cambridge, 2008.
- Relativity, Gravitation and Cosmology, Ta-Pei Gheng, Oxford, 2005.
- Relativity: Special, General and Cosmological, W. Rindler, Oxford, 2010.
- An Ilustrated Guide to Relativity, T. Takeuchi, Cambridge, 2010.
- Spacetime and Geometry, S. Carroll, Benjumin Cummings, 2003.
- An Introduction to Relativity, J.V. Narlikar, Cambridge, 2010.
- Tensors, Relativity and Cosmology, M. Dalarsson, N. Dalarsson, AP, 2005.
- Exploring Black Holes, E.F. Taylor, J.A. Wheeler, AWL, 2000.
- Introduction to General Relativity, L. Ryder, Cambridge, 2009.
- Problems and Solutions on Mechanics, Lim Yung-kuo, World Scientific, 1994.

⇒ http://home.agh.edu.pl/mariuszp

Zasada względności w mechanice klasycznej

Zasada względności:

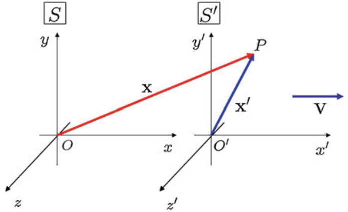
Prawa fizyki nie zależą od układu (inercjalnego) obserwatora.

lub

Równania opisujące teorię fizyczną zachowują swoją postać przy przejściu pomiędzy inercjalnymi układami odniesienia.

Transformacje Galileusza:

$$t = t'$$
$$\vec{x}(t) = \vec{x}\,'(t) + \vec{OO'}(t) = \vec{x}\,'(t) + \vec{V}t$$

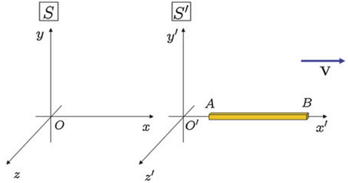


Wnioski:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{V}$$
$$\vec{a}(t) = \vec{a}\,'(t)$$

Niezmienniczość długości jest konsekwencją niezmienniczości odstępów czasu:

$$x_A(t_A) = x'_A + Vt_A, \qquad x_B(t_B) = x'_B + Vt_B,$$
$$y_A(t_A) = 0, \qquad y_B(t_B) = 0,$$
$$z_A(t_A) = 0, \qquad z_B(t_B) = 0.$$



Pomiar w S dokonujemy w chwili $t = t_A = t_B$:

$$L' \equiv x'_B - x'_A = (x_B(t_B) - Vt_B) - (x_A(t_A) - Vt_A) = x_B(t) - x_A(t) \equiv L$$

Niezmienniczość względem transformacji Galileusza

Ponieważ $y' = y$ oraz $z' = z$, więc względne położenie dowolnych dwóch punktów (niekoniecznie leżących na osi x) jest niezmiennicze względem transformacji Galileusza:

$$\Delta\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_B - \vec{x}_A = (\vec{x}\,'_B + \vec{V}t) - (\vec{x}\,'_A + \vec{V}t) = \vec{x}\,'_B - \vec{x}\,'_A = \Delta\vec{x}\,'$$

W najbardziej ogólnej postaci transformacje Galileusza przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \vec{x}\,' &= \mathrm{R}\vec{x} + \vec{b} - \vec{V}t \\ t' &= t + \beta \end{aligned}$$

gdzie R oznacza macierz obrotu lub odbicia, $\vec{b}$ przesunięcie w przestrzeni, β przesunięcie w czasie.

Niezmienniczość prawa Newtona $\vec{F} = m\vec{a}$ względem transformacji Galileusza wynika z niezmienniczości masy, $m = m'$, przyspieszenia $\vec{a} = \vec{a}\,'$ oraz siły w mechanice klasycznej, ponieważ zgodnie z II zasadą dynamiki:

$$\vec{F} = F(|\Delta\vec{x}|)\frac{\Delta\vec{x}}{|\Delta\vec{x}|}$$

Uwaga: Prawo Newtona nie tylko jest niezmiennicze względem transformacji Galileusza, ale także wszystkie wielkości w nim występujące zachowują swoje wartości.

Niezmienniczość względem transformacji Galileusza

Niezmienniczość zasady zachowania pędu względem transformacji Galileusza: rozważamy rozpraszanie cząstek o masach m_1 i m_2 w którym produkowane są cząstki o masach μ_1 i μ_2:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= \mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2 \\ m_1(\vec{v}_1' + \vec{V}) + m_2(\vec{v}_2' + \vec{V}) &= \mu_1(\vec{u}_1' + \vec{V}) + \mu_2(\vec{u}_2' + \vec{V}) \end{aligned}$$

czyli $\quad \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{q}_1' + \vec{q}_2' + (\mu_1 + \mu_2 - m_1 - m_2)\vec{V}$

Oznacza to, że zasada zachowania pędu jest niezmiennicza względem transformacji Galileusza, jeśli całkowita masa jest zachowana:

$$m_1 + m_2 = \mu_1 + \mu_2$$

Uwaga: Ścisle mówiąc zasada zachowania pędu jest kowariantna względem transformacji Galileusza, natomiast nie jest niezmiennicza, ponieważ wielkości w niej występujące zmieniają swoje wartości przy przejściu pomiędzy układami.

Uwaga: Zasada względności oznacza, że te same prawa obowiązują we wszystkich układach inercjalnych, ale nie oznacza to, że opis ruchu jest taki sam w różnych układach (np. rzut pionowy w poruszającym się wagonie).

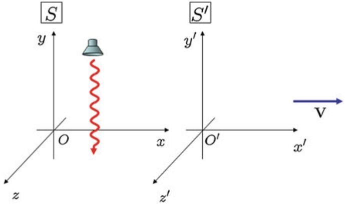
Rozchodzenie się fal mechanicznych

Fale mechaniczne rozchodzą się w jednorodnym i izotropowym ośrodku we wszystkich kierunkach ze stałą prędkością względem tego ośrodka.

Przykład: Rozchodzenie się dźwięku w powietrzu ($v_s \approx 330$ m/s).

W kierunku wzajemnego ruchu układów S i S':

$$\vec{v}_s^{\,\prime} = \vec{v}_s - \vec{V} = (\pm v_s - V, 0, 0)$$

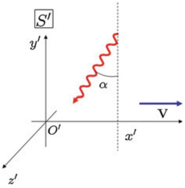


W kierunku prostopadłym:

$$\vec{v}_s^{\,\prime} = \vec{v}_s - \vec{V} = (-V, -v_s, 0)$$

W układzie S' kierunek propagacji fali dźwiękowej dany jest przez:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{v_s}$$



a wartość prędkości wynosi:

$$v_s' = \sqrt{v_s^2 + V^2} \approx v_s\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{v_s^2}\right) > v_s$$

Wniosek: Fale mechaniczne rozchodzą się izotropowo tylko w układzie, który spoczywa względem ośrodka przenoszącego fale.

Prędkość światła i fale elektromagnetyczne

J.C.Maxwell (1861) – światło to fale elektromagnetyczne.
Istnieje możliwość przewidzenia prędkości światła na podstawie własności elektrycznych i magnetycznych ośrodka (w szczególności w próżni $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$).
Prędkość światła (jak każdej fali) powinna być stała względem ośrodka w którym się rozchodzi i nie zależeć od ruchu źródła.

Koncepcja eteru wydaje sie być naturalna i nieodzowna.

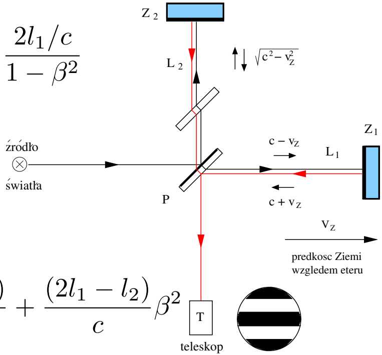
Próba wykrycia ruchu Ziemi względem eteru (hipotetycznego ośrodka w którym prędkość światła jest równa c).

$$t_1 = \frac{l_1}{c - \mathrm{v_z}} + \frac{l_1}{c + \mathrm{v_z}} = \frac{2cl_1}{c^2 - \mathrm{v_z^2}} = \frac{2l_1/c}{1 - \mathrm{v_z^2}/c^2} = \frac{2l_1/c}{1 - \beta^2}$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - \mathrm{v_z^2}}} = \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - \mathrm{v_z^2}/c^2}} = \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - l_2 \right) \approx$$

$$\approx \frac{2l_1}{c}\left(1 + \beta^2\right) - \frac{2l_2}{c}\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{2(l_1 - l_2)}{c} + \frac{(2l_1 - l_2)}{c}\beta^2$$



Eksperyment Michelsona-Morleya

Po obróceniu układu o 90° różnica czasów wynosi:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \frac{2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \approx \frac{2(l_1 - l_2)}{c} + \frac{(l_1 - 2l_2)}{c}\beta^2$$

Spodziewane przesunięcie prążków interferencyjnych:

$$\delta = \frac{\Delta t - \Delta t'}{T} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\beta^2$$

- Michelson (1881): $\delta_{calc} = 0.04, \ \ \delta_{meas} = 0.02$
- Michelson-Morley (1887): $\delta_{calc} = 0.40, \ \ \delta_{meas} = 0.01$

Wniosek: brak przesuniecia prążków, tzn. prędkość światła nie zależy od ruchu obserwatora i jest taka sama we wszystkich układach inercjalnych.

Inne możliwe wyjaśnienia:

- eter w pobliżu Ziemi porusza się wraz z nią - wykluczają to obserwacje gwiazd.
- skrócenie długości i dylatacja czasu w ruchu względem eteru.

Rozwiązanie Einsteina - teoria względności

Konieczność wyboru pomiędzy:

- słusznością praw Newtona i transformacji Galileusza
- słusznością równań Maxwella i transformacji Lorentza

Odpowiedź Einsteina:

- (Postulat I) wszystkie prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.
- (Postulat II) prędkość światła w próżni jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Oznacza to, że żaden inercjalny układ odniesienia nie jest wyróżniony, a sens ma jedynie określanie ruchu względem wybranego układu odniesienia.

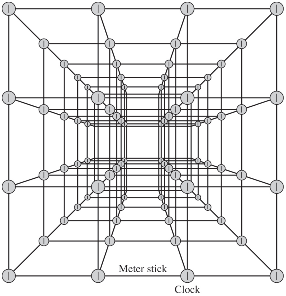
Konsekwencje:

- czas nie jest uniwersalny - względność równoczesności, dylatacja czasu,
- skrócenie długości,
- równoważność masy i energii.

Szczególna Teoria Względności (STW): kinematyka + dynamika cząstek.

Pojęcie obserwatora w STW

Konieczność synchronizacji zegarów - motoda Einsteina:



- wybieramy zegar referencyjny,
- na każdym zegarze ustawiamy czas równy odległości tego zegara od zegara referencyjnego,
- od zegara referencyjnego wysyłamy sferyczny błysk światła,
- zegary uruchamiamy w momencie kiedy dotrze do nich fala świetlna.

Uwaga: czas obserwacji zdarzenia to nie to samo co czas zauważenia zdarzenia.

Jednostki służące do pomiaru czasu i przestrzeni:

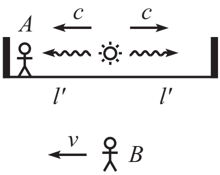
- sekunda – czas równy 9 192 631 770 okresów promieniowania przejścia pomiędzy dwoma poziomami struktury nadsubtelnej stanu podstawowego atomu cezu ^{133}Cs,
- metr – (1983 r.) dystans pokonywany przez światło w próżni w czasie 1/299792458 sekundy (a więc c = 299792458 m/s).

Odległości do gwiazd mierzymy w latach świetlnych: 1 rok świetlny to odległość jaką pokonuje światło w ciągu jednego roku ($1\,\text{ly} = 9.46 \cdot 10^{15}$ m, $1\,\text{pc} \approx 3.262\,\text{ly}$).

Odległość do najbliższej gwiazdy, Proxima Centauri, wynosi 4.28 lat świetlnych.

Względność równoczesności

A: sygnał świetlny dociera do odbiorników jednocześnie (l'/c),



B: – odbiorniki poruszają się z prędkością v,

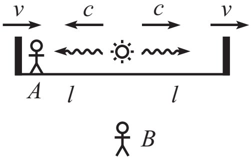
– sygnał świetlny porusza się z prędkością c,

– względne prędkości sygnału i odbiorników to

$$c + v \quad \text{oraz} \quad c - v$$

– czasy dotarcia sygnałów do odbiorników:

$$t_l = \frac{l}{c+v} \quad \text{oraz} \quad t_r = \frac{l}{c-v}$$



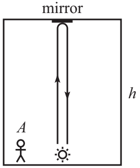
$t_l = t_r$ tylko wtedy gdy $v = 0$ lub $l = 0$.

Uwaga: gdyby to były piłki a nie światło, to wówczas w układzie B względne prędkości byłyby takie same

$$(v_p - v) + v = v_p \quad \text{oraz} \quad (v_p + v) - v = v_p$$

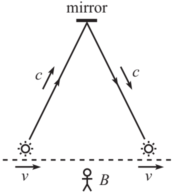
i piłki dotarłyby do obu końców jednocześnie.

Dylatacja czasu



Pociąg porusza się z prędkością v względem ziemi. Wewnątrz pociągu wysyłamy sygnał świetlny od podłogi do sufitu i z powrotem.

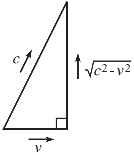
A: pociąg jest w spoczynku, czas podróży światła tam i z powrotem wynosi $t_A = \dfrac{2h}{c}$



B: – pociąg porusza się z prędkością v,
– składowa pionowa prędkości sygnału $\sqrt{c^2 - v^2}$,
– czas podróży światła tam i z powrotem wynosi:

$$t_B = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

A więc: $t_B = \gamma t_A$ gdzie $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$



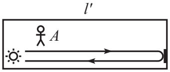
Powyższy wynik jest słuszny jedynie wtedy gdy oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu w A (czas własny).

Uwaga:

- Z punktu widzenia obserwatora A słuszna jest relacja $t_A = \gamma t_B$,
- I postulat STW wymaga aby obserwator A widział B dokładnie w taki sam sposób jak B widzi A.

Skrócenie długości

Chcemy wyznaczyć długość pociągu poruszającego się z prędkością v względem obserwatora B.

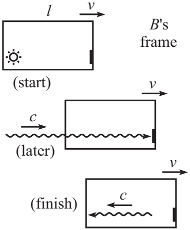


A's frame

A: – pociąg jest w spoczynku,

– czas podróży światła tam i z powrotem wynosi $t_A = \dfrac{2l_0}{c}$

– wielkość l_0 to długość własna mierzona w układzie w którym obiekt spoczywa.



B: – pociąg porusza się z prędkością v,

– czas podróży światła tam i z powrotem wynosi:

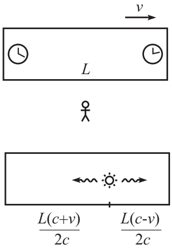
$$t_B = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\gamma^2$$

Ponieważ $t_B = \gamma t_A$ więc $l = \dfrac{l_0}{\gamma}$

Uwaga:

- dylatacja czasu i skrócenie długości są ze sobą ściśle związane.
- skrócenie długości następuje tylko w kierunku wzajemnej prędkości, nie ma skrócenia w kierunku poprzecznym.

Przykład: Dwa zegary umieszczone są na końcach pociągu o długości L (w jego układzie spoczynkowym). Zegary te zsynchronizowano w układzie A związanym z pociągiem. Pociąg porusza się względem ziemi z prędkością v. Jaka jest różnica wskazań zegarów w układzie B związanym z ziemią?



B: Umieszczamy zródło światła w takim miejscu aby dotarło ono do obu końców w tej samej chwili w układzie B.

A: W układzie A światło aby dotrzeć do tylnego zegara przebywa dodatkowy dystans

$$L(c+v)/2c - L(c-v)/2c = Lv/c$$

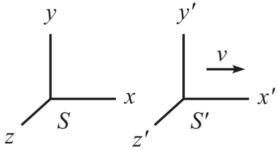
a wiec tylny zegar wskazuje w chwili dotarcia światła upływ czasu o Lv/c^2 większy niż przedni zegar.

Przykład: Mion powstały 50 km nad powierzchnią Ziemi porusza się pionowo w dół z prędkością $v = 0.99998c$ i rozpada się po czasie $T = 2 \cdot 10^{-6}$ s nie zderzając się z niczym po drodze. Czy mion dotrze do powierzchni Ziemi?

- klasycznie: $d = vT = (3 \cdot 10^8\text{m/s}) \cdot (2 \cdot 10^{-6}\text{s}) = 600\text{m}$ – źle!
- ale jest dylatacja czasu: $\gamma \approx 160 \quad \Rightarrow \quad d = v\,(\gamma T) \approx 100$ km
- lub skrócenie długości: $d = d_0/\gamma = (50\text{ km})/160 \approx 300$ m

Transformacje Lorentza

Wykorzystamy omówione wcześniej zjawiska do znalezienia transformacji pomiędzy dwoma inercjalnymi układami odniesienia S i S':



$$x = Ax' + Bt' \quad \text{oraz} \quad t = Ct' + Dx'$$

zjawisko	warunek	rezultat	wniosek
dylatacja czasu	$x' = 0$	$t = \gamma t'$	$C = \gamma$
skrócenie długości	$t' = 0$	$x' = x/\gamma$	$A = \gamma$
względna prędkość	$x = 0$	$x' = -vt'$	$B/A = v \quad \Rightarrow \quad B = \gamma v$
względność równoczesności	$t = 0$	$t' = -vx'/c^2$	$D/C = v/c^2 \quad \Rightarrow \quad D = \gamma v/c^2$

A więc:

$$\begin{aligned} t &= \gamma\left(t' + vx'/c^2\right) \\ x &= \gamma\left(x' + vt'\right) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - vx/c^2\right) \\ x' &= \gamma\left(x - vt\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Transformacje Lorentza - zastosowania

Transformacje Lorentza:

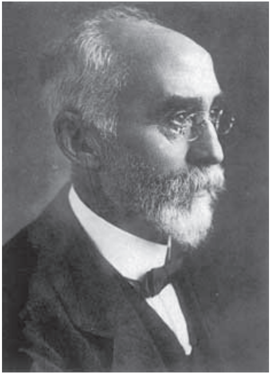
$$\mathbf{t} = \gamma\left(\mathbf{t}' + \mathbf{v}\mathbf{x}'/\mathbf{c}^2\right) \qquad \mathbf{t}' = \gamma\left(\mathbf{t} - \mathbf{v}\mathbf{x}/\mathbf{c}^2\right)$$
$$\mathbf{x} = \gamma\left(\mathbf{x}' + \mathbf{v}\mathbf{t}'\right) \qquad \mathbf{x}' = \gamma\left(\mathbf{x} - \mathbf{v}\mathbf{t}\right)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}' \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{y}$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{z}' \qquad \mathbf{z}' = \mathbf{z}$$

- Względność równoczesności:
  – równoczesne w S': $(x', t') = (x', 0)$
  – transformacja do S daje $t = \gamma v x'/c^2$ – brak równoczesności w S.
- Dylatacja czasu:
  – rozważmy zdarzenia zachodzące w tym samym miejscu w S': $(x', t') = (0, t')$
  – transforamcja do S daje $t = \gamma t'$
- Skrócenie długości:
  – rozważamy pręt o długości l' spoczywający w S',
  – w celu pomiaru długości należy wykonać równocześnie pomiary położenia konców odcinka, $(x, t) = (x, 0)$
  – transformacja do S' daje $x' = \gamma x$, a więc $l = l'/\gamma$

Transformacje Lorentza - alternatywne wyprowadzenie

Transformacje współrzędnych muszą być liniowe:

$$x' = ax + bt \qquad x = a'x' + b't'$$



Początek układu S' jest w $x' = 0$ i spełnia równanie:

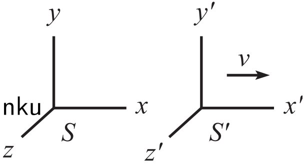
$$0 = ax + bt \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{a} = \frac{x}{t} = v$$

Podobnie początek $x = 0$ układu S spełnia równanie:

$$0 = a'x' + b't' \quad \Rightarrow \quad -\frac{b'}{a'} = \frac{x'}{t'} = -v$$

Podstawiamy za b i b':

$$x' = a(x - vt) \quad \text{oraz} \quad x = a'(x' + vt') \qquad (\star)$$



Żądanie symetrii przy zmianie S na S' prowadzi do warunku

$$a = a'$$

Transformacje Lorentza - Einsteina

Przypuśćmy, że wysyłamy sygnał świetlny w chwili $t = t' = 0$ z punktu $x = x' = 0$:

$$x' = ct' \quad \text{oraz} \quad x = ct$$

Korzystając z równań $(\star)$ dostajemy:

$$ct' = a(ct - vt) \quad \text{oraz} \quad ct = a(ct' + vt')$$

Mnożąc powyższe równania stronami dostajemy:

$$c^2tt' = a^2tt'(c^2 - v^2) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma(v)$$

A więc transformacje współrzędnych przestrzennych mają postać:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \text{oraz} \quad x = \gamma(x' + vt')$$

Współrzędne przestrzenne prostopadłe do kierunku ruchu transformują się trywialnie:

$$y' = y \quad \text{oraz} \quad z' = z$$

Aby znaleźć transformacje współrzędnych czasowych, przekształcamy równania $(\star)$ do postaci:

$$avt' = x - ax' \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{x}{av} - \frac{x'}{v} = \frac{x}{av} - \frac{a}{v}(x - vt) = at + \frac{x(1-a^2)}{av}$$

Podstawiając $a = \gamma$ znajdujemy transformacje współrzędnych czasowych:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad \text{oraz} \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx}{c^2}\right)$$

Podsumowując, tranformacje Lorentza-Einsteina mają postać:

$$\text{w przód} \quad \begin{cases} x' = \gamma\,(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \text{w tył} \quad \begin{cases} x = \gamma\,(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{cases}$$