Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 10

Trajektorie cząstek posiadających masę

- Cząstki obdarzone masę poruszają się po liniach geodezyjnych czasopodobnych.
- Równania linii geodezyjnych w płaszczyźnie równikowej mają postać:

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t} = const \equiv k = \frac{E}{m_0}$$

$$\left\{ g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2, \qquad ds^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\phi^2 \right\}$$

$$c^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = c^2$$

$$r^2\,\dot{\phi} = const \equiv h = \frac{L}{m_0}$$

- Wstawiając (1) i (3) do (2), otrzymujemy: $\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right) - \frac{2M}{r} = k^2 - 1$
- Korzystając z relacji $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau} = \left\{ h = r^2\dot{\phi}^2 \right\} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}$

otrzymujemy równanie orbity: $$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = k^2 - 1 + \frac{2M}{r} + \frac{2Mh^2}{r^3}$$

$$u \equiv \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{k^2-1}{h^2} + \frac{2Mu}{h^2} + 2Mu^3$$

Ruch radialny cząstki posiadającej masę

- Po zróżniczkowaniu względem ϕ i przywróceniu stałych G oraz c otrzymujemy:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \qquad \text{(Newton)}$$

- Rozważamy teraz swobodny spadek cząstki posiadającej masę znajdującej się początkowo w spoczynku w nieskończoności ($k = 1,\ h = 0$):

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \qquad \frac{dr}{d\tau} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \qquad \frac{dr}{dt} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

- Całkując powyższe równania, można wyznaczyć czasy trwania ruchu radialnego z orbity o promieniu r_0 $(\tau = 0, t = 0)$ na orbitę o promieniu r:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r_0^3}{2M}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r^3}{2M}} \\
t &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{r_0^3}{2M}} - \sqrt{\frac{r^3}{2M}}\right) + 4M\left(\sqrt{\frac{r_0}{2M}} - \sqrt{\frac{r}{2M}}\right) \\
&\quad + 2M \ln\left|\left(\frac{\sqrt{r/2M}+1}{\sqrt{r/2M}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{r_0/2M}-1}{\sqrt{r_0/2M}+1}\right)\right|
\end{aligned}$$

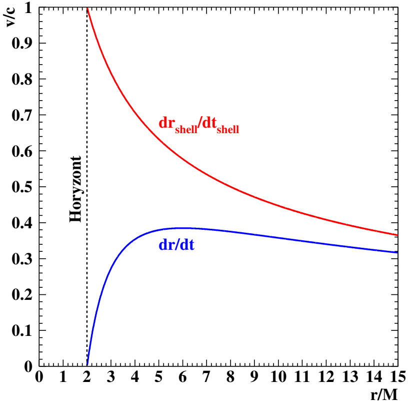
W szczególności mamy: $\tau \xrightarrow[r\to 0]{} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r_0^3}{2M}}$ oraz $t \xrightarrow[r\to 2M]{} \infty$

Swobodny spadek z dużej (∞) odległości na czarną dziurę

- Całkowita energia w trakcie ruchu jest zachowana: $\dfrac{E}{m} = \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)\dfrac{dt}{d\tau} = 1$
- układ Schwarzschilda: $\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^2 dt^2 = d\tau^2 = \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2$

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}$$

Zbliżając się do horyzontu, cząstka zwalnia do $dr/dt = 0$ na horyzoncie - osiągnie horyzont po nieskończonym czasie.



- układ sfery (shell): obserwator mierzy bezpośrednio upływ czasu oraz odległość pomiędzy zegarami na sferze:

$$d\sigma = dr_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr$$

$$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$$

Cząstka mija sferę z prędkością: $\dfrac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = \left(1 - \dfrac{M}{r}\right)^{-1}\dfrac{dr}{dt} = -\left(\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}$

Pomiar energii w układzie Schwarzschilda i na sferze

- W OTW energia nie dzieli się na kinetyczną, potencjalną i spoczynkową.
- Jak zmierzyć całkowitą energię satelity krążącego po ustalonej orbicie?
  - umieszczamy cząstkę testową na orbicie w dużej odległości (tak aby stosował się opis Newtona) i znajdujemy całkowitą masę układu:

$$G\frac{M_{\text{tot}}m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad M_{\text{tot}} = \frac{v^2 r}{G}$$

  - Obliczamy energię satelity: $E = M_{\text{tot}} - M_{\text{star}}$
- Przykład: Rozważmy zegar o masie m umieszczony na powłoce sferycznej $r = r_0$. Ile wynosi energia zegara z punktu widzenia odległego obserwatora?

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \left\{ \begin{array}{cc} d\tau = dt_{\text{shell}} & r = r_0 \\ dt = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dt_{\text{shell}} & \end{array} \right\} = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2}$$

  - powyższy wynik jest słuszny dla $r_0 > 2M$
  - dla $r_0 \to \infty$ mamy $E \to m$ (STW)
  - w pobliżu czarnej dziury $E < m$ - energia wiązania grawitacyjnego.
- Lokalny pomiar energii na sferze (E_{shell} - wielkość lokalna - nie jest stałą ruchu):

$$\frac{E_{\text{shell}}}{m} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{shell}}^2}} = \left\{ v_{\text{shell}} = \frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \right\} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}$$

Maksymalna prędkość na horyzoncie

- Rozważmy cząstkę która spada na czarną dziurę z nieskończoności, ale z początkową prędkością różną od zera:

$$const = \frac{E}{m_0} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} \equiv \gamma_0$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt = \gamma_0\, d\tau = \gamma_0 \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 - \frac{1}{\gamma_0^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2}$$

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{dr}{dt} = -\left[1 - \frac{1}{\gamma_0^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2}$$

Maksymalna prędość cząstki przekraczającej horyzont wynosi c.

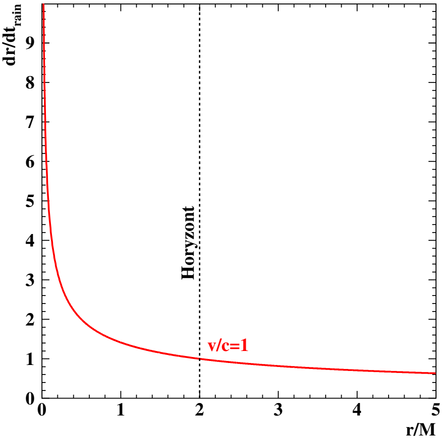
- Czas potrzebny do osiągnięcia osobliwości:

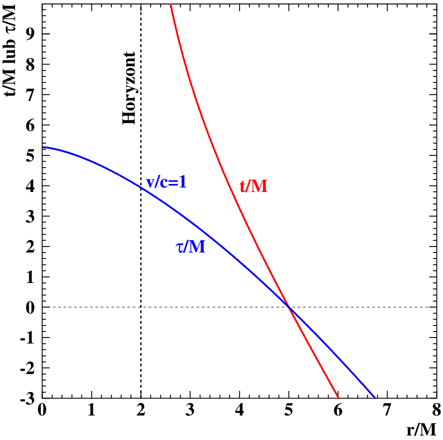
$$\frac{dr}{d\tau} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \Rightarrow \tau = -\int_{2M}^{0}\sqrt{\frac{r}{2M}}dr = \frac{4}{3}M\ [\text{m}] = 6.57\cdot 10^{-6}\frac{M}{M_\odot}\ [\text{s}]$$

$$M = \frac{3}{4}\tau = \Big\{\tau = 20\ [\text{y}]\Big\} = 15\ [\text{ly}] = 1.4\cdot 10^{17}\ [\text{m}] = 9.6\cdot 10^{13}\, M_\odot$$

- Jest to układ związany z rakietą poruszającą się swobodnie wewnątrz horyzontu czarnej dziury (radialnie), która rozpoczęła swój ruch w dużej odległości od stanu spoczynku.

$$\frac{dr}{dt_{ff}} = \frac{dr}{d\tau} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad t_{2,ff} - t_{1,ff} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{M}\right)^{1/2}\left(r_1^{3/2} - r_2^{3/2}\right)$$





Układ swobodnie spadający

- Czy wewnątrz horyzontu prędkość jest większa od prędkości światła? Argumenty za i przeciw:
  - $\sqrt{2M/r} > 1$ dla $r < 2M$,
  - czas własny mierzony przez obserwatora poruszającego się radialnie od horyzontu do centralnej osobliwości, $\tau = 4M/3$, jest mniejszy od promienia horyzontu,
  - obserwator swobodnie spadający przekracza horyzont z prędkością światła, a więc wnioskujemy, że wewnątrz musi poruszać się jeszcze szybciej,
  - w układzie swobodnie spadającym (STW) światło mija obserwatora z prędkością c, a więc nie może się on poruszać szybciej niż światło,
  - „prędkość własna” światła jest nieskończona: $\frac{dx}{d\tau} = \gamma\frac{dx}{dt} = \gamma v$.

  Wszyscy lokalni obserwatorzy zgadzają się co do tego, że żaden obiekt nie porusza się szybciej niż światło.
- Odległość pomiędzy sferami z punktu widzenia obserwatora „free fall”:

$$\frac{dr_{ff}}{dr} = \frac{dr_{ff}}{dr_{\text{shell}}}\frac{dr_{\text{shell}}}{dr} = (1-v^2)^{1/2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} = \left\{ v = \frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \right\} = 1$$

- Uwaga: Relacja $dr_{ff} = dr$ jest słuszna tylko dla pomiaru odległości w układzie „free fall”. Nie zachodzi w innych pozornie podobnych układach, np.:
  - start w nieskończoności, ale z prędkością różną od zera,
  - start z zerową prędkością początkową, ale w skończonej odległości.

Metryka w układzie „free fall”

- Układ „free fall” pozwala tylko na lokalny opis zdarzeń.
- Poszukujemy globalnej metryki możliwej do zastosowania zarówno na zewnątrz jak i wewnątrz horyzontu zdarzeń.
- Taka metryka istnieje we współrzędnych r, ϕ, t_{ff}:

$$dr_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr$$
$$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$$

$$\boxed{\begin{gathered} v = \frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \\ \gamma = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \end{gathered}}$$

Stosujemy TL do przejścia z układu S - „shell frame” do układu S' - „free fall”:

$$dt_{ff} = \gamma(dt_{\text{shell}} - v dr_{\text{shell}}) = -v\gamma\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dr + \gamma\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$$

$$dt = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \frac{dt_{ff}}{\gamma} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) v dr = dt_{ff} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dr$$

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi =$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_{ff}^2 - 2\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt_{ff} dr - dr^2 - r^2 d\phi^2$$

- Dla $dt_{ff} = 0$ mamy geometrię euklidesową - przestrzeń jest lokalnie płaska.

Trajektorie światła

- Cząstki bezmasowe poruszają się po liniach geodezyjnych zerowych.
- Równania linii geodezyjnych w płaszczyźnie równikowej mają postać:

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t} = const \equiv k$$

$$\Big\{ g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0, \qquad ds^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\phi^2 \Big\}$$

$$c^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0$$

$$r^2\,\dot{\phi} = const \equiv h$$

- Wstawiając (1) i (3) do (2), otrzymujemy: $\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right) = k^2$
- Korzystając z relacji $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau} = \Big\{ h = r^2\dot{\phi}^2 \Big\} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}$

  otrzymujemy równanie orbity: $\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = k^2 + \frac{2Mh^2}{r^3}$

$$\Rightarrow \Big\{ u \equiv \frac{1}{r};\ \frac{d}{d\phi} \Big\} \Rightarrow \qquad \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2$$

Ruch wewnątrz horyzontu

- W układzie „free fall” ruch cząstki może się odbywać tylko w stożku świetlnym:

$$d\tau^2 = -\left[dr + \left(1+\sqrt{\frac{2M}{r}}\right)dt_{ff}\right]\left[dr - \left(1-\sqrt{\frac{2M}{r}}\right)dt_{ff}\right] - r^2 d\phi^2$$

- Dla radialnego $(d\phi = 0)$ ruchu światła $(d\tau = 0)$ mamy: $\dfrac{dr}{dt_{ff}} = -\sqrt{\dfrac{2M}{r}} \pm 1$
- Oznacza to, że wewnątrz horyzontu nawet światło wyemitowane z układu „free fall' w kierunku radialnym „na zewnątrz”, porusza się w stronę centrum.
- Przykład: Rozważmy promień światła wysłany z układu „free fall” w kierunku „na zewnątrz ↑” w obszarze na zewnątrz i wewnątrz horyzontu. Jak „prędkość własna” światła zależy od współrzędnej r/M? Dla wyznaczonych wyżej wartości r/M znajdź prędkości promienia światła wysłanego radialnie „do środka ↓”.

$$\frac{r}{M} = \frac{2}{\left(1-\frac{dr}{dt_{ff}}\right)^2}$$

$$\frac{dr}{dt_{ff}} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} - 1$$

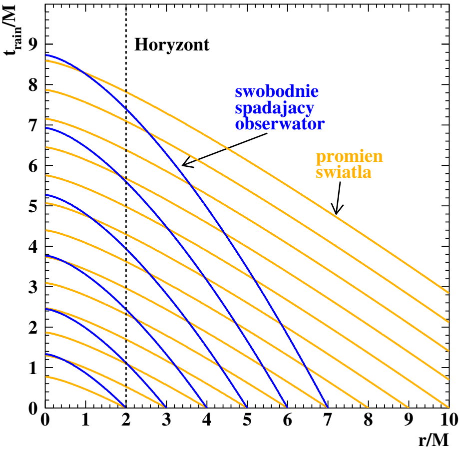
$\frac{dr}{dt_{ff}}\uparrow$	$\frac{r}{M}$	$\frac{dr}{dt_{ff}}\downarrow$		$\frac{dr}{dt_{ff}}\uparrow$	$\frac{r}{M}$	$\frac{dr}{dt_{ff}}\downarrow$
0.99	20000	-1.01		-0.1	1.65	-2.1
0.9	200	-1.1		-0.5	0.89	-2.5
0.5	8	-1.5		-1	0.5	-3
0	2	-2		-9	0.02	-11

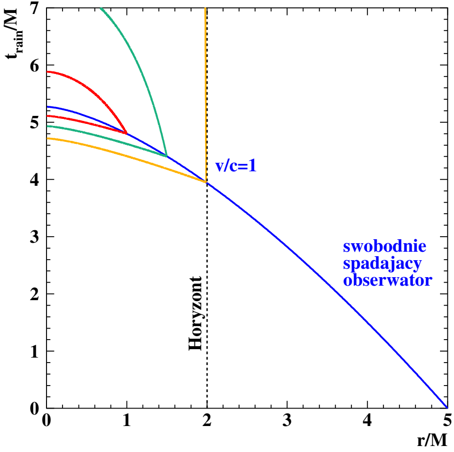
- Dowolny obiekt materialny, wewnątrz horyzontu, musi się poruszać w kierunku malejącego r - a więc horyzont można przekroczyć tylko w jedną stronę.

Radialne trajektorie światła

$$\frac{dr}{dt_{ff}} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \hat{r} \equiv \frac{r}{M},\ \hat{t} = \frac{t}{M} \right\} \quad \Rightarrow \quad d\hat{t}_{ff} = -\frac{\sqrt{\hat{r}}}{\sqrt{2} \mp \sqrt{\hat{r}}} d\hat{r}$$

$$\hat{t}_{2,ff} - \hat{t}_{1,ff} = \pm(\hat{r}_1 - \hat{r}_2) - 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\hat{r}_1} - \sqrt{\hat{r}_2}\right) + 4\ln\left(\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{\hat{r}_1}}{\sqrt{2} \pm \sqrt{\hat{r}_2}}\right)$$





Bezbolesna śmierć w centralnej osobliwości

- Przyspieszenie ziemskie w jednostkach geometrycznych:

$$g_E = \frac{M}{r_E^2} = 9.81\ [\mathrm{m/s^2}] \approx 1.09 \cdot 10^{-16}\ [\mathrm{m^{-1}}]$$

- Załóżmy, ze zaczynamy odczuwać dyskomfort, gdy różnica przyspieszeń działajacych na głowę i stopy jest rzędu przyspieszenia ziemskiego g_E.
- W jakiej odległości od osobliwości zaczynamy odczuwać dyskomfort?

$$g = \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \left\{ \frac{dr}{d\tau} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \right\} = -\frac{M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad dg = \frac{2M}{r^3}\, dr$$

a więc dyskomfort zaczynamy odczuwać dla $\quad \dfrac{r}{2M} = \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{4M^2 g_E}\right)^{1/3}$

	Słońce	'20 letnia' BH	48 000 $M_\odot$
$r/2M$	1305	$6.3 \cdot 10^{-7}$	1

- Jak długo przed dotarciem do osobliwości rozpoczyna się dyskomfort?

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \quad \text{oraz} \quad \frac{r}{2M} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{4M^2 g_E}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{d}r}{g_E}\right)^{1/2}$$

Czas ten nie zależy od wielkości BH i wynosi $\tau = 4 \cdot 10^{-9}[\mathrm{m}] = 1.57 \cdot 10^{-17}[\mathrm{s}]$