Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 11

Ruch orbitalny cząstki obdarzonej masą

- W ruchu po okręgu w płaszczyźnie równikowej mamy:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \;\Rightarrow\; u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \;\Rightarrow\; h^2 = \frac{Mr^2}{r-3M}$$

- Z równań geodezyjnej możemy wyznaczyć także stałą k:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{2M}{r} = k^2 - 1 \;\overset{\dot{r}=0}{\Rightarrow}\; k = \frac{1-2M/r}{(1-3M/r)^{1/2}}$$

Energia całkowita cząstki na orbicie o promieniu r wynosi $E = km_0c^2$.

- Cząstka może pozostawać na związanej orbicie o promieniu r gdy $E < m_0c^2$:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \leqslant 1 - \frac{3M}{r} \;\Rightarrow\; 4M < r < \infty$$

- Orbity dla których $r < 3M$ nie mogą być geodezyjnymi, ponieważ:

$$r^2\dot{\phi} = h \;\Rightarrow\; \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{M}{r^2(r-3M)}$$

A więc bez względu na to jak duży byłby moment pędu cząstki swobodnie spadającej, nie może się ona poruszać po orbicie o promieniu $r < 3M$.

- W zmiennych Schwarzshilda: $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{(1-2M/r)^2}{k^2}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{GM}{r^3}$

Ucieczka z okolic czarnej dziury

- Przykład: Stycznie do sfery o promieniu $r_0 = 10M$ został wystrzelony satelita z prędkością $v_{0,\text{shell}} = 0.5$. Ile wynoszą moment pędu i energia satelity? Czy satelita oddali się do nieskończoności?

  Do obliczenia momentu pędu potrzebujemy czas własny τ: $dt_{\text{shell}} = \gamma_{0,\text{shell}}\, d\tau$.

$$\frac{L}{m} = r_0^2 \frac{d\phi}{d\tau} = r_0^2\, \gamma_{0,\text{shell}} \frac{d\phi}{dt_{\text{shell}}} = r_0\, \gamma_{0,\text{shell}} \frac{dx_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = r_0\, \gamma_{0,\text{shell}}\, v_{0,\text{shell}} = 5.775M$$

  Do obliczenia energii potrzebujemy czas t: $dt = \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{-1/2} dt_{\text{shell}}$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \frac{dt}{dt_{\text{shell}}} \frac{dt_{\text{shell}}}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} \gamma_{0,\text{shell}} = 1.033$$

  - Gdyby satelita został wystrzelony radialnie na zewnątrz, wówczas oddaliłby się do nieskończoności gdzie miałby wciąż niezerową prędkość.
  - Aby stwierdzić czy satelita wystrzelony stycznie do sfery również oddali się do nieskończoności musimy zbadać jego orbitę w geometrii Schwarzschilda.

Efektywny potencjał w mechanice Newtona

- Aby opisać orbitę cząstki o masie m wokół czarnej dziury o masie M korzystamy z zasady zachowania energii:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad \text{gdzie} \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}$$

W jednostkach geometrycznych mamy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{E}{m} - \underbrace{\left[-\frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2}\right]}_{\text{potencjał efektywny } V(r)/m}$$

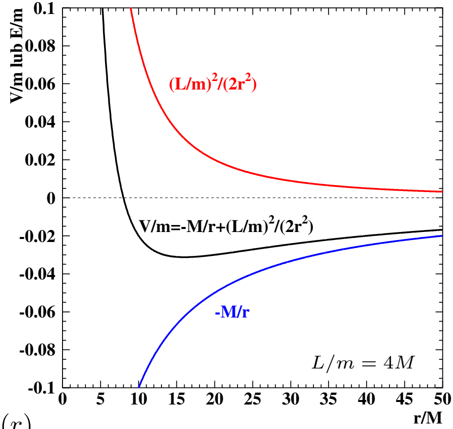
Ogólne rozwiązanie można zapisać jako:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V(r)}} + const$$

W szczególności okres drgań:

$$T = \sqrt{2m} \int_{r_1(E)}^{r_2(E)} \frac{dr}{\sqrt{E - V(r)}}$$

gdzie $r_{1,2}$ to rozwiązania równania $E = V(r)$.



Efektywny potencjał w geometrii Schwarzschilda

- Korzystając z metryki Schwarzschilda oraz wyrażając dt i $d\phi$ za pomocą $d\tau$:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{E}{m} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} d\tau$$

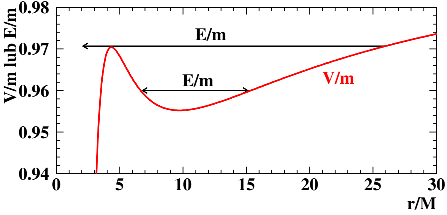
$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad d\phi = \frac{L}{m} \frac{1}{r^2} d\tau$$

znajdujemy:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \equiv \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(\frac{V}{m}\right)^2$$

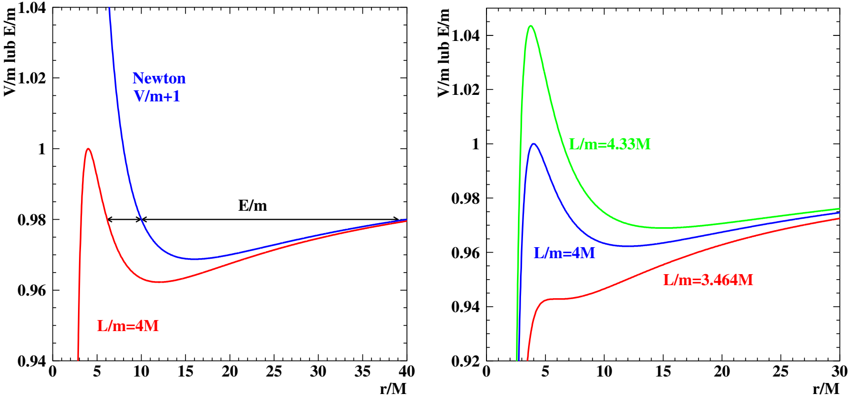
$$\frac{1}{2} \left(\frac{V}{m}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2} - \frac{M(L/m)^2}{r^3}$$



Ostatni wyraz odpowiada za dodatkowe przyciąganie wynikające z OTW. Odpowiada m. in. za precesję orbit.

Efektywny potencjał w geometrii Schwarzschilda

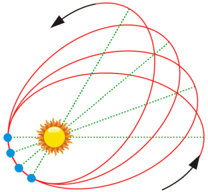
- Efektywny potencjał Schwarzschilda pozwala na większe zbliżenie do czarnej dziury niż to wynika z rozważań klasycznych.
- Wokół czarnej dziury nie mogą istnieć stabilne orbity kołowe o promieniu $r < 6M$
- Istnienie minimalnego promienia stabilnej orbity, prowadzi do tworzenia się dysków akrecyjnych, w których na skutek tarcia wywołanego turbulencjami, gaz jest podgrzewany tracąc przy tym moment pędu aż do opuszczenia minimalnej orbity i gwatownego spadku po spirali do czarnej dziury.



Precesja peryhelium Merkurego

- Peryhelium (aphelium) - punkt na orbicie ciała niebieskiego krążącego wokół Słońca znajdujący się w miejscu nawiększego zbliżenia (oddalenia) od Słońca. (W przypadku obiektów krążących wokół Ziemi mówimy o perygeum i apogeum.)
- Merkury: (perihelium $= 46.04 \cdot 10^6$ km; aphelium $= 69.86 \cdot 10^6$ km)
  - wielka oś elipsy obraca się o 0.159 stopnia ($574''$) na stulecie,
  - mechanika Newtona (wpływ innych planet) wyjaśnia obrót o $531''$,
  - OTW potrzebna do wyjaśnienia pozostałych $43''$

Planeta	Obrót peryhelium [arc sec/rok]	Śr. promień orbity [j.a.]	Okres obiegu [lata]
Merkury	42.980 ± 0.001	0.38710	0.24085
Wenus	8.618 ± 0.041	0.72333	0.61521
Ziemia	3.846 ± 0.012	1.00000	1.00000
Mars	1.351 ± 0.001	1.52368	1.88089



- Przybliżenie ruchu harmonicznego w przypadku dowolnego potencjału polega na rozwinięciu potencjału w szereg Taylora wokół położenia równowagi do wyrazów drugiego rzędu:

$$V(r) = V(r_0) + \left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0} (r - r_0)^2 + \ldots$$

Orbita Merkurego w przybliżeniu Newtona

- Ruch satelity po orbicie eliptycznej traktujemy jako złożenie ruchu po okręgu o średnim promieniu r_0 (minimum potencjału - $d(V/m)/dr(r = r_0) = 0$) i drgań harmonicznych w kierunku radialnym wokół średniej orbity kołowej:

Częstość kołowa w ruchu harmonicznym: $\frac{V}{m} = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \;\Rightarrow\; \omega^2 = \left.\frac{d^2(V/m)}{dr^2}\right|_{r=r_0}$

- Orbita Merkurego w mechanice Newtona w przybliżeniu harmonicznym:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2}\right] \quad\Rightarrow\quad \frac{V(r)}{m} = -\frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2}$$

Częstość ω_r ruchu drgającego:

$$\frac{d(V/m)}{dr} = \frac{M}{r^2} - \frac{(L/m)^2}{r^3} \quad\Rightarrow\quad \left\{ \left.\frac{d(V/m)}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \right\} \quad\Rightarrow\quad M r_0 = (L/m)^2$$

$$\frac{d^2(V/m)}{dr^2} = -\frac{2M}{r^3} + \frac{3(L/m)^2}{r^4} \quad\Rightarrow\quad \omega_r^2 = \frac{d^2(V/m)}{dr^2}(r = r_0) = \frac{M}{r_0^3}$$

Częstość ω_ϕ ruchu kołowego po orbicie:

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau} = r^2\omega_\phi \quad\Rightarrow\quad \omega_\phi = \frac{L}{m}\frac{1}{r^2} = \left(\frac{M}{r_0^3}\right)^{1/2}$$

Ponieważ $\omega_\phi = \omega_r$ oznacza to że ruch odbywa się po zamkniętej elipsie.

Orbita Merkurego w geometrii Schwarzschilda

- Stosujemy model przybliżenia harmonicznego do orbity Merkurego w OTW.

  Częstość ω_r ruchu drgającego:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right] \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{V}{m}\right)^2$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\frac{V^2}{m^2}\right)\bigg|_{r=r_0} = \frac{M}{r_0^2} - \frac{(L/m)^2}{r_0^3} + \frac{3M(L/m)^2}{r_0^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad (L/m)^2 = \frac{Mr_0^2}{r_0-3M}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{2}\frac{V^2}{m^2}\right) = -\frac{2M}{r^3} + \frac{3(L/m)^2}{r^4} - \frac{12M(L/m)^2}{r^5} \quad \Rightarrow \quad \omega_r^2 = \frac{M(r_0-6M)}{r_0^3(r_0-3M)}$$

  Częstość ω_ϕ ruchu kołowego po orbicie:

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau} = r^2\omega_\phi \quad \Rightarrow \quad \omega_\phi^2 = \frac{(L/m)^2}{r^4} = \frac{M}{r_0^2(r_0-3M)}$$

  Różnica częstości kołowych jest w przybliżeniu równa:

$$\omega_\phi^2 - \omega_r^2 = \frac{6M^2}{r_0^3(r_0-3M)} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \omega_\phi^2-\omega_r^2\approx \\ \approx 2\omega_\phi(\omega_\phi-\omega_r) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \quad \omega_\phi - \omega_r = \frac{3M}{r_0}\omega_\phi$$

- Dane liczbowe: $T_{\text{Ziemia}} = 3.157\cdot 10^7$ s, $T_{\text{Merkury}} = 7.602\cdot 10^6$ s, $r_0 = 5.8\cdot 10^{10}$ m
  $\Delta\phi = 41.12$ arc sec / stulecie (wartość dokładna 42.98 arc sec / stulecie).

- Większość informacji o zdarzeniach w kosmosie dociera do nas w postaci fal elektromagnetycznych.

  Jednak w zakrzywionej czasoprzestrzeni, obraz świata który w ten sposób uzyskujemy, może być zniekształcony, jeśli światło przechodzi w pobliżu zwartych, masywnych obiektów.

Prędkość światła w różnych układach odniesienia:

- W układzie swobodnie spadającym (radialnie lub po dowolnej orbicie) prędkość światła wynosi $v = 1$.
- W układzie Schwarzshilda $v < 1$ (ale ta prędkość nie jest mierzona lokalnie):

$$d\tau^2 = 0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\phi^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right) & \text{gdy} \quad d\phi = 0 \\ r\dfrac{d\phi}{dt} = \pm\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2} & \text{gdy} \quad dr = 0 \end{cases}$$

- W układzie związanym ze sferą $v = 1$:

$$d\tau^2 = 0 = dt_{\text{shell}}^2 - dr_{\text{shell}}^2 - r^2 d\phi^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{ds_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = \pm 1 \quad (ds_{\text{shell}}^2 \equiv dr_{\text{shell}}^2 + r^2 d\phi^2)$$

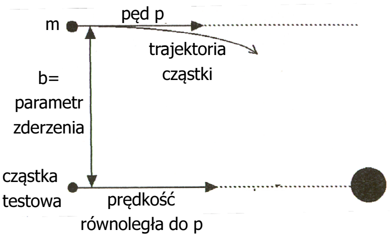
Parametr zderzenia

- Traktujemy światło jako cząstkę o masie $m \to 0$ i jednocześnie prędkości $v \to 1$.
- Moment pędu mozna wyrazić poprzez parametr zderzenia $L = bp_\infty$, co daje:

$$b = \frac{L}{p_\infty} = \frac{L}{\sqrt{E^2 - m^2}} \xrightarrow{m \to 0} \frac{L}{E}$$

- Numeryczna wartość parametru zderzenia jest zachowana podczas całego ruchu.
- Korzystając z równań ruchu dla cząstki materialnej:

Definicja parametru zderzenia b:



$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right], \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L/m}{r^2}, \quad \frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

otrzymujemy:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^3 \left[\left(\frac{m}{E}\right)^2 + \left(\frac{L}{E}\right)^2 \frac{1}{r^2}\right]$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{L}{m}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{1}{r^2}$$

Ruch światła w geometrii Schwarzschilda

- W granicy $m \to 0$ oraz korzystając ze związku $b = L/E$ dostajemy równania ruchu dla światła w układzie Schwarzschilda:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2} \quad \text{oraz} \quad r\frac{d\phi}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{b}{r}$$

- Prędkość światła w funkcji parametru zderzenia i współrzędnej r:

$$v_{\text{light}} = \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]^{1/2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + \frac{2Mb^2}{r^3}\right]^{1/2}$$

- Obserwator na sferze o promieniu r mierzy składowe prędkości odpowiednio:

$$\left\{ dr_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr, \qquad dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \right\}$$

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = \pm \left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2}, \qquad r\frac{d\phi}{dt_{\text{shell}}} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{b}{r}$$

- Przykład: Parametr zderzenia dla światła wysłanego ze sfery o promieniu r_0 pod kątem θ_0 (względem r):

$$1 \times \sin\theta_0 = r_0 \frac{d\phi}{dt_{\text{shell}}} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} \frac{b}{r_0} \quad \Rightarrow \quad b = r_0 \sin\theta_0 \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2}$$