

Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 12

Efektywny potencjał dla światła

- Równanie ruchu dla światła w zmiennych Schwarzschilda w kierunku radialnym ma postać:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^3 \frac{b^2}{r^2}$$

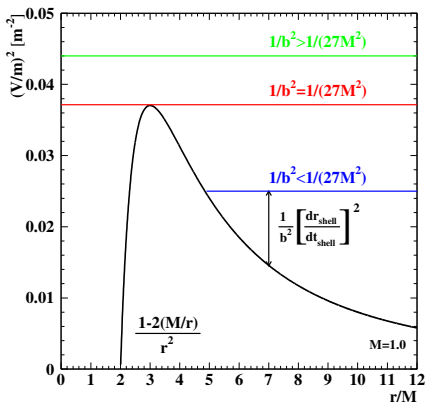
- Natomiast dla obserwatora na sferze przyjmuje postać:

$$\left(\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{b^2}{r^2}$$

lub

$$\frac{1}{b^2} \left(\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{b^2}}_{\text{stała ruchu}} - \underbrace{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r^2}}_{(V/m)^2}$$

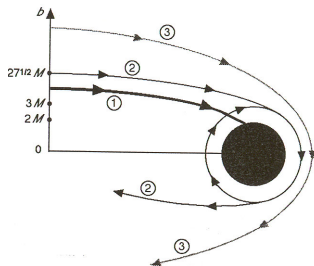
- Efektywny potencjał zdefiniowany wyżej stosuje się dla światła o dowolnej długości fali.
- Efektywny potencjał ma maksimum w $r = 3M$ o wartości $1/(27M^2)$.
- Oznacza to, że dla $b = b_{\text{critical}} = \sqrt{27M} \approx 5.2M$, światło zatrzymuje się na chwilę w kierunku radialnym, poruszając się wciąż w kierunku stycznym do sfery.



Trajektorie światła w geometrii Scharzschilda

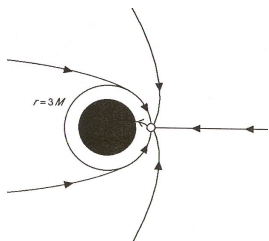
- Sytuacje przedstawione na wykresie potencjału efektywnego można przedstawić w postaci tzw. map Schwarzschilda.

- ① dla $b < b_{\text{critical}} = \sqrt{27}M$ światło wpada do czarnej dziury,
- ② dla $b = b_{\text{critical}}$ światło przez pewien czas znajduje się na orbicie o promieniu $r = 3M$, a następnie może wpaść do czarnej dziury lub oddalić się do nieskończoności,
- ③ dla $b > b_{\text{critical}}$ trajektoria światła zostaje zakrzywiona, lecz światło nie wpada do czarnej dziury.



- Do dowolnego punktu znajdującego się na sferze o promieniu $r = 3M$ nie docierają promienie świetlne z kierunków $\theta_0 > 90^\circ$ (θ_0 mierzone względem kierunku radialnego "na zewnątrz"):

$$b = r_0 \sin \theta_0 \left(1 - \frac{2M}{r_0} \right)^{-1/2} = \left\{ r_0 = 3M \right\} = \\ = 3\sqrt{3}M \sin \theta_0$$



Mapa Schwarzschilda a widok ze sfery

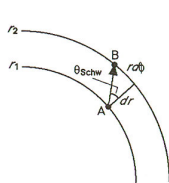
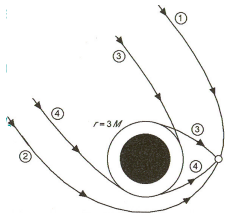
- **Halo wokół czarnej dziury:** Ponieważ każda gwiazda daje wkład do promieni świetlnych krążących chwilowo po niestabilnej orbicie o promieniu $r = 3M$, obserwator znajdujący się w dowolnym punkcie o $r = 3M$ widzi wokół czarnej dziury cienki jasny pierścień otaczający go ze wszystkich kierunków.
- Obserwator znajdujący się w pobliżu czarnej dziury widzi wielokrotne obrazy o różnym natężeniu danej gwiazdy, z której światło dociera do niego różnymi drogami.
- **Porównanie widoku na sferze i mapy Schwarzschilda.**

Rozważmy promień światła łączący zdarzenia A i B z punktu widzenia obserwatora na sferze i mapy Schwarzschilda:

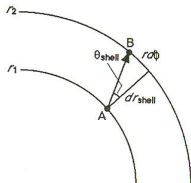
$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Schw}} = \frac{r d\phi}{dr} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} \theta_{\text{shell}} = \frac{r d\phi}{dr_{\text{shell}}}$$

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \operatorname{tg} \theta_{\text{Schw}}$$

Powyższa relacja jest również słuszna dla dowolnej cząstki o $m > 0$.



mapa Schwarzschilda



obserwator na sferze

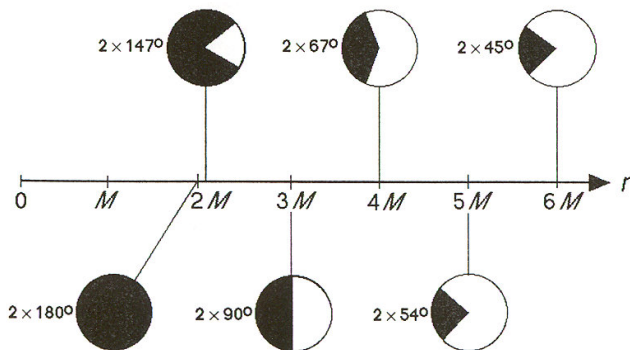
Co widzimy patrząc na niebo wokół czarnej dziury?

- Istnieje jednoznaczny związek pomiędzy parametrem zderzenia i kierunkiem pod jakim wiązkę światła widzi widz na sferze o promieniu r :

$$\sin \theta_{\text{shell}} = r \frac{d\phi}{dt_{\text{shell}}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{b}{r}$$

- Jaką część nieba wypełnia czarna dziura wokół widza znajdującego się na sferze:

$$\sin \theta_{\text{shell, critical}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{b_{\text{critical}}}{r} = \sqrt{27} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{M}{r}$$

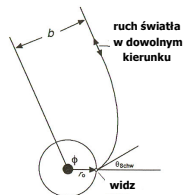


Gdzie widzimy gwiazdy stojąc na sferze?

- Promień światła, który nie przekroczył horyzontu może poruszać się w każdą stronę po przewidywanej trajektorii. Wyślijmy wiązkę laserową w kierunku wybranej gwiazdy:

$$\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{b}{r^2}$$



eliminując dt dostajemy:

$$d\phi = \left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{b^2}{r^2}\right]^{-1/2} \left(\frac{b}{r^2}\right) dr$$

zmiana zmiennych, $r \rightarrow u = M/r$:

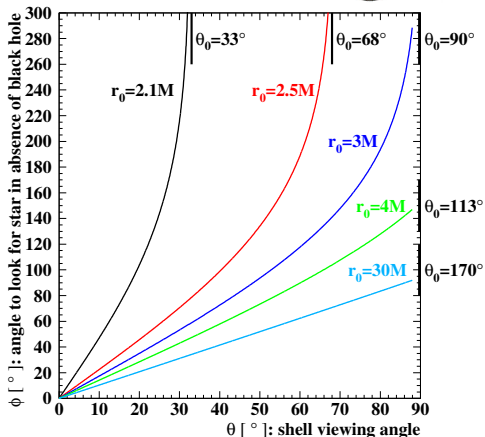
$$d\phi = - \left[(M/b)^2 - u^2 + 2u^3\right]^{-1/2} du$$

granice całkowania:

$$r_0 < r < \infty \Rightarrow M/r_0 < u < 0$$

parametr zderzenia wyznaczamy ze wzoru:

$$\frac{b}{M} = \frac{r_0}{M} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \sin \theta_{\text{shell}}$$



Co widzi astronauta poruszający się względem sfery?

- Obserwator poruszający się z prędkością v_{shell} (stycznie lub radialnie) względem obserwatora na sferze stosuje STW (abberacja i efekt Dopplera):

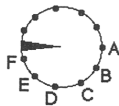
$$\cos \psi_{\text{orbiter}} = \frac{\cos \psi_{\text{shell}} + v_{\text{shell}}}{1 + v_{\text{shell}} \cos \psi_{\text{shell}}}$$

$$E_{\text{orbiter}} = \gamma_{\text{shell}} E_{\text{shell}} (1 + v_{\text{shell}} \cos \psi_{\text{shell}})$$

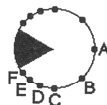
- Kąt pod jakim widzi czarną dziurę obserwator swobodnie spadający wyznaczamy ze wzoru na abberację i formuły na na kąt krytyczny dla obserwatora na sferze:

$$\sin \theta_{\text{shell, critical}} = \sqrt{27} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \frac{M}{r}$$

obserwator swobodnie spadający



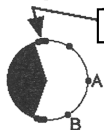
$r = 100M$



$r = 4.5M$

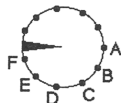


$r = 2.16M$



$r = M$

obserwator na sferze



nie istnieje

Historia swobodnego spadku

Rozważmy swobodny spadek na czarną dziurę o masie $M=10^9 M_{\odot}=1.5 \times 10^9$ km z prędkością początkową $0.1c$ w odległości $r=20000M$:

- **początek podróży: 30 lat (czas własny) do osiągnięcia osobliwości;**
lekko zniekształcony obraz gwiazd w kącie bryłowym 1° wokół czarnej dziury.
- **10 dni do końca... $r=32M$;**
czarna plama o rozmiarze około 10° ;
położenia gwiazd w jej pobliżu przesunięte o 15° ;
wokół brzegu widać wtórne obrazy tych gwiazd, a nawet gwiazd, które znajdują się za nami.
- **4 godziny do końca... $r=2M$;**
wciąż przed nami czarna plama wypełnia tylko obszar o rozmiarze około 90° ;
ekstremalne efekty aberracyjne, większość gwiazd skupiona w wąskim pasie wokół obrazu czarnej dziury;
- **4 minuty do końca... $r=M/7$;**
przed nami czarna plama o rozmiarze około 150° ;
tylko 20% gwiazd pozostało za nami, pozostałe ściśnięte w pasie 10° wokół obrazu czarnej dziury świecącym 1000 razy mocniej niż niebo widziane z Ziemi;
- **ostatnia 1/10 sekundy: siły pływowe stają się nie do wytrzymania... nasza podróż dobiegła końca...**

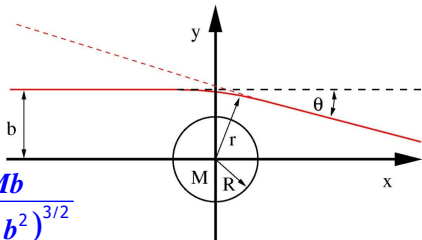
Zakrzywienie toru światła według Newtona

Załóżmy, że foton (traktowany jako cząstka o masie m) przelatuje w pobliżu obiektu o dużej masie M z parametrem zderzenia b . Równanie ruchu ma postać:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{GMm \vec{r}}{r^2 r} \quad \text{gdzie} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Ponieważ $x = ct$, natomiast odchylenie jest małe tzn. $y \approx b$, równanie toru ma postać:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{GMb}{c^2 (x^2 + b^2)^{3/2}} = \left\| \begin{array}{l} \text{w jedn.} \\ \text{geom.} \end{array} \right\| = - \frac{Mb}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$



Po scałkowaniu mamy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = -Mb \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = -Mb \frac{x}{b^2 (x^2 + b^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = - \frac{2M}{b}$$

Kąt odchylenia światła od pierwotnego kierunku jest więc w przybliżeniu równy:

$$\theta_{Newt} \approx \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = - \frac{2M}{b}$$

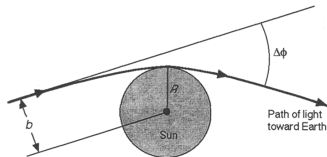
dla Słońca

$$\theta_{Newt} \approx 0.87''$$

Zakrzywienie toru światła według Einsteina

Równanie opisujące trajektorię światła ma postać:

$$d\varphi = \frac{(b/r^2)dr}{\left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2}}$$



Po zmianie zmiennych $u=R/r$ mamy: $d\varphi = \frac{-du}{\left[\frac{R^2}{b^2} - u^2 + \frac{2M}{R}u^3\right]^{1/2}}$

Dla $r=R$ zachodzi: $\frac{1}{b^2} \left(\frac{dr_{shell}}{dt_{shell}}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{1}{r^2} \xrightarrow[\frac{dr_{shell}}{dt_{shell}}=0]{dla\ r=R} \frac{R^2}{b^2} = 1 - \frac{2M}{R}$

Co prowadzi do: $d\varphi = \frac{-du}{\left[1 - u^2 - \frac{2M}{R}(1 - u^3)\right]^{1/2}} = \frac{-(1 - u^2)^{-1/2} du}{\left[1 - \frac{2M}{R} \frac{(1 - u^3)}{(1 - u^2)}\right]^{1/2}}$

Ponieważ M/R jest małe, więc możemy zastosować przybliżenie (słabego pola):

$$d\varphi = -(1 - u^2)^{-1/2} \left[1 + \frac{M}{R} \frac{(1 - u^3)}{(1 - u^2)}\right] du$$

Zakrzywienie toru światła przez Słońce

Poszukiwany kąt $\Delta\varphi_{OTW}$ o jaki zostanie odchylone światło przechodzące w pobliżu ciała o masie M znajdziemy wykonując całkę w granicach $1 < u < 0$ ($R < r < \infty$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi_{tot} &= \frac{1}{2}(\pi + \Delta\varphi_{OTW}) = \int_1^0 \frac{-du}{(1-u^2)^{1/2}} - \frac{M}{R} \int_1^0 \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} + \frac{M}{R} \int_1^0 \frac{u^3 du}{(1-u^2)^{3/2}} = \\ &= -\arcsin u \Big|_1^0 - \frac{M}{R} \left[\frac{u}{(1-u^2)^{1/2}} - (1-u^2)^{1/2} - \frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} \right] \Big|_1^0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2M}{R}\end{aligned}$$

A więc: $\Delta\varphi_{OTW} = \frac{4M}{R}$

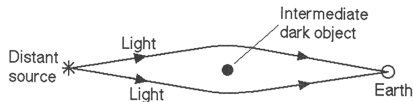
dla Słońca
 $\Delta\varphi_{OTW} \approx 1.75''$

dla gwiazdy neutronowej
 $\Delta\varphi_{OTW} \approx 11.8^\circ$

- 20 maja 1919 – F.W.Dyson, A.S.Eddington, C.Davidson, Phil.Transactions of the Royal Society 220A (1920) 291:
Sobral: $1.98'' \pm 0.16''$
Principe: $1.61'' \pm 0.40''$
- Pomiar odchylenia przez Słońce fal radiowych emitowanych przez quasar 3C279: $(0.9996 \pm 0.0008) \Delta\varphi_{OTW}$ (D.E.Lebach et al., Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 1439)

Pierścienie Einsteina

Światło które dociera do nas z pierścienia Einsteina niekoniecznie zostało zakrzywione tuż przy powierzchni masywnego obiektu:



$$\frac{1}{b^2} \left(\frac{dr_{shell}}{dt_{shell}} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{r^2} \quad \xrightarrow[\frac{dr_{shell}}{dt_{shell}}=0]{\text{dla } R=r \gg 2M} \quad R \approx b \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi \approx \frac{4M}{b}$$

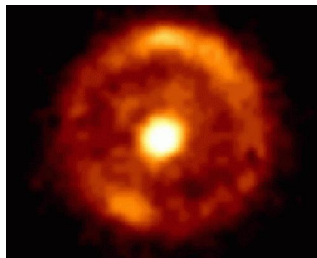
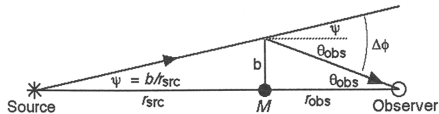
Stosując przybliżenia:

$$r_{src} \gg 2M \quad r_{obs} \gg 2M \quad r_{src} \gg b \quad r_{obs} \gg b$$

$$\sin \theta_{shell} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \frac{b}{r} \Rightarrow \theta_{obs} \approx \frac{b}{r_{obs}}$$

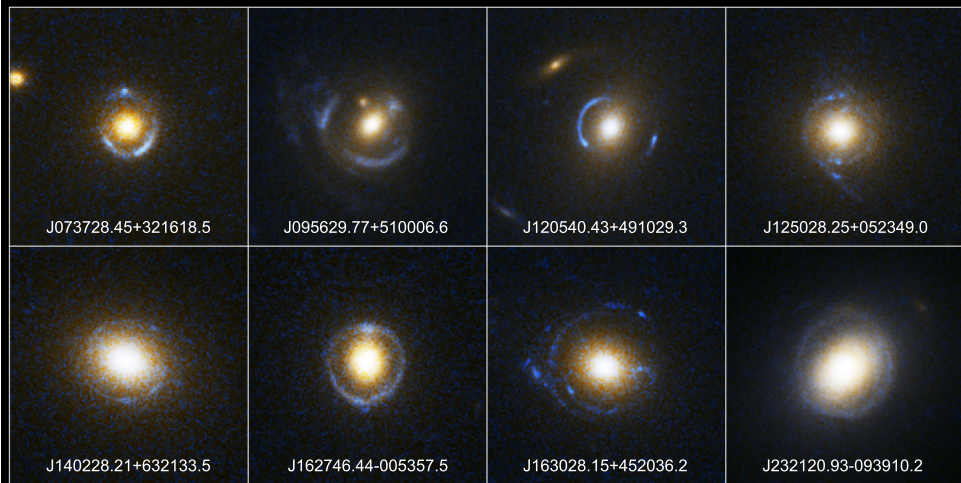
otrzymujemy:

$$\Delta\phi = \psi + \theta_{obs} \Rightarrow \theta_{ring} \equiv \theta_{obs} = \left[\frac{4Mr_{src}}{r_{obs}(r_{obs} + r_{src})} \right]$$



<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap980330.html>

Pierścienie Einsteina



Einstein Ring Gravitational Lenses
Hubble Space Telescope • Advanced Camera for Surveys