Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 2

Dodawanie prędkości

Rozważmy obiekt poruszający się w układzie S' z prędkością $\vec{u}'$ względem tego układu. Natomiast układ S' niech porusza się z prędkoscią v względem układu S w kierunku osi x.

S': $\vec{u}\,' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ gdzie $u'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'},\; u'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'},\; u'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$

S: $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ gdzie $u_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\; u_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\; u_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

Transformacje prędkości:

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + v\mathrm{d}x'/c^2} = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}$$

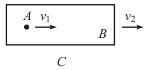
$$u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'}{\gamma\,(\mathrm{d}t' + v\mathrm{d}x'/c^2)} = \frac{u'_y}{\gamma\,(1 + vu'_x/c^2)}$$

$$u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'}{\gamma\,(\mathrm{d}t' + v\mathrm{d}x'/c^2)} = \frac{u'_z}{\gamma\,(1 + vu'_x/c^2)}$$

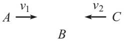
- Dla $u'_x,\, v \ll c$ dostajemy klasyczne prawo dodawania prędkości $u_x \approx u'_x + v$.
- Jeśli $u'_x = c$ lub $v = c$ w wyniku dodawania zawsze dostajemy $u_x = c$.
- Dodawanie do siebie prędkości mniejszych od c daje w wyniku zawsze prędkość mniejszą od c (nie można przyspieszyć cząstki do c).

Dodawanie prędkości - przykłady

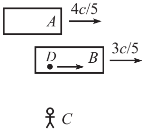
Przykład: Kiedy stosujemy wzór na relatywistyczne dodawanie prędkości? Niech $v_1 = v_2 = 0.9c$.



- prędkość A względem C: $v = (1.8/1.81)c = 0.9945c$
- względna prędkość A i C w układzie B: $v = v_1 + v_2 = 1.8c$



Przykład: Jak długo, w układzie każdego z obserwatorów A, B i C, trwa wyprzedzanie pociągu B przez pociąg A? Długości spoczynkowe A i B są równe.



- Obserwator C mierzy względną prędkość oraz długości A i B, a stąd czas wyprzedzania t_C:

$$\begin{aligned} v_{\text{rel}} &= 4c/5 - 3c/5 = c/5, \\ L_A &= L/\gamma_A = 3L/5, \quad L_B = L/\gamma_B = 4L/5 \quad \Rightarrow \quad t_C = \frac{L_A + L_B}{v_{\text{rel}}} = \frac{7L}{c} \end{aligned}$$

- Obserwator B mierzy prędkość oraz długość A:

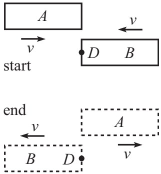
$$u = \frac{4c/5 - 3c/5}{1 - (4/5)(3/5)} = \frac{5}{13}c \quad \Rightarrow \quad \gamma(u) = \frac{13}{12} \quad \Rightarrow \quad L_A = \frac{12}{13}L$$

  Czas wyprzedzania zmierzone przez obserwatora B: $t_B = \dfrac{L + L_A}{u} = \dfrac{5L}{c}$

- Taki sam czas zostanie zmierzony przez obserwatora A.

Dodawanie prędkości - przykłady

Przykład: Jak długo trwa wyprzedzanie z punktu widzenia obserwatora D, który porusza się ze stałą prędkością pomiędzy końcem i początkiem pociagu B, jeśli zdarzenia E_1 "zrównanie się początku A z końcem B" oraz E_2 "zrównanie się końca A z początkiem B" zachodzą dla tego obserwatora w tym samym miejscu?



Z punktu widzenia obserwatora D oba pociągi poruszają się z równymi i przeciwnie skierowanymi prędkościami v.
Wartość prędkości v wyznaczamy z punktu widzenia B:

$$\frac{2v}{1+v^2/c^2} = \frac{5c}{13} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{5} \quad \Rightarrow \quad \gamma(v) = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

Długości obu pociągów w układzie D są równe:

$$L_A = L_B = L/\gamma(v) = \frac{2\sqrt{6}}{5}L$$

Ponieważ E_1 i E_2 zachodzą w tym samym miejscu (D) więc podczas wyprzedzania każdy z pociągów musi przebyć odległość równą swojej długości, dlatego czas wyprzedzania w układzie D wynosi:

$$t_D = \frac{2\sqrt{6}L/5}{c/5} = \frac{2\sqrt{6}L}{c}$$

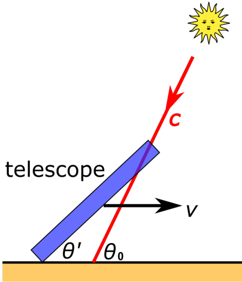
Aberracja światła gwiazd

Niech S będzie układem związanym ze Słońcem i gwiazdami stałymi, natomiast S' układem związanym z Ziemią.

Niech θ_0 będzie kątem pod jakim widać gwiazdę w układzie S, wówczas:

$$u_x = -c\cos\theta_0 \qquad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = -\frac{c\cos\theta_0 + v}{1+\beta\cos\theta_0}$$

$$u_y = -c\sin\theta_0 \qquad u'_y = \frac{u_y}{1 - vu_x/c^2} = -\frac{c\sin\theta_0}{\gamma(1+\beta\cos\theta_0)}$$



W układzie związanym z Ziemią, teleskop należy ustawić pod kątem θ, takim że:

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= -c\cos\theta' \\ u'_y &= -c\sin\theta' \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\gamma(\cos\theta_0 + \beta)}$$

Ponieważ $\beta \approx 10^{-4}$, więc:

$$\cos\theta' = \frac{-u'_x}{c} = \frac{\cos\theta_0 + \beta}{1+\beta\cos\theta_0} \approx (\cos\theta_0+\beta)(1-\beta\cos\theta_0) \approx \cos\theta_0 + \beta\sin^2\theta_0$$

Niezmienniczy interwał czasoprzestrzenny

Z niezmienniczości prędkości światła wynika, że jeśli $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$, to również spełniony jest warunek $c^2\Delta t'^{\,2} - \Delta x'^{\,2} = 0$.

Rozważmy transforamację wielkości $\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &\equiv ct^2 - x^2 = c^2\gamma^2\left(t'^{\,2} + \frac{vx'}{c^2}\right)^2 - \gamma^2\left(x' + vt'\right)^2 = \\ &= \gamma^2\left(c^2t'^{\,2} + 2vx't' + \frac{v^2}{c^2}x'^{\,2} - x'^{\,2} - 2vx't' - v^2t'^{\,2}\right) = \\ &= \gamma^2\left(c^2t'^{\,2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - x'^{\,2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = c^2t'^{\,2} - x'^{\,2} = \left(\Delta s'\right)^2\end{aligned}$$

A więc jeśli $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = b$ to również $c^2\Delta t'^{\,2} - \Delta x'^{\,2} = b$, dla dowolnego b.

Wielkość Δs nazywamy niezmienniczym interwałem czasoprzestrzennym.

Przykład: (dylatacja czasu) Rozważmy dwa zdarzenia zachodzące w początku układu S' w odstępie czasu t'.

$$\left.\begin{aligned} S' &: (x', t') = (0, t') \\ S &: \ (x, t) = (vt, t) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad c^2t'^{\,2} - 0 = c^2t^2 - v^2t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma t'$$

Interpretacja fizyczna interwału Δs^2

- $\Delta s^2 > 0$ (zdarzenia rozdzielone 'czasopodobnie')
  Ponieważ $c^2t^2 > x^2$ więc istnieje takie $|v| = |x/t| < c$ dla którego $x' = \gamma(x - vt) = 0$, czyli istnieje S' w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu, a wielkość $\Delta s/c = t'$ jest czasem własnym.
- $\Delta s^2 < 0$ (zdarzenia rozdzielone 'przestrzennopodobnie')
  Ponieważ $c^2t^2 < x^2 \quad \Rightarrow \quad |t/x| < 1/c$, więc istnieje takie $v = c^2t/x < c$, że $t' = \gamma(t - vx/c^2) = 0$, czyli istnieje S' w którym oba zdarzenia są jednoczesne, a wielkość $|\Delta s|$ jest długością własną ($\Delta s^2 = c^2t'^2 - x'^2 = -x'^2$).
- $\Delta s^2 = 0$ (świetlny, zerowy)
  Ponieważ $c^2t^2 = x^2$ więc $|x/t| = c$ w każdym układzie. A więc nie istnieje układ w którym oba zdarzenia byłyby jednoczesne lub zachodziły w tym samym miejscu (układ taki musiałby poruszać się z prędkością światła).

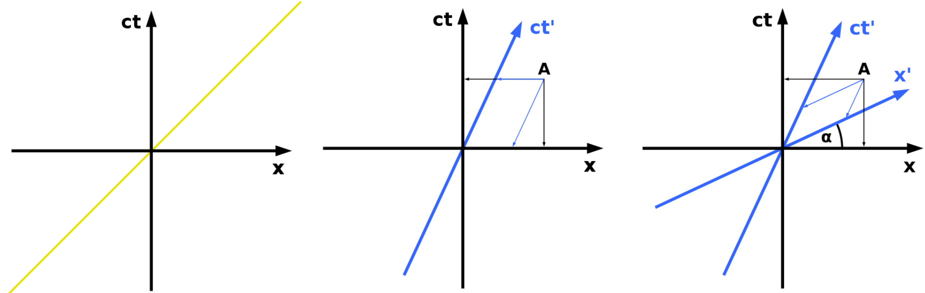
Przykład: Czy można znaleźć taki układ w którym Chrzest Polski i Bitwa pod Grunwaldem zaszłyby (a) w tym samym miejscu, (b) w tym samym czasie?

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \approx 200 \text{ km} \\ t_1 - t_2 = 1410 - 966 = 444 \text{ lata} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta s^2 = 17.6 \cdot 10^{36} - 4 \cdot 10^{10} > 0$$

Interwał jest czasopodobny, więc istnieje więc taki układ w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu. Układ taki porusza się od miejsca Chrztu do miejsca Bitwy z predkością $v = (200 \text{ km})/(444 \text{ lata})$.

Diagramy czasoprzestrzenne

Współrzedne (t, x) dowolnego zdarzenia P przyjmują różne wartości w różnych układach odniesienia. Do opisu konieczna jest znajomość praw transformacyjnych.



Linia świata światła | Transformacja Galileusza | Transformacja Lorentza

t' – linia świata punktu O w układzie (x, t),

x' – prosta równoległa do dowolnej prostej łączacej zdarzenia jednoczesne i przechodząca przez punkt $t' = 0$.

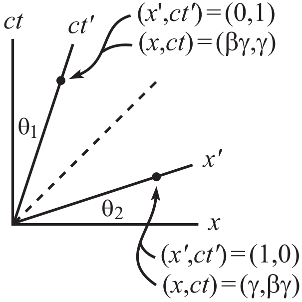
Diagramy Minkowskiego - jednostki

- Kąt nachylenia i jednostka osi ct':

$$(x', ct') = (0, 1) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x = \gamma\,(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + vx'/c^2\right) \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad (x, ct) = (\gamma v/c, \gamma)$$

A więc kąt nachylenia dany jest przez $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{x}{ct} = \dfrac{v}{c} = \beta$

'Na papierze': $\dfrac{1 \text{ jednostka } ct'}{1 \text{ jednostka } ct} = \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$



- Kąt nachylenia i jednostka osi x':

$$(x', ct') = (1, 0) \quad \Rightarrow \quad (x, ct) = (\gamma, \gamma v/c)$$

A więc kąt nachylenia dany jest przez:

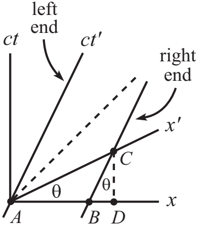
$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{ct}{x} = \frac{v}{c} = \beta$$

'Na papierze': $\dfrac{1 \text{ jednostka } x'}{1 \text{ jednostka } x} = \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$

Jednostkową długość na osi współrzędnej x wyznaczają punkty przecięcia z hiperbolą: $x^2 - c^2t^2 = 1$

Diagramy Minkowskiego - przykład

Przykład: (skrócenie długości) Rozważmy pręt o długości 1 m spoczywający w układzie S'. Chcemy znaleźć długość pręta w układzie S.



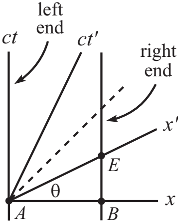
S': $AC = 1$ m

S: $AC = \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ – długość ‘na papierze’

$$AB = AD - BD = (AC)\cos\theta - (AC)\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta =$$

$$= (AC)\cos\theta\left(1 - \mathrm{tg}^2\,\theta\right) = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}\,\frac{1-\beta^2}{\sqrt{1+\beta^2}} = \sqrt{1-\beta^2}$$

Przykład: (skrócenie długości) Rozważmy pręt o długości 1 m spoczywający w układzie S. Chcemy znaleźć długość pręta w układzie S'.



S: $AB = 1$ m

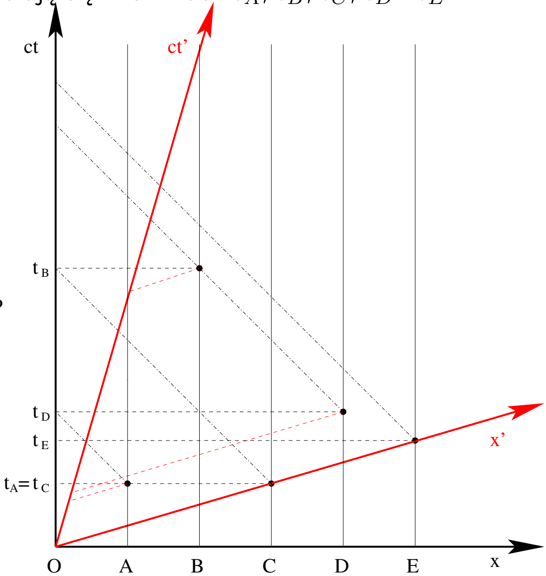
S': $AE = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\beta^2}$ – długość ‘na papierze’

Ponieważ jednostka na osi x' ma długość $\dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, więc w jednostkach osi x' dugość AE wynosi $\sqrt{1-\beta^2}$.

Względność równoczesności - przykład

Lampy A, B, C, D, E umieszczono w równych odstępach wzdłuż osi x. W układzie w którym spoczywają, zapalają się w chwilach t_A, t_B, t_C, t_D i t_E.

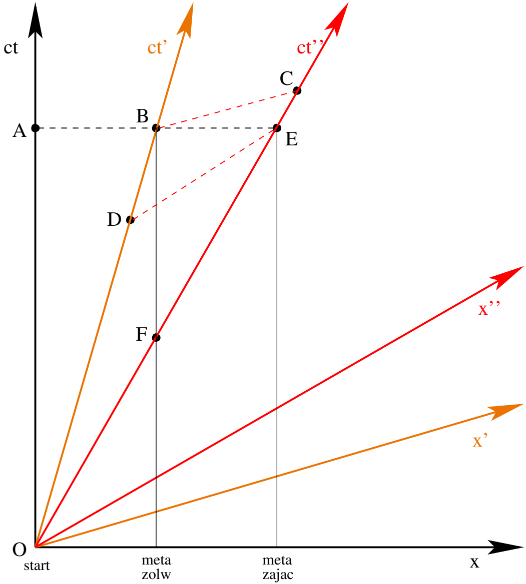
- Jaka jest kolejność zapalania się lamp w układach S i S'?
- W jakiej kolejności światło lamp dociera do obserwatorów O i O'?
- Gdzie znajduje się obserwator O' w chwili gdy dociera do niego światło lampy D?



Zając i żółw startują z tego samego miejsca, jednak meta dla żółwia jest o połowę bliżej niż dla zająca.

Sędzia znajdujący się w spoczynku względem gruntu stwierdza remis.

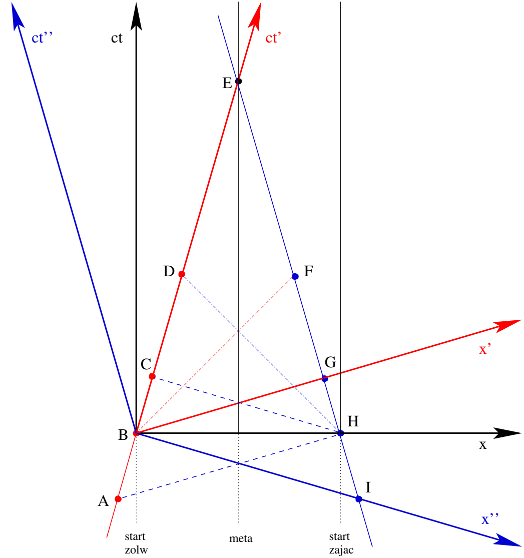
- Które punkty oznaczają przekroczenie mety odpowiednio przez zająca i żółwia?
- W momencie gdy jedno z nich przekracza linie mety, gdzie znajduje się drugie?
- Kto wygrał według zająca?
- Czy żółw sie zgadza się z zającem?



Wyścig żółwia z zającem II

Zając i żółw startują naprzeciw siebie i kończą wyścig na wspólnej linii mety, mając do przebycia jednakowe odległości.

Sędzia znajdujący się w spoczynku względem gruntu stwierdza, że obaj wystartowali jednocześnie oraz że jednocześnie przekroczyli linię mety.



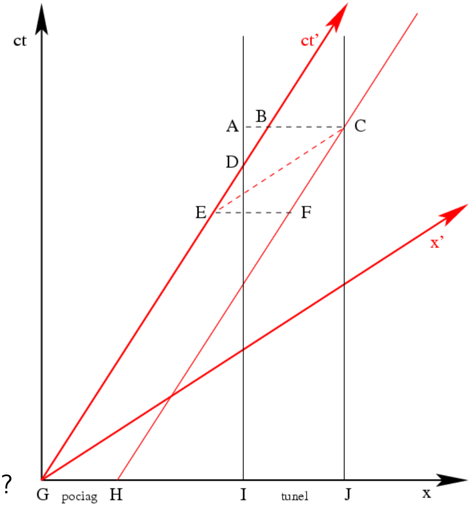
Podaj lokalizacje zdarzeń:

- żółw przekracza linię startu,
- gdzie wtedy (w układzie żółwia) znajduje się zając?
- zając widzi start żółwia,
- czy zgadzają się z sędzią co do równoczesnego przekroczenia linii startu i mety?

Pociąg przejeżdżający przez tunel

Pociąg i tunel mają jednakowe długości własne L_0, oraz względną prędkość v.

- W którym punkcie początek pociągu opuszcza tunel?
- W którym punkcie koniec pociągu wjeżdża do tunelu?
- W którym punkcie znajduje się koniec pociągu, w układzie związanym z pociągiem, w chwili gdy początek pociągu opuszcza tunel?
- W którym punkcie znajduje się początek pociągu, w układzie związanym z tunelem, kiedy koniec pociągu wjeżdża do tunelu?
- Czy pociąg zmieści się w tunelu, w układzie związanym z tunelem? A w układzie związanym z pociągiem?



Efekt Dopplera - klasyczny

Fala rozchodząca się względem ośrodka z prędkością w wysyłana jest przez źródło Z, poruszające się z prędkością u_1 w kierunku odbiornika O, który porusza się w tym samym kierunku co zródło z prędkością u_2. Źródło wysyła impulsy o okresie $\tau = 1/f$. Jaka jest częstość f' impulsów rejestrowanych przez odbiornik?

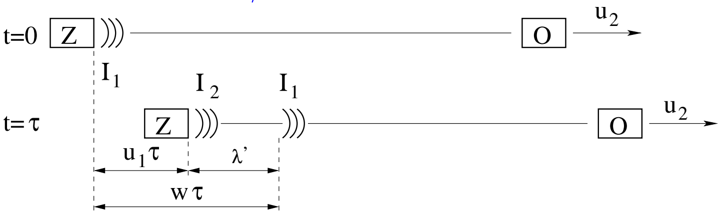
$$\lambda' = (w - u_1)\,\tau$$

$$\tau' = \frac{\lambda'}{w - u_2} = \tau\frac{w - u_1}{w - u_2} \quad \Rightarrow \quad f' = f\frac{w - u_2}{w - u_1}$$

Szczególne przypadki:

$$f' = f\left(1 - \frac{v}{w}\right) \quad \text{gdy} \quad u_1 = 0,\ u_2 = v$$

$$f' = \frac{f}{1 + v/w} \quad \text{gdy} \quad u_1 = -v, u_2 = 0$$



Relatywistyczny efekt Dopplera - podłużny

W układzie S źródła ($\tau \equiv T_0 = 1/f_0$):

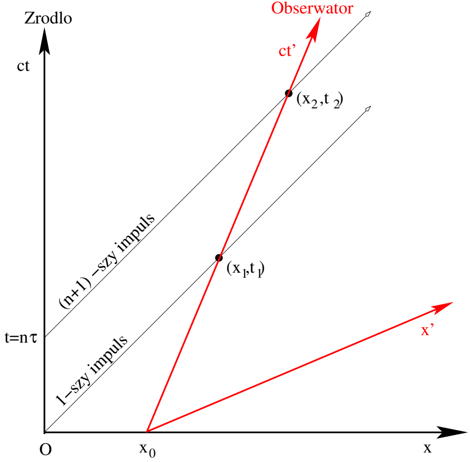
$$\begin{aligned} x_1 &= ct_1 = x_0 + vt_1 \\ x_2 &= c(t_2 - n\tau) = x_0 + vt_2 \end{aligned}$$

skąd

$$t_2 - t_1 = \frac{cn\tau}{c-v} \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \frac{vcn\tau}{c-v}$$

W układzie S' obserwatora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= T \equiv \tau' \equiv \frac{t_2' - t_1'}{n} = \\ &= \frac{1}{n}\gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = \\ &= \gamma\left(\frac{c\tau}{c-v} - \frac{v}{c^2}\frac{vc\tau}{c-v}\right) = \gamma(1+\beta)\tau \end{aligned}$$



A więc $\quad f = f_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$

Relatywistyczny efekt Dopplera - podłużny

To samo z innej perspektywy.

W układzie Obserwatora:

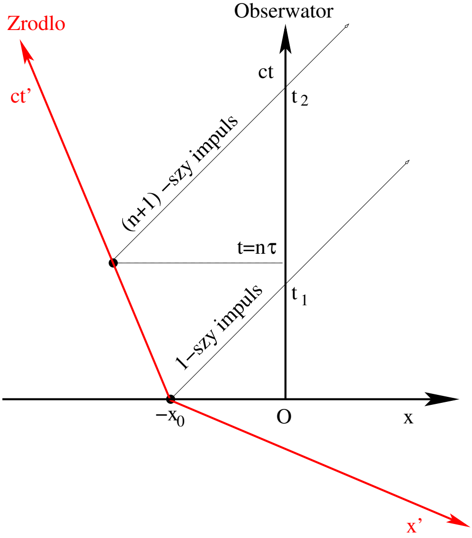
$$0 = -x_0 + ct_1$$
$$0 = -x_0 - vn\tau + c(t_2 - n\tau)$$

skąd $t_2 - t_1 = n\tau(1+\beta)$

Dylatacja czasu daje $\tau = \gamma\tau'$, więc

$$T \equiv \frac{t_2 - t_1}{n} = \gamma\tau'(1+\beta) = T_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

A więc $f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$



Wniosek:

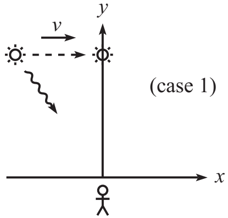
- $\beta > 0$ - przesunięcie "ku czerwieni"
- $\beta < 0$ - przesunięcie "ku fioletowi"

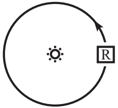
Wniosek: W przypadku relatywistycznym nie ma znaczenia czy porusza się źródło czy odbiornik - nie istnieje eter (odpowiednik powietrza dla fal dźwiękowych).

Relatywistyczny efekt Dopplera - poprzeczny

- Jaką częstotliwość obserwujemy gdy źródło (S') znajduje się w najmniejszej odległości od obserwatora (S)?

Z punktu widzenia źródła S', obserwator porusza się z prędkością v przecinając oś y' w chwili gdy fotony wyemitowane przez źródło wpadają do jego oczu $(S:\ T,\ S':\ T_0)$:

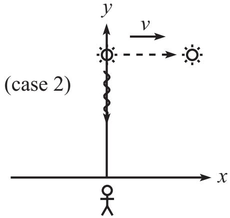


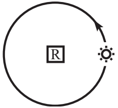


$$T = \frac{T_0}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{f_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Jaką częstotliwość obserwujemy gdy źródło S' widzimy w najmniejszej odległości od obserwatora S?

Fotony do oczu obserwatora S biegną wzdłuż osi y. Kiedy obserwator widzi, że źródło S' przecina oś y, widzi też błyski o mniejszej częstotliwości niż emitowane przez źródło:





$$T = \gamma T_0 \quad \Rightarrow \quad f = f_0\sqrt{1-\beta^2}$$