Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 3

Paradoks bliźniąt

Paradoksy w teorii względności oznaczają pozorną sprzeczność pomiędzy wynikami doświadczeń w zależności od obserwatora.

Schemat doświadczenia leżącego u podstaw paradoksu bliźniąt:

- Dwóch obserwatorów A i B przeprowadza eksperyment związany z dylatacją czasu.
- Synchronizują identyczne zegary (w tym samym układzie odniesienia).
- Nastepnie A wybiera się w podróż w rakiecie z predkością v poruszając się w wybranym kierunku przez okres czasu $T_A/2$, a następnie zawraca i po czasie $T_A/2$ wraca na Ziemię, gdzie został jego kolega B.
- Obserwator B mierząc czas podróży T_B na swoim zegarze jest w stanie przewidzieć czas T_A zmierzony przez obserwatora A: $T_B = \gamma T_A$.

Paradoks, czyli pozorna sprzeczność, pojawia się gdy obserwator A twierdzi, że to B poruszał się względem niego najpierw z prędkością $-v$, a nastepnie z prędkością v, i w związku z tym $T_A = \gamma T_B$.

Rozwiązanie: Obserwator A doznaje przyspieszenia podczas zawracania, co łamie symetrię pomiędzy A i B, co oznacza, że to A był wpodróży, a nie B.

Paradoks bliźniąt - efekt Dopplera $f = f_0\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$

Każdy z obserwatorów wysyła do drugiego sygnały w równych odstępach czasu własnego ($1/f_0$). Po zakończeniu podróży porównują zliczenia.

	Obserwator B	Obserwator A
Całkowity czas podróży:	$T_B = \frac{2L}{v}$	$T_A = \frac{2L}{\gamma v}$
Liczba wysłanych sygnałów:	$f_0 T_B = \frac{2f_0 L}{v}$	$f_0 T_A = \frac{2f_0 L}{\gamma v}$
Kiedy widzi moment zawracania obserwatora A:	$t_{B1} = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = \frac{L}{v}(1+\beta)$	$t_{A1} = \frac{L}{\gamma v}$
Liczba odebranych sygnałów o częstości $f' = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$	$f' t_{B1} = \frac{f_0 L}{v}\sqrt{1-\beta^2}$	$f' t_{A1} = \frac{f_0 L}{v}(1-\beta)$
Pozostały czas podróży:	$t_{B2} = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = \frac{L}{v}(1-\beta)$	$t_{A2} = \frac{L}{\gamma v}$
Liczba odebranych sygnałów o częstości $f'' = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$	$f'' t_{B2} = \frac{f_0 L}{v}\sqrt{1-\beta^2}$	$f'' t_{A2} = \frac{f_0 L}{v}(1+\beta)$
Całk. liczba odebranych sygn.:	$\frac{2f_0 L}{v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2f_0 L}{\gamma v}$	$\frac{2f_0 L}{v}$
Wniosek o upływie czasu zmierzonego przez drugiego obserw.	$T_A = \frac{2L}{\gamma v}$	$T_B = \frac{2L}{v}$

Każdy z obserwatorów odbiera tyle sygnałów ile drugi wysłał pomiędzy początkiem i końcem podróży. Obydwoje zgadzają się co do zmierzonych upływów czasu.

Paradoks bliźniąt - przykład

Podróż z Ziemi na Canopus:

$$L = 99 \text{ ly} \quad v = \frac{99}{101}c \quad \gamma = \frac{101}{20}$$

$$\frac{1}{2}T_A = 20 \text{ lat} \qquad \frac{1}{2}T_B = 101 \text{ lat}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{1}{2}T_A$$

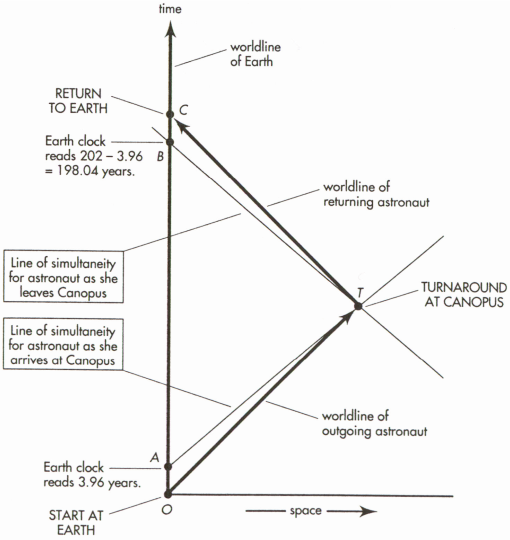
$$\Rightarrow \quad t = 0.98x + 3.96$$

Podróż z Canopus na Ziemię:

$$t'' = \gamma\left(t + \frac{v(x-198)}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad t'' = \frac{1}{2}T_A$$

$$\Rightarrow \quad t = -0.98x + 198.04$$



Obaj obserwatorzy A (rakieta) i B (Ziemia) zgadzają się co do tego, że A jest młodszy od B.

Ruch przyspieszony

Cząstka porusza się z prędkością $u'(t')$ względem układu S', który porusza się z prędkością v względem układu S:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \Rightarrow \mathrm{d}u_x = \frac{\mathrm{d}u'_x}{1 + vu'_x/c^2} - \frac{u'_x + v}{\left(1 + vu'_x/c^2\right)^2} \frac{v\mathrm{d}u'_x}{c^2} = \frac{\mathrm{d}u'_x}{\gamma^2 \left(1 + vu'_x/c^2\right)^2}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + vu'_x/c^2\right)} \Rightarrow \mathrm{d}u_y = \frac{\mathrm{d}u'_y}{\gamma \left(1 + vu'_x/c^2\right)} - \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + vu'_x/c^2\right)^2} \frac{v\mathrm{d}u'_x}{c^2}$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) \Rightarrow \mathrm{d}t = \gamma(\mathrm{d}t' + v\mathrm{d}x'/c^2) = \gamma(1 + vu'_x/c^2)\mathrm{d}t'$$

Transformacja przyspieszenia w kierunku wzajemnego ruchu układów i do niego prostopadłym:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u'_x/\mathrm{d}t'}{\gamma^3 \left(1 + vu'_x/c^2\right)^3} = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + vu'_x/c^2\right)^3}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = \frac{a'_y}{\gamma^2 \left(1 + vu'_x/c^2\right)^2} - \frac{(vu'_y/c^2)a'_x}{\gamma^2 \left(1 + vu'_x/c^2\right)^3}$$

Cząstka znajdująca się chwilowo w spoczynku w S' doznaje w S przyspieszeń pomniejszonych o czynniki γ^3 (w kierunku x) oraz γ^2 (w kierunku y) w stosunku do przyspieszeń w S'.

Pospieszność (rapidity)

Definicja: Pospiesznością (rapidity) nazywamy wielkość α zdefiniowaną jako $\mathrm{tgh}\,\alpha \equiv \beta = \dfrac{v}{c}$

$\sinh\phi = \frac{1}{2}(e^{\phi} - e^{-\phi})$

$\cosh\phi = \frac{1}{2}(e^{\phi} + e^{-\phi})$

$\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$

$\mathrm{tgh}\,\phi = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{e^{\phi} + e^{-\phi}}$

Prawo dodawania prędkości:

$$\mathrm{tgh}\,\alpha = \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{\mathrm{tgh}\,\alpha_1 + \mathrm{tgh}\,\alpha_2}{1 + \mathrm{tgh}\,\alpha_1\,\mathrm{tgh}\,\alpha_2} = \mathrm{tgh}\,(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

Wielkości γ i $\beta\gamma$:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{tgh}^2\,\alpha}} = \cosh\alpha$$

$$\gamma\beta \equiv \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathrm{tgh}\,\alpha}{\sqrt{1 - \mathrm{tgh}^2\,\alpha}} = \sinh\alpha$$

Wielkość jednostki na osiach x' i ct':

$$\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1 + \mathrm{tgh}^2\,\alpha}{1 - \mathrm{tgh}^2\,\alpha}} = \sqrt{\cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha} = \sqrt{\cosh 2\alpha}$$

Pospieszność

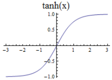
Przykład: Z rakiety wystrzelonej z Ziemi, po osiągnięciu przez nią prędkości V względem Ziemi, zostaje wystrzelona kolejna rakieta, z której po osiągnięciu przez nią prędkości V (względem rakiety z której została wystrzelona), zostaje wystrzelona kolejna rakieta, itd. Znajdź prędkość n-tej rakiety względem Ziemi.

Z prawa dodawania współliniowych prędkości mamy:

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \alpha_1 = \left\{ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \right\} = 2\alpha \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \operatorname{arctgh} \frac{V}{c} \equiv \operatorname{arctgh} \beta$$

$$\frac{V_2}{c} = \operatorname{tgh} \alpha_2 = \operatorname{tgh} 2\alpha = \operatorname{tgh}(2 \operatorname{arctgh} \beta) \quad \Rightarrow \quad V_n = c \operatorname{tgh}(n \operatorname{arctgh} \beta)$$

Widać, że $V_n \to c$ dla $n \to \infty$.



Definicja: (przyspieszenie własne) Niech t będzie czasem mierzonym w układzie rakiety (czasem własnym). Przyspieszenie własne rakiety wynosi a jesli w chwili $t + \mathrm{d}t$ rakieta porusza się z prędkoscią $a \cdot \mathrm{d}t$ względem układu w którym znajdowała się w chwili t.

Inaczej: astronauta odczuwa siłę działającą na swoje ciało równą ma.

Pospieszność - interpretacja fizyczna

Przykład: Jaka jest względna prędkość rakiety względem układu LAB po czasie t jeśli rakieta wystartowała w chwili $t = 0$ z przyspieszeniem własnym a?

Rozważając sytuację w dwóch bliskich chwilach czasu, a następnie stosując wyrażenie na dodawanie predkości i zachowując jedynie wyrazy wiodące $(\mathrm{d}t)$ otrzymujemy:

$$v(t+dt) = \frac{v(t) + a\mathrm{d}t}{1 + v(t)adt} \approx (v(t) + a\mathrm{d}t)(1 - v(t)adt) \approx v(t) + a(1-\beta^2)dt$$

$$\frac{dv}{dt} = a(1-\beta^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_0^v \left(\frac{1}{1-v/c} + \frac{1}{1+v/c}\right) dv = a\int_0^t dt$$

$$v(t) = c\left(\frac{\exp\left(2at/c\right) - 1}{\exp\left(2at/c\right) + 1}\right) = c\,\mathrm{tgh}\,\frac{at}{c}$$

Ogólnie, dla ruchu niejednostajnie zmiennego, tzn. $a(t)$, mamy:

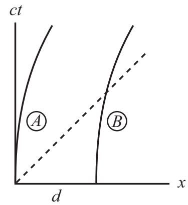
$$v(t) = c\,\mathrm{tgh}\left(\frac{1}{c}\int_0^t a(t)dt\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \frac{1}{c}\int_0^t a(t)dt$$

Przyspieszenie i dylatacja czasu

Przykład: Dwie osoby, A i B, znajdujące się początkowo w odległości d, w pewnej chwili zaczynają jednocześnie (względem obs. C) poruszać się z przyspieszeniem własnym a, w tym samym kierunku wzdłuż linii ich łączącej. Jaki upływ czasu stwierdzi każdy z nich na zegarze drugiego?

Po upływie infinitezymalnego czasu Δt (w układzie C):

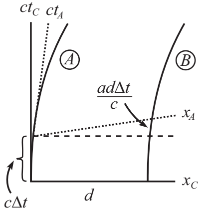
- A i B poruszają się z prędkosciami $a\,\Delta t$,
- A i B przebyli odległość $a(\Delta t)^2/2 \to 0$,
- efekty dylatacji czasu pomiędzy dowolnymi z układów A, B i C są zaniedbywalne ($\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \to 1$).



W chwili Δt (w układach C i A), A robi małą eksplozję E_1.

Oś x_A (teraźniejszość w A) przecina linię świata B w

$$c\Delta t + ad\Delta t/c + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$



Ponieważ $t_B = t_C$, więc $\Delta t_B = \Delta t(1 + ad/c^2)$.

A więc A widzi zegar B spieszący o czynnik:

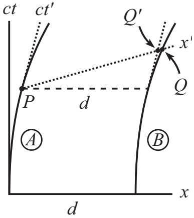
$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 + \frac{ad}{c^2} \qquad \left(\text{podobnie} \quad \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = 1 - \frac{ad}{c^2}\right)$$

Przyspieszenie i odległość

Przykład: Dwa statki kosmiczne znajdujące się względem siebie w spoczynku, połączone są linką, o skończonej wytrzymałości. W pewnej chwili oba statki, jednocześnie, zaczynają poruszać się z przyspieszeniem własnym a, wzdłuż linii je łączacej i w tym samym kierunku. Czy linka się zerwie czy nie?

Obserwator C: odległość pomiędzy A i B jest stała ($= d$), a więc w układach A lub B odległość ta musi być większa, ponieważ $d = d'/\gamma$.
Wniosek: linka się zerwie.

Obserwator A (B): B (A) robi dokładnie to samo co A (B), a więc powinien pozostać w stałej odległości od A (B).
Wniosek: linka się nie zerwie.



Błąd w rozumowaniu A (B): A i B są w różnych układach. Wiemy, że czas w B biegnie dla A szybciej niż w A. Dlatego silnik B pracuje szybciej niż A i odległość pomiędzy nimi wzrasta.

Uzupełnienie wyjaśnienia w A: PQ - długość linki w A, $PQ > PQ' = \gamma d$
A więc $PQ > \gamma d > d$ - czyli linka sie zerwie.

Upływ czasu w układzie przyspieszającym

Przykład: Statek kosmiczny (S') znajduje się początkowo w spoczynku w układzie laboratoryjnym (S). W pewnej chwili ($t = t' = 0$) zaczyna poruszać się z przyspieszeniem własnym a. Po pewnym czasie obserwator S mierzy czasy t i t'. Jaka jest relacja między nimi?

W układzie S' mamy: $\beta(t') = \dfrac{v(t')}{c} = \mathrm{tgh}\left(\dfrac{at'}{c}\right)$

W układzie S na skutek dylatacji czasu mamy:

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^{t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\beta(t')^2}} = \int_0^{t'} \cosh\left(\frac{at'}{c}\right)\mathrm{d}t' = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{at'}{c}\right)$$

Dla $at'/c \ll 1$ otrzymujemy $t \approx t'$

Dla $at'/c \gg 1$ otrzymujemy $t \approx \dfrac{c}{2a}\exp\left(\dfrac{at'}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad t' = \dfrac{c}{a}\ln\left(\dfrac{2at}{c}\right)$

Czynności wykonywane przez astronautę, w układzie LAB będą trwały znacznie (eksponencjalnie) dłużej.