Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

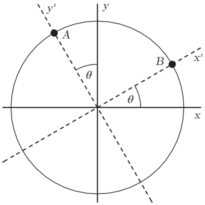
Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 4

Związek Transformacji Lorentza (TL) z obrotami

Rozwżamy dwa układy kartezjańskie S i S', o wspólnym początku i obrócone względem siebie o kat θ:



$$\begin{array}{llll} S: & P(w,x) & w = r\cos\phi & x = r\sin\phi \\ S': & P(w',x') & w' = r\cos(\phi-\theta) & x' = r\sin(\phi-\theta) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} w' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\phi\,\cos\theta + r\sin\phi\,\sin\theta \\ r\sin\phi\,\cos\theta - r\cos\phi\,\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \end{bmatrix}$$

Operacja obrotu w układzie kartezjańskim zachowuje długość:

$$r'^2 = x'^2 + w'^2 = (x^2+w^2)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = x^2 + w^2 = r^2$$

Stosując podstawienia $w = ict$ oraz $w' = ict'$ otrzymujemy transformacje Lorentza (kąt θ staje się urojony):

$$\left.\begin{array}{c} ct' = ct\cos\theta + \dfrac{x}{i}\sin\theta \\ x' = x\cos\theta - ict\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos\theta = \gamma \\ \sin\theta = -i\gamma\beta \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

$$s'^2 = (ct')^2 - x'^2 = \left((ct)^2 - x^2\right)\left(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2\right) = (ct)^2 - x^2 = s^2$$

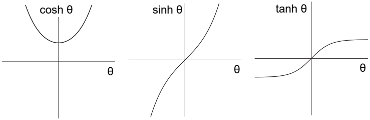
TL jako funkcje hiperboliczne

Stosujemy podstawienie $\theta = i\alpha$:

$$\left.\begin{aligned} ct' &= ct\cos i\alpha + \frac{x}{i}\sin i\alpha = ct\cosh\alpha - x\sinh\alpha \\ x' &= x\cos i\alpha - ict\sin i\alpha = x\cosh\alpha - ct\sinh\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \cosh\alpha &= \gamma \\ \sinh\alpha &= \gamma\beta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tgh}\alpha = \beta$$

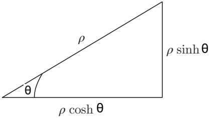
Transformacje Lorentza można zapisać za pomocą obrotu hiperbolicznego:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$



A stąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} ct' + x' = (\cosh\alpha - \sinh\alpha)(ct + x) = \mathrm{e}^{-\alpha}(ct + x) \\ ct' - x' = (\cosh\alpha + \sinh\alpha)(ct - x) = \mathrm{e}^{\alpha}(ct - x) \end{cases}$$

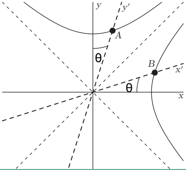


$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

Dwie sukcesywne transformacje Lorentza:

$$ct' - x' = \mathrm{e}^{\alpha_1}(ct - x)$$

$$ct'' - x'' = \mathrm{e}^{\alpha_2}(ct' - x') = \mathrm{e}^{\alpha_1 + \alpha_2}(ct - x)$$



Ogólne transformacje Lorentza

Każde prawo fizyczne, które jest niezmiennicze względem standardowych TL, obrotów oraz przesunięć w przestrzeni i przesunięć w czasie, jest również niezmiennicze względem dowolnych układów inercjalnych.

Ogólne transformacje pomiędzy dwoma inercjalnymi układami odniesienia składają się z nastepujących etapów:

1. Obrotu i przesunięcia w przestrzeni tak aby oś x układu S pokryła się z kierunkiem ruchu układu S',
2. Przesuniącia w czasie tak aby początki układów spełniały $t = t' = 0$,
3. Standardowych transformacji Lorentza,
4. Obrotu w przestrzeni i przesunięcia w czasie tak aby wrócić do wyjściowego układu S'.

Ograniczając wymiary przestrzenne do dwóch i zaniedbując przesunięcia, mamy:

$$L(\vec{\beta}) = A_2(-\theta) L_1(\beta) A_1(\theta)$$

gdzie:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad L_1(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ogólne transformacje Lorentza

Stosując oznaczenia, $\beta_x = \beta \cos\phi$ oraz $\beta_y = \beta \sin\phi$ dostajemy:

$$L(\beta_i) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x^2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x\beta_y \\ -\gamma\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x\beta_y & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_y^2 \end{pmatrix}$$

Uwzględniając pominiętą współrzędną z, pełną transformację Lorentza można zapisać w postaci macierzowej blokowej w postaci:

$$L(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}\vec{\beta}^T \end{pmatrix}$$

Transformacja współrzędnych czasowej i przestrzennych czterowektora:

$$\begin{pmatrix} A_0' \\ \vec{A}' \end{pmatrix} = L(\vec{\beta}) \begin{pmatrix} A_0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_0' = \gamma(A_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{A}) \\ \vec{A}' = \vec{A} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{A})\vec{\beta} - \gamma A_0\vec{\beta} \end{cases}$$

Ogólne TL dla czasu i współrzędnych przestrzennych mają postać:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \vec{\beta}\cdot\vec{r}) \\ \vec{r}' &= \vec{r} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\vec{\beta} - \gamma t\vec{\beta} \end{aligned}$$

Własności czterowektorów

Iloczyn skalarny czterowektorów:

$$A \cdot B \equiv A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \equiv A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

W szczególności: $A^2 \equiv A \cdot A \equiv A_0 A_0 - A_1 A_1 - A_2 A_2 - A_3 A_3 \equiv A_0^2 - |\vec{A}|^2$

Iloczyn skalarny czterowektorów jest niezmienniczy wzgledem TL:

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 = \\
&= \gamma(A_0' + \beta A_1')\,\gamma(B_0' + \beta B_1') - \gamma(A_1' + \beta A_0')\,\gamma(B_1' + \beta B_0') - A_2' B_2' - A_3' B_3' = \\
&= A_0' B_0' (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) - A_1' B_1' (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) - A_2' B_2' - A_3' B_3' = \\
&= A_0' B_0' - A_1' B_1' - A_2' B_2' - A_3' B_3' = A' \cdot B'
\end{aligned}$$

Kombinacja liniowa czterowektorów jest czterowektorem:

$$\begin{aligned}
C_0 &\equiv (aA + bB)_0 = aA_0 + bB_0 = a\gamma(A_0' + \beta A_1') + b\gamma(B_0' + \beta B_1') = \\
&= \gamma(aA_0' + bB_0') + \beta\gamma(aA_1' + bB_1') \equiv \gamma(C_0' + \beta C_1') \\
C_1 &\equiv (aA + bB)_1 = \ldots = \gamma(C_1' + \beta C_0')
\end{aligned}$$

Twierdzenie: Jeśli jedna ze składowych czterowektora jest równa zero we wszystkich układach odniesienia, to wszystkie jego składowe sa równe zero we wszystkich układach odniesienia.

Charakterystyczne układy odniesienia

Czterowektory dzielimy na czasopodobne, przestrzennopodobne i zerowe w zależności od tego czy ich długość jest dodatnia, ujemna lub zerowa.

- układ własny czterowektora czasopodobnego

Ponieważ $A_0^2 - \vec{A}^{\,2} > 0$ w układzie S, więc istnieje układ S' w którym składowe przestrzenne są równe zero:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \gamma A_0' \\ \vec{A} &= \gamma\vec{\beta}A_0' \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{A_0}{A_0'}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{A}}{A_0}$$

W układzie własnym czterowektora czasopodobnego $A^\mu A_\mu = A_0'^{\,2}$, a więc składowa A_0' nie jest tylko składową czterowektora, ale jest niezmiennikiem.

- układ charakterystyczny czterowektora przestrzennopodobnego

Ponieważ $B_0^2 - \vec{B}^2 < 0$ w układzie S, więc istnieje układ S' w którym składowa czasowa jest równa zero:

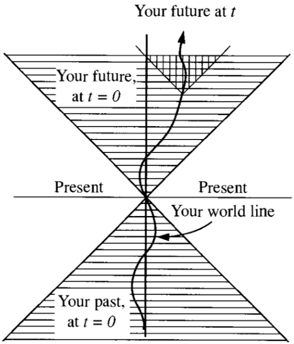
$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{B}' \\ \vec{B} &= \vec{B}' + \tfrac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{B}')\vec{\beta} \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{B_0}{B_\parallel}$$

Ponieważ określona jest jedynie wartość β więc istnieje nieskończenie wiele takich układów.

Czterowektor prędkości

Element czasu własnego:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2}} \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$



Czterowektor prędkości (cztero-prędkość):

$$\mathrm{v}^\mu \equiv \frac{d\mathrm{x}^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\mathrm{x}^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

W układzie spoczynkowym cząstki mamy:

$$\mathrm{v}^{\mu\,\prime} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{x}^{\mu\,\prime}}{\mathrm{d}\tau} = \begin{pmatrix} c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

A więc: $\mathrm{v}\cdot\mathrm{v} \equiv \mathrm{v}^\mu \mathrm{v}_\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$

Przykład: Cząstka porusza się w S po okręgu o promieniu r i środku w początku układu S ze stałą prędkością v. Znajdź czterowektor prędkości cząstki w S' poruszającym się względem S z prędkością u w standardowej konfiguracji.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\omega t = r\cos\left(\tfrac{vt}{r}\right) \\ y &= r\sin\omega t = r\sin\left(\tfrac{vt}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} v_x &= -v\sin\left(\tfrac{vt}{r}\right) \\ v_y &= v\cos\left(\tfrac{vt}{r}\right) \end{aligned}\right.$$

A więc: $\mathrm{v}_\mu = (\gamma_v c,\, \gamma_v v_x,\, \gamma_v v_y,\, 0)_S$

Czterowektor prędkości

W układzie S' mamy: $\mathrm{v}'_\mu = (\gamma' c, \gamma' v'_x, \gamma' v'_y, 0)_{S'}$ gdzie

$$\gamma' c = \gamma_u \left(\gamma_v c - \frac{u}{c} \gamma_v v_x \right) = \gamma_u \gamma_v c \left(1 - \frac{u v_x}{c^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \gamma' = \gamma_u \gamma_v Q, \quad Q \equiv 1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{Q} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_u Q}$$

Równania orbity cząstki w funkcji czasu własnego $(\tau = t/\gamma)$:

$$\begin{cases} x = r \cos\left(\dfrac{v\gamma\tau}{r}\right) \\ y = r \sin\left(\dfrac{v\gamma\tau}{r}\right) \end{cases}$$

Korzystając z tych równań, czterowektor prędkości można wyznaczyć z definicji.

Możemy też najpierw przejść do układu S' i wyznaczyć v'_μ bezpośrednio w S':

$$ct' = \gamma_u \left(ct - \frac{u}{c} x \right), \quad x' = \gamma_u (x - ut), \quad y' = y$$

$$dt' = \gamma_u \left(dt - \frac{u}{c^2} v_x dt \right) = \gamma_u Q dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma_u Q}$$

A stąd:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - u v_x / c^2} = \frac{-1}{Q} \left[v \cos\left(\frac{vt}{r}\right) + u \right]$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_y}{\gamma_u (1 - u v_x / c^2)} = \frac{1}{\gamma_u Q} \left[v \sin\left(\frac{vt}{r}\right) \right]$$

Relatywistyczne składanie trój-prędkości

Rozważmy czterowektory prędkości tej samej cząstki w układach S i S' w standardowej konfiguracji ($\vec{u}$ to prędkość S' względem S):

$$\mathrm{v}^{\mu} = (\gamma_v c,\, \gamma_v \vec{v}\,)_S, \qquad \mathrm{v}^{\mu\,\prime} = (\gamma_{v'} c,\, \gamma_{v'} \vec{v}\,')_{S'}$$

Współrzędne tych czterowektorów związane są TL:

$$\gamma_{v'} c = \gamma_u \left(\gamma_v c - \frac{\vec{u} \cdot \gamma_v \vec{v}}{c} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_v}{\gamma_{v'}} = \left(\gamma_u \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \right)^{-1} \equiv \frac{1}{\gamma_u Q}$$

$$\gamma_{v'} \vec{v}\,' = \gamma_v \vec{v} + \left[(\gamma_u - 1) \frac{\vec{u} \cdot \gamma_v \vec{v}}{u^2} - \frac{\gamma_u}{c} \gamma_v c \right] \vec{u}$$

Relatywistyczne składanie prędkości w ogólnej postaci ($\vec{v}, \vec{v}\,'$ to prędkości cząstki w układach S i S', $\vec{u}$ to względna prędkość układów):

$$\vec{v}\,' = \frac{1}{\gamma_u Q} \left\{ \vec{v} + \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u^2} (\gamma_u - 1) - \gamma_u \right] \vec{u} \right\}$$

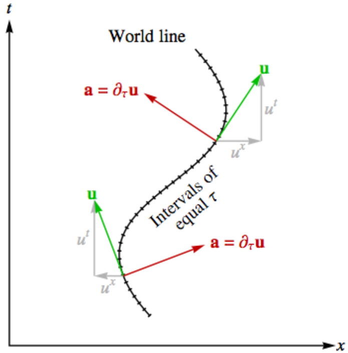
gdzie $\gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v Q$ oraz $Q = 1 - \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}$

Czterowektor przyspieszenia:

$$\mathrm{a}^\mu = \frac{d\mathrm{v}^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}(\gamma c,\, \gamma\vec{v}) = \gamma\left(c\frac{d\gamma}{dt},\, \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt}\right) =$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\gamma^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-2}\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}v^2 = \\ &= \frac{1}{2}\gamma^4\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2} \end{aligned} \right\}$$

$$= \left(\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c},\, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a}\right)$$



Czterowektory prędkości i przyspieszenia cząstki są ortogonalne:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}) = \mathrm{v}\cdot\mathrm{a} = 0$$

Dla $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ mamy $\dot{v} = \dot{v}_x = a_x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = \left(\gamma^4\frac{v_x a_x}{c},\, \gamma^4 a_x,\, \gamma^2 a_y,\, \gamma^2 a_z\right)$

Ruch przyspieszony

Ogólna transformacja dla 3-przyspieszenia:

$$\vec{a}\,' = \frac{1}{\gamma_u^2 Q^3}\left[Q\vec{a} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\,\vec{v} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{u^2}\left(\frac{1}{\gamma_u} - 1\right)\vec{u}\right]$$

gdzie $\vec{a}$, $\vec{a}\,'$ są przyspieszeniami cząstki w układach S i S', $\vec{v}$ jest prędkością cząstki w układzie S, $\vec{u}$ jest prędkością układu S' względem S oraz $Q \equiv 1 - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}$.

Przykład: Transformacja do chwilowego układu spoczynkowego cząstki (dla uproszczenia zakładamy, że cząstka porusza się wzdłuż osi x, tzn. $\vec{u} = (v_x, 0, 0)$):

$$a'_x = \gamma_v^3 a_x, \quad a'_y = \gamma_v^2 a_y, \quad a'_z = \gamma_v^2 a_z$$

Przykład: Cząstka porusza się w układzie laboratoryjnym (LAB) z prędkoscią v po okręgu $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$. Znajdź wektor i czterowektor przyspieszenia w chwili gdy cząstka przecina ujemną oś y, zarówno w układzie LAB jak i w chwilowym układzie spoczynkowym cząstki (osie x', y' są równoległe do x, y).

$S:\quad \vec{a} = (0, v^2/r, 0)$

$$\mathrm{a} = (\gamma^4 \vec{v}\cdot\vec{a},\, \gamma^4(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v} + \gamma^2\vec{a}) = (0, 0, \gamma^2 v^2/r, 0)$$

$S':\quad \mathrm{a}' = \mathrm{a} = (0, 0, \gamma^2 v^2/r, 0)$ (a_2 nie ulega zmianie przy TL wzdłuż osi x)

$\vec{a}\,' = (0, \gamma^2 v^2/r, 0)$