Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

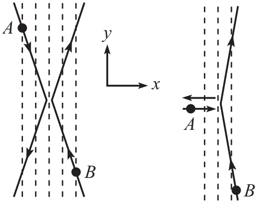
Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 5

Dynamika relatywistyczna: pęd i energia

Rozważamy zderzenie elastyczne dwóch cząstek, A i B, poruszających się w układzie S z równymi i przeciwnie skierowanymi prędkościami, przy czym składowe v_x są małe, a składowe v_y duże. Zderzenie elastyczne zmienia jedynie zwroty prędkości w kierunku osi x:



$$\vec{v}_A^{\,p} = (v_x, -v_y) \qquad \vec{v}_A^{\,k} = (-v_x, -v_y)$$
$$\vec{v}_B^{\,p} = (-v_x, v_y) \qquad \vec{v}_B^{\,k} = (v_x, v_y)$$

To samo zderzenie w układzie S' poruszającym się z prędkością $\vec{u} = (0, -v_y)$:

$$(\vec{v}_A^{\,p})' = \left(\frac{v^p_{A,x}}{\gamma_u(1-uv^p_{A,y})}, \frac{v^p_{A,y}-u}{1-uv^p_{A,y}}\right) = \left(\frac{v_x}{\gamma_u(1-v_y^2)}, 0\right), \quad (\vec{v}_A^{\,k})' = \left(\frac{-v_x}{\gamma_u(1-v_y^2)}, 0\right)$$

$$(\vec{v}_B^{\,p})' = \left(\frac{-v_x}{\gamma_u(1+v_y^2)}, \frac{2v_y}{1+v_y^2}\right) \qquad (\vec{v}_B^{\,k})' = \left(\frac{v_x}{\gamma_u(1+v_y^2)}, \frac{2v_y}{1+v_y^2}\right)$$

Widać, że w układzie S' mamy $\quad m\left((\vec{v}_A^{\,p})' + (\vec{v}_B^{\,p})'\right) \neq m\left((\vec{v}_A^{\,k})' + (\vec{v}_B^{\,k})'\right)$

Potrzebna jest nowa definicja pędu, tak aby zasada zachowania pędu również obowiązywała w dynamice relatywistycznej!

Uwaga: Zakładając, że $v_x \ll v_y$ mamy $T'_A = \gamma'_B T'_B$ oraz $v'_{B,x} = v'_{A,x}/\gamma'_B$.

Dynamika relatywistyczna: pęd i energia

Zastosujmy w definicji pędu zamiast prędkości cząstki jej prędkość "właściwą" (zdefiniowaną jako składowa przestrzenna czterowektora prędkości), czyli $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$(\gamma'_A)^2 = \frac{1}{1-(\vec{v}\,'_A)^2} = \frac{1-v_y^2}{1-v_x^2-v_y^2}$$
$$(\gamma'_B)^2 = \frac{1}{1-(\vec{v}\,'_B)^2} = \frac{(1+v_y^2)^2}{(1-v_y^2)(1-v_x^2-v_y^2)}$$

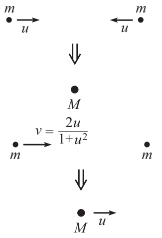
Łatwo można przekonać się, że rzeczywiście zachodzi równość:

$$m\,(\gamma'_A(\vec{v}_A^{\,p})' + \gamma'_B(\vec{v}_B^{\,p})') = m\left(\gamma'_A(\vec{v}_A^{\,k})' + \gamma'_B(\vec{v}_B^{\,k})'\right)$$

Rozważamy teraz zderzenie nieelastyczne dwóch cząstek o masach m, poruszających się z równymi i przeciwnie skierowanymi prędkościami u. W wyniku zderzenia powstaje (w spoczynku) cząstka o masie M.

W układzie związanym z jedną z cząstek m mamy:

$$v = \frac{2u}{1+u^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma_v = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$



Dynamika relatywistyczna: pęd i energia

Korzystając z zasady zachowania pędu dostajemy:

$$\gamma_v mv + 0 = \gamma_u Mu \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2m}{\sqrt{1-u^2}}$$

Sprawdzamy czy wielkość $E = \gamma mc^2$ jest zachowana w tym zderzeniu.

W układzie w którym obie cząstki się poruszają:

$$\gamma_0 Mc^2 = 2(\gamma_u mc^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2m}{\sqrt{1-u^2}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)m$$

W układzie w którym prawa cząstka spoczywa:

$$\gamma_v mc^2 + \gamma_0 mc^2 = \gamma_u Mc^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\right)m + m = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{2m}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

Uwaga: Powyższe rozważania pokazują jedynie, że wielkości γmv i γmc^2 są zachowane w tych konkretnych procesach (zderzeniach cząstek).

Na pytanie czy rzeczywiscie są zachowane może odpowiedzieć tylko eksperyment (akceleratory cząstek, obserwacje kosmologiczne, ...).

Nazwy pęd i energia stosujemy przez analogie do dynamiki Newtona.

Dynamika relatywistyczna

Przybliżenie nierelatywistyczne:

$$E \equiv \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \ldots$$

Bardzo ważny związek energii i pędu:

$$E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^4$$

Dla fotonu $(m = 0)$ mamy: $E = pc$

Uwaga: Każda bezmasowa cząstka musi się poruszać z prędkością światła (musi być $\gamma \to \infty$, aby energia $E > 0$).

Znając pęd i energię cząstki znajdujemy jej prędkość: $\dfrac{\vec{p}}{E} = \dfrac{\vec{v}}{c^2}$

Ile wynosi mc^2:

$$\left.\begin{array}{l} m = 1\text{kg} \quad \Rightarrow \quad mc^2 = (1\text{kg})(3 \cdot 10^8\text{m/s}) \approx 10^{17}\text{J} \\ 6000\text{kWh/rok} \approx 2 \cdot 10^{10}\text{W} \cdot \text{s/rok} = 2 \cdot 10^{10}\text{J/rok} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 10^{17}/2{\cdot}10^{10} = 5{\cdot}10^6 \text{ lat}$$

Anihilacja to najbardziej wydajny proces zamiany masy na energię.

Transformacje Lorentza energii i pędu

Niech cząstka w układzie S' ma prędkość u', energię E' oraz pęd p'. Układ S' porusza się w standardowej konfiguracji względem układu S z prędkością v.

$$S': \qquad E' = \gamma_{u'} m \ \text{ oraz } \ p' = \gamma_{u'} m u'$$

$$S: \qquad E = \gamma_u m = \left\{ u = \frac{u' + v}{1 + u'v} \ \Rightarrow \ \gamma_u = \gamma_{u'} \gamma_v (1 + u'v) \right\} = \gamma_{u'} \gamma_v (1 + u'v) m$$

$$p = \gamma_u m u = \gamma_{u'} \gamma_v (1 + u'v) m \left(\frac{u' + v}{1 + u'v} \right) = \gamma_{u'} \gamma_v (u' + v) m$$

A więc transformacje energii i pędu dla pojedynczej cząstki mają postać:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + vp') \\ p_x &= \gamma(p'_x + vE') \qquad p_y = p'_y \qquad p_z = p'_z \end{aligned}$$

Czterowektor energii-pędu: $\mathrm{p}_\mu = m \mathrm{v}_\mu = (\gamma m c, \gamma m \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$

Ogólne TL dla energii i pędu (S i S' poruszają się w standardowej konfiguracji ze wzgledną prędkością $\vec{u}$):

$$\begin{aligned} E' &= \gamma_u (E - \vec{u} \cdot \vec{p}) \\ \vec{p}\,' &= \vec{p} + \vec{u} \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{p}}{u^2} (\gamma_u - 1) - \gamma_u \frac{E}{c} \right] \end{aligned}$$

Masa niezmiennicza (inwariantna)

Ze względu na liniowość TL są one słuszne również dla układu cząstek:

$$\sum E = \gamma\left(\sum E' + v\sum p'\right)$$
$$\sum p = \gamma\left(\sum p' + v\sum E'\right)$$

- A nawet dla dowolnej kombinacji liniowej energii i pędów.
- W szczególności widać, że jeśli zasada zachowania energii (ZZE) i pędu (ZZP) jest spełniona w jednym układzie inercjalnym, to jest też spełniona w każdym innym układzie inercjalnym.
- ZZP implikuje ZZE i na odwrót.
- Korzystając z czteropędu ZZEiP zapisujemy: $\mathrm{p}_{\mathsf{pocz}} = \mathrm{p}_{\mathsf{kon}}$

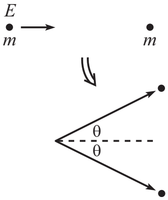
Masa niezmiennicza:

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 &= \gamma^2(E' + vp')^2 - \gamma^2(p' + vE')^2 = \\ &= \frac{1}{1-v^2}\left(E'^{\,2}(1-v^2) - p'^{\,2}(1-v^2)\right) = E'^{\,2} - p'^{\,2} \end{aligned}$$

W szczególności mamy: $E^2_{\mathsf{tot}} - p^2_{\mathsf{tot}} = E^2_{\mathsf{CM}}$

Zderzenie elastyczne cząstek

Przykład: Cząstka o masie m i energii E zderza się elastycznie z identyczną cząstką znajdującą się w spoczynku, w taki sposób, że obie rozpraszają się pod kątami θ względem kierunku ruchu cząstki padającej. Zapisz kąt θ poprzez E i m.



Czteropędy cząstek przed zderzeniem:

$$\mathrm{p}_1 = (E, p, 0, 0) \quad \mathrm{p}_2 = (m, 0, 0, 0) \quad p = \sqrt{E^2 - m^2}$$

Czteropędy cząstek po zderzeniu:

$$\mathrm{p}_1' = (E', p'\cos\theta, p'\sin\theta, 0) \qquad \mathrm{p}_2' = (E', p'\cos\theta, -p'\sin\theta, 0)$$

ZZEiP pozwalają zapisać: $\mathrm{p}_{1,2}' = \left(\frac{E+m}{2}, \frac{p}{2}, \pm\frac{p}{2}\operatorname{tg}\theta, 0\right)$

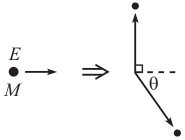
$$\left(p_{1,2}'\right)^2 = \left(\frac{E+m}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2\theta\right) = m^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{E^2 - m^2}{E^2 + 2Em - 3m^2} = \frac{E+m}{E+3m}$$

Rozpad cząstki

Przykład: Cząstka o masie M i energii E rozpada się na dwie identyczne cząstki. W układzie laboratoryjnym są one emitowane pod kątami $\pi/2$ i θ. Znaleźć energie powstałych cząstek.

Czteropęd cząstki przed rozpadem:



$$\mathrm{p}_1 = (E, p, 0, 0) \quad \text{gdzie} \quad p = \sqrt{E^2 - M^2}$$

Czteropędy cząstek powstałych w wyniku rozpadu:

$$\mathrm{p}_1' = (E_1, 0, p_1, 0) \qquad \mathrm{p}_2' = (E_2, p_2\cos\theta, -p_2\sin\theta, 0) \qquad p_{1,2} = \sqrt{E_{1,2}^2 - m^2}$$

ZZP dla składowej x daje $p_2\cos\theta = p$, natomiast składowe y muszą być przeciwnego znaku, co prowadzi do:

$$\mathrm{p}_1' = (E_1, 0, p\,\mathrm{tg}\,\theta, 0) \qquad \mathrm{p}_2' = (E_2, p, -p\,\mathrm{tg}\,\theta, 0)$$

ZZE daje: $E = E_1 + E_2 = \sqrt{p^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta + m^2} + \sqrt{p^2(1+\mathrm{tg}^2\,\theta) + m^2}$

Ostatecznie dostajemy:

$$E_1 = \frac{E^2 - p^2}{2E} = \frac{M^2}{2E} \quad \text{oraz} \quad E_2 = \frac{E^2 + p^2}{2E} = \frac{2E^2 - M^2}{2E}$$

Jednostki w fizyce wysokich energii

Przykład: (rozpad cząstki, cd.)

$$\mathrm{p} - \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{p}^2 - 2\mathrm{p}\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_1^2 = \mathrm{p}_2^2$$

$$M^2 - 2EE_1 + m^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{M^2}{2E}$$

$$E_2 = \frac{E^2 + p^2}{2E} = \frac{2E^2 - M^2}{2E}$$

Jednostki w fizyce cząstek elementarnych:

Energia spoczynkowa protonu:

$$\left.\begin{array}{l} E_p = m_p c^2 = (1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathsf{kg})(3 \cdot 10^8\ \mathsf{m/s}) \approx 1.5 \cdot 10^{-10}\ \mathsf{J} \\ 1\ \mathsf{eV} = (1.6022 \cdot 10^{-19}\ \mathsf{C})(1\ \mathsf{J/C}) = 1.6022 \cdot 10^{-19}\ \mathsf{J} \end{array}\right\} \Rightarrow E_p = 938\ \mathsf{MeV}$$

Mówimy, że masa protonu wynosi 938 MeV.

$m_p = 938.3$ MeV, $m_n = 939.6$ MeV, $m_\pi = 137$ MeV, $m_e = 0.511$ MeV, ...

$$1\mathsf{MeV}/c^2 = 1.783 \cdot 10^{-30}\ \mathsf{kg}$$

Energia w układzie środka masy (CMS)

Przykład: W układzie LAB dane są czteropędy cząstek $\mathrm{p}_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ oraz $\mathrm{p}_2 = (E_2, \vec{p}_2)$. Jaka jest energia tego układu w CMS? Jaka jest prędkość CMS?

Uwaga: Ponieważ energia w CMS nie może zależeć od konkretnego układu LAB, więc musi dać się zapisać za pomocą wielkości niezmienniczych, które można skonstruować z wielkości danych:

$$\mathrm{p}_1^2 = m_1^2, \qquad \mathrm{p}_2^2 = m_2^2, \qquad \mathrm{p}_1 \mathrm{p}_2, \qquad (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)^2, \qquad (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)^2$$

W układzie CMS mamy (wielkości w CMS oznaczamy gwiazdką $\star$):

$$\vec{p}_1^{\,\star} + \vec{p}_2^{\,\star} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{p}_1^\star + \mathrm{p}_2^\star = (E_1^\star + E_2^\star, 0) \quad \Rightarrow \quad E^\star = E_1^\star + E_2^\star$$

A więc

$$E^{\star\,2} = (E_1^\star + E_2^\star)^2 = (\mathrm{p}_1^\star + \mathrm{p}_2^\star)^2 \overset{\text{inv}}{=} (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = M^2$$

Ponieważ $E = \gamma M$ oraz $\vec{p} = \gamma M \vec{\beta}$ więc prędkość układu CMS dana jest przez:

$$\vec{\beta}_{\mathrm{CM}} = \frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{E_1 + E_2}, \qquad \gamma_{\mathrm{CM}} = \frac{E}{M} = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}}$$

Energia cząstki w układzie spoczynkowym innej cząstki

Przykład: W układzie LAB dane są czteropędy cząstek $\mathrm{p}_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ oraz $\mathrm{p}_2 = (E_2, \vec{p}_2)$. Jaka jest energia cząstki 1 w układzie spoczynkowym cząstki 2?

W układzie spoczynkowym cząstki "1" zachodzi $\vec{p}_1 = 0$, więc:

$$\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2' = E_1'E_2' = m_1 E_{21} \qquad \Rightarrow \qquad E_{21} = \frac{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}{m_1}$$

A stąd otrzymujemy:

$$|\vec{p}_{21}|^2 = E_{21}^2 - m_2^2 = \frac{(\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{m_1^2} \qquad \text{oraz} \qquad v_{21}^2 = \frac{|\vec{p}_{21}|^2}{E_{21}^2} = \frac{(\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{(\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2)^2}$$

Uwaga: wszystkie powyższe wielkości wyrażają się poprzez niezmienniki, które można obliczyć w dowolnym układzie!

W szczególności z punktu widzenia układu CMS (hipotetyczna cząstka o czteropędzie $\mathrm{P} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$ i masie M) mamy:

$$\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)^2 - \mathrm{p}_1^2 - \mathrm{p}_2^2\right] = \frac{1}{2}(M^2 - m_1^2 - m_2^2)$$

$$E_i^\star = \frac{\mathrm{P}\mathrm{p}_i}{M} \quad \Rightarrow \quad E_{1,2}^\star = \frac{M^2 \pm (m_1^2 - m_2^2)}{2M} \quad \Rightarrow \quad E_1^\star + E_2^\star = M$$

$$|\vec{p}^\star|^2 = |\vec{p}_i^\star|^2 = \frac{\left[M^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[M^2 - (m_1 - m_2)^2\right]}{4M^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_i^{\star\,2} = \left(\frac{|\vec{p}^\star|}{E_i^\star}\right)^2$$

Energia w CMS - przykłady

Przykład: Zderzenie przeciwbieżnych wiązek cząstek:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 \approx 2p_1p_2 = 2(E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \approx 4E_1E_2$$

HERA $e(27.5$ GeV$) + p(920$ GeV$)$: $\sqrt{s} \approx 318$ GeV,

LHC $p(7$ TeV$) + p(7$ TeV$)$: $\sqrt{s} = 14$ TeV.

Gdyby zderzenie zachodziło ze stacjonarną tarczą, wówczas:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 \approx 2p_1p_2 = 2(E_1M_2 - 0) = 2E_1M$$

Aby energia dostępna w CMS była taka jak w eksperymencie z przeciwbieżnymi wiązkami, musielibyśmy mieć:

HERA $(e + p)$: $E_e \approx 53.9$ TeV,

LHC $(p + p)$: $E_p \approx 104.5$ TeV.

Przykład: Jaka jest energia i pęd cząstki 2 w układzie spoczynkowym cząstki 1 jeśli obie cząstki powstają w wyniku rozpadu $M \to m_1 + m_2$?

$$M^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1p_2 \quad \Rightarrow \quad p_1p_2 = \frac{1}{2}(M^2 - m_1^2 - m_2^2)$$

$$E_{21} = \frac{p_1p_2}{m_1} = \frac{1}{2m_1}(M^2 - m_1^2 - m_2^2), \qquad |\vec{p}_{21}|^2 = \frac{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}{m_1^2}$$

Transformacje Lorentza do układu spoczynkowego cząstki

Gdy wzajemna prędkość układów S i S' ma dowolny kierunek, ogólne TL mają postać:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\beta}\gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\,\vec{r}\cdot\vec{\beta} - t\right), \qquad t' = \gamma\left(t - \vec{r}\cdot\vec{\beta}\right)$$

W zastosowaniu do czteropędu, transformacje te przyjmują postać:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \vec{\beta}\gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\,\vec{p}\cdot\vec{\beta} - E\right), \qquad E' = \gamma\left(E - \vec{p}\cdot\vec{\beta}\right)$$

Aby przejść do układu spoczynkowego cząstki o czteropędzie $P = (E_s, \vec{p}_s)$ i masie $P^2 = M^2$, wystarczy zastosować powyższe transformacje dla

$$\beta = \frac{\vec{p}_s}{E_s} \qquad \text{oraz} \qquad \gamma = \frac{E_s}{M}$$

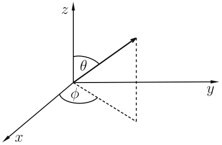
Przykład: Transformacja do CMS: $P = p_1 + p_2 = (E_1 + E_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2) \equiv (E, \vec{p})$.

$$\vec{p}_1^{\star} = \vec{p}_1 + \frac{\vec{p}}{M}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}_1}{E+M} - E_1\right) \qquad E_1^{\star} = \frac{1}{M}\left(E\,E_1 - \vec{p}\cdot\vec{p}_1\right) = \frac{Pp_1}{M}$$

$$\vec{p}_2^{\star} = \vec{p}_2 + \frac{\vec{p}}{M}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}_2}{E+M} - E_2\right) \qquad E_2^{\star} = \frac{1}{M}\left(E\,E_2 - \vec{p}\cdot\vec{p}_2\right) = \frac{Pp_2}{M}$$

W szczególności mamy: $\vec{p}_1^{\star} + \vec{p}_2^{\star} = \vec{p} + \frac{\vec{p}}{M}\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{E+M} - E\right) = 0.$

Transformacja kątów



Niech układ CMS ($S^\star$) porusza się z prędkością β względem układu LAB (S_{LAB}) wzdłuż wspólnej osi z:

$$\begin{aligned} E^\star &= \gamma(E^{\mathsf{L}} - \beta p^{\mathsf{L}}_z) \\ p^\star_z &= \gamma(p^{\mathsf{L}}_z - \beta E^{\mathsf{L}}), \quad p^\star_x = p^{\mathsf{L}}_x, \quad p^\star_y = p^{\mathsf{L}}_y \end{aligned}$$

Zapisując pędy we współrzędnych sferycznych mamy:

$$\begin{aligned} E^\star &= \gamma(E^{\mathsf{L}} - \beta p^{\mathsf{L}} \cos\theta^{\mathsf{L}}) \\ p^\star \sin\theta^\star \cos\phi^\star &= p^{\mathsf{L}} \sin\theta^{\mathsf{L}} \cos\phi^{\mathsf{L}} \\ p^\star \sin\theta^\star \sin\phi^\star &= p^{\mathsf{L}} \sin\theta^{\mathsf{L}} \sin\phi^{\mathsf{L}} \\ p^\star \cos\theta^\star &= \gamma(p^{\mathsf{L}} \cos\theta^{\mathsf{L}} - \beta E^{\mathsf{L}}) \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy: $\operatorname{tg}\phi^{\mathsf{L}} = \operatorname{tg}\phi^\star \;\Rightarrow\; \phi^{\mathsf{L}} = \phi^\star$ oraz

$$\operatorname{ctg}\theta^\star = \gamma\left(\operatorname{ctg}\theta^{\mathsf{L}} - \frac{r^{\mathsf{L}}}{\sin\theta^{\mathsf{L}}}\right), \quad \text{gdzie } r^{\mathsf{L}} = \frac{\beta}{B^{\mathsf{L}}}$$

gdzie B^{L} to czynnik β cząstki w układzie LAB.
Stosując odwrotne TL można pokazać, że

$$\operatorname{ctg}\theta^{\mathsf{L}} = \gamma\left(\operatorname{ctg}\theta^\star + \frac{r^\star}{\sin\theta^\star}\right), \quad \text{gdzie } r^\star = \frac{\beta}{B^\star}$$