Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 6

Siła w dynamice relatywistycznej

Definicja siły w mechanice klasycznej:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad \text{lub jeśli masa jest stała} \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

W mechanice relatywistycznej $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ więc jako definicję siły przyjmujemy

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Relatywistyczna zależność siły od przyspieszenia:

$$F = \frac{\mathrm{d}(\gamma m v)}{\mathrm{d}t} = m\left(v\dot{\gamma} + \gamma\dot{v}\right) = \left\{ \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^3 v a \right\} = m a \gamma(\gamma^2 v^2 + 1) = \gamma^3 m a$$

Rozważmy teraz wielkość:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\gamma m)}{\mathrm{d}x} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \gamma^3 m v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \left\{ v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right\} = \gamma^3 m a$$

Znaczenie wielkości, którą nazywamy siłą bierze się z relacji:

$$p \equiv \gamma m v, \quad E \equiv \gamma m c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$$

Praca i energia potencjalna w dynamice relatywistycznej

Związek pracy z energią w mechanice relatywistycznej:

$$\int_{x_1}^{x_2} F \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} (\gamma^3 ma) \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(\gamma^3 mv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = \int_{v_1}^{v_2} \gamma^3 mv \, \mathrm{d}v = \gamma m \Big|_{v_1}^{v_2}$$

Definiujemy energię potencjalną (względem punktu x_0):

$$V(x) \equiv -\int_{x_0}^{x} F(x) \, \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad V(x_1) + \gamma m|_{v_1} = V(x_2) + \gamma m|_{v_2}$$

Związek podobny do klasycznego, tylko teraz $E = \gamma m$ zamiast $E = \frac{1}{2} mv^2$.

Siła w dynamice relatywistycznej

Relatywistyczna siła zdefiniowana jest więc przez:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \Big\{ \vec{p} = \gamma m \vec{u} \Big\} = m\dot{\gamma}\vec{u} + m\gamma\vec{a}$$

Relatywistyczna zależność siły od przyspieszenia w dwóch wymiarach:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - v_x^2 - v_y^2}}\,(v_x, v_y)$$

Zakładając, że początkowo cząstka porusza się tylko w kierunku osi x mamy:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\left(\frac{\dot{v}_x}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v_x(v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y)}{(1-v^2)^{3/2}}, \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v_y(v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y)}{(1-v^2)^{3/2}}\right) =$$

$$= \Big\{ v_y = 0 \Big\} = m\left(\frac{\dot{v}_x}{\sqrt{1-v^2}}\left(1 + \frac{v^2}{1-v^2}\right), \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{1-v^2}}\right) =$$

$$= m\left(\frac{\dot{v}_x}{(1-v^2)^{3/2}}, \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{1-v^2}}\right) = m(\gamma^3 a_x, \gamma a_y)$$

Uwagi:

- wektor siły nie jest równoległy do wektora przyspieszenia,
- łatwiej przyspieszyć cząstkę w kierunku prostopadłym do jej ruchu.

Transformacje Lorentza dla siły

Chcemy znaleźć TL składowych siły działającej na cząstkę w układzie S' w którym cząstka chwilowo spoczywa, do układu S względem którego cząstka porusza się z chwilową prędkoscią v (ruch odbywa się wzdłuż osi $x - x'$).

$$S: \quad (F_x, F_y) = m(\gamma^3 a_x, \gamma a_y)$$
$$S': \quad (F'_x, F'_y) = m(a'_x, a'_y)$$

TL dla przyspieszenia cząstki z układu S', w którym chwilowo spoczywa, do S:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3(1+vu'_x)^3} = \left\{ u'_x = 0 \right\} = \frac{a'_x}{\gamma^3}$$

$$\left\{ \text{inaczej:} \quad \frac{1}{2} a_x\, dt^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2} a'_x\, dt'^{\,2}\right) \quad \Rightarrow \quad a'_x = \gamma a_x \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 = \gamma^3 a_x \right\}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2(1+vu'_x)^2} - \frac{(vu'_y)a'_x}{\gamma^2(1+vu'_x)^3} = \left\{ u'_x = u'_y = 0 \right\} = \frac{a'_y}{\gamma^2}$$

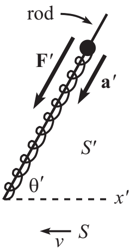
Z powyższych zależności dostajemy: $F_x = F'_x \quad F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y$

Porównanie sił w układach z których żaden nie jest układem spoczynkowym cząstki:

$$F''_x = F'_x = F_x \qquad \gamma'' F''_y = F'_y = \gamma F_y$$

Transformacje Lorentza dla siły

Przykład: Do jednego z konców sprężyny umocowano masę m która może poruszać się jedynie wzdłuż pręta nachylonego pod katem θ' w układzie S' w którym spoczywa. Drugi koniec sprężyny zamocowany jest w poczatku układu S'. Sprężynę rozciągnięto, a następnie puszczono swobodnie. Jak ta sytuacja wygląda z punktu widzenia układu S?

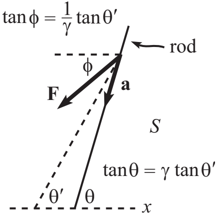


Położenie masy m w układzie S:

$$(x, y) = \left(vt - \frac{1}{2}a_x t^2, -\frac{1}{2}a_y t^2\right) \quad \Rightarrow \quad (\Delta x, \Delta y) = \left(-\frac{1}{2}a_x t^2, -\frac{1}{2}a_y t^2\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{a_y}{a_x} = \operatorname{tg}\theta$$

$$F_x = F_x' \text{ oraz } F_y = \frac{1}{\gamma}F_y' \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\theta'$$



Inaczej: $\dfrac{a_y}{a_x} = \gamma^2\dfrac{F_y}{F_x} = \gamma\dfrac{F_y'}{F_x'} = \gamma\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}\theta$

Uwaga: Pręt nie działa na masę m żadną siłą ani w układzie S' ani w S.

Czterowektor siły

Ogólne TL dla siły:

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\gamma(dp_x - v\,dE)}{\gamma(dt - v\,dx)} = \frac{F_x - v\,\frac{dE}{dt}}{1 - vu_x} = \frac{F_x - v\,(\vec{F}\cdot\vec{u})}{1 - vu_x}$$

$$\left\{ E^2 = p^2 + m^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} + m^2 \quad \Rightarrow \quad E\,\frac{dE}{dt} = \vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}\cdot\vec{F} \right\}$$

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{\gamma(dt - v\,dx)} = \frac{F_y}{\gamma(1 - vu_x)}$$

W zapisie wektorowym mamy:

$$\vec{F}\,'\cdot\vec{u}\,' = \frac{dE'}{dt'} = \frac{\gamma(dE - v\,dp_x)}{\gamma(dt - v\,dx)} = \frac{(\vec{F}\cdot\vec{u}) - vF_x}{1 - vu_x}$$

Czterowektor siły: $\mathrm{F} \equiv \frac{d\mathrm{p}}{d\tau} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}E}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$

Dla $m = \text{const}$ mamy $\mathrm{F} = \frac{d\mathrm{p}}{d\tau} = m\frac{d\mathrm{v}}{d\tau} = m\mathrm{a}$

W układzie spoczynkowym cząstki $\mathrm{F} = (0, \vec{f})$ oraz $m\mathrm{a} = (0, m\vec{a})$ czyli

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

Relatywistyczne równania ruchu

Przykład: Znajdź równanie ruchu cząstki o masie m poruszającej się pod wpływem stałej siły $\vec{F} = f\hat{j}$, jeśli wiadomo, że w chwili $t = 0$ cząstka rozpoczyna ruch w początku układu z pędem $\vec{p}(0) = p_0\hat{i}$.

Równanie ruchu cząstki zadane jest przez: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = (p_0, ft, 0)$

Wyznaczamy zależność prędkości cząstki od czasu:

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{c^2}{E}\vec{p} = \frac{c^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}}\,\vec{p} = \frac{c^2}{\sqrt{E_0^2 + f^2t^2c^2}}\,(p_0, ft, 0)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{c^2}{\sqrt{E_0^2 + f^2t^2c^2}}\,(p_0, ft, 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \int_0^t \frac{c^2}{\sqrt{E_0^2 + f^2t^2c^2}}\,(p_0, ft, 0)\,dt$$

$$x(t) = \frac{p_0c}{f}\sinh^{-1}\frac{cft}{E_0}, \qquad y(t) = \frac{E_0}{f}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{cft}{E_0}\right)^2}\,\right], \qquad z(t) = 0$$

$$y = \frac{E_0}{f}\left(-1 + \cosh\frac{fx}{p_0c}\right) = \frac{E_0}{f}\left[-1 + 1 + \frac{f^2x^2}{2p_0^2c^2} + \ldots\right] \approx \frac{mf}{2p_0^2}x^2$$

Rakieta z napędem fotonowym

Przykład: Rakieta napędzana silnikiem fotonowym emituje strumień fotonów pochodzących z konwersji masy na fotony. Niech m oznacza chwilową masę rakiety, natomiast v jej chwilową prędkość względem Ziemi. Znajdź zależność masy rakiety od jej prędkości. W chwili startu masa rakiety wynosiła M.

Niech masa $(-dm > 0)$ zostanie zamieniona na fotony. Energia wyemitowanych fotonów (w układzie rakiety) wynosi $E_r = -dm$, natomiast ich pęd $p_r = dm$.
Pęd fotonów w układzie Ziemi (TL):

$$p_f = \gamma(p_r + vE_r) = \gamma(dm + v(-dm)) = \gamma(1-v)\,dm$$

ZZP w układzie Ziemi:

$$(\gamma mv)_p = \gamma(1-v)dm + (\gamma mv)_k \quad \Rightarrow \quad \gamma(1-v)dm + d(\gamma mv) = 0$$

$$\begin{aligned} d(\gamma mv) &= (dm)\gamma v + m(d\gamma)v + m\gamma(dv) = \gamma v dm + m(\gamma^3 v\, dv)v + m\gamma\, dv = \\ &= \gamma v\, dm + m\gamma(\gamma^2 v^2 + 1)\, dv = \gamma v\, dm + m\gamma^3 dv \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$0 = \gamma(1-v)dm + \gamma v\, dm + m\gamma^3\, dv = \gamma dm + m\gamma^3 dv \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{m} + \frac{dv}{1-v^2} = 0$$

Rakieta z napędem fotonowym

Całkując to równanie, przy zadanych warunkach początkowych, otrzymujemy:

$$\int_M^m \frac{dm}{m} + \int_0^v \frac{dv}{1-v^2} = 0 \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{m}{M}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \;\Rightarrow\; m = M\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

Uwaga: wynik nie zalezy ani od szybkosci zamiany masy na fotony, ani od częstości emitowanych fotonów, a jedynie od całkowitej wypromieniowanej masy.

Całkowita energia rakiety: $E = \gamma m = \gamma M\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} = \frac{M}{1+v} \overset{v\to c}{\to} \frac{M}{2}$

Zależność prędkości od masy rakiety: $v = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}$

Inny sposób rozwiązania (rozważymy siłę działającą na rakietę w układzie Ziemi).

W układzie związanym z rakietą na fotony działa siła: $F = \frac{dp}{d\tau} = \frac{dm}{d\tau}$

Zgodnie z III ZDN na rakietę działa siła przeciwnie skierowana. W układzie Ziemi (składowa podłużna siły nie ulega zmianie przy TL) siła ta przyjmuje wartość:

$$F = -\frac{dm}{d\tau} = \left\{ t = \gamma\tau \right\} = -\gamma\frac{dm}{dt} \quad\Rightarrow\quad -\gamma\frac{dm}{dt} = \frac{dp}{dt} = m\frac{d(\gamma v)}{dt} = m\gamma^3\frac{dv}{dt}$$

Relatywistyczne linki

Przykład: Rozważmy relatywistyczną linkę, która działa na przymocowaną do niej masę m stałą siłą T niezależną od stopnia rozciągnięcia linki. Nierozciągnięta linka (o długości zerowej) ma masę równą zero. Niech masa m bedzie zamocowana do ściany za pomocą takiej linki i ma początkową prędkość v w kierunku prostopadłym do ściany. Jak daleko masa m oddali się od ściany i ile czasu będzie trwał ruch?

$$F\Delta x = \Delta E \quad \Rightarrow \quad (-T)l = m - \gamma m \quad \Rightarrow \quad l = \frac{m(\gamma - 1)}{T}$$

$$F\Delta t = \Delta p \quad \Rightarrow \quad (-T)t = 0 - \gamma m v \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\gamma m v}{T}$$

Przykład: Dwie masy, m i M, połączono relatywistyczną linką o długości l i sile naprężenia T. W jakim punkcie x licząc od lewej masy (m) spotkają się obie masy po zwolnieniu?

Pędy obu mas dane są przez:

$$p_m = \sqrt{(m + Tx)^2 - m^2} \qquad \text{oraz} \qquad p_M = \sqrt{(M + T(l - x))^2 - M^2}$$

Z relacji $F = dp/dt$ wynika, że pędy obu cząstek muszą być równe i przeciwnie skierowane, a stąd:

$$x = \frac{l(T(l/2) + M)}{M + m + Tl}$$